高职高专

新世纪高职高专实用规划教材

● 公共基础系列

高等数学辅导教程

GAODENG SHUXUE FUDAO JIAOCHENG

杨和稳　主　编

牛春霞　吉有书　副主编

清华大学出版社

新世纪高职高专实用规划教材　公共基础系列

高等数学辅导教程

杨和稳　主　编

牛春霞　吉有书　副主编

清华大学出版社

北　京

内容简介

本书是按照教育部高职高专《高等数学》教学要求及“专转本”考试要求而编写。

全书内容共分 11 章，包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数的微分学、二重积分、无穷级数，每章首先给出本章的知识结构图及考试要求，然后按节对知识点进行解析，每节都配有一定数量的习题，每章同时还配有复习题，题目的类型贴近“专转本”考试。全书最后还附有江苏省近四年来的“专转本”高等数学考题。

全书是由长期从事“专转本”高等数学辅导工作的老师编写，内容深浅适当，知识点剖析透彻。它是一本“专转本”高等数学辅导教程，同时可作为高职高专高等数学学习指导书，还可作为“专升本”的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导教程/杨和稳主编；牛春霞，吉有书副主编. —北京：清华大学出版社，2005.1
(新世纪高职高专实用规划教材　公共基础系列)
ISBN 7-302-09473-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.①杨…②牛…③吉…　Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 092742 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址：**北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编：**100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务：**010-62776969
组稿编辑：林章波
文稿编辑：葛昊晗
封面设计：陈刘源
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×260　**印张：**20.75　**字数：**492 千字
版　次：2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-09473-X/O·404
印　数：1～4000
定　价：27.00 元

《新世纪高职高专实用规划教材》序

编写目的

目前，随着教育改革的不断深入，高等职业教育发展迅速，进入到一个新的历史阶段。学校规模之大，数量之众，专业设置之广，办学条件之好和招生人数之多，都大大超过了历史上任何一个时期。然而，作为高职院校核心建设项目之一的教材建设，却远远滞后于高等职业教育发展的步伐，以至于许多高职院校的学生缺乏适用的教材，这势必影响高职院校的教育质量，也不利于高职教育的进一步发展。

目前，高职教材建设面临着新的契机和挑战：

(1) 高等职业教育发展迅猛，相应教材在编写、出版等环节需要在保证质量的前提下加快步伐，跟上节奏。

(2) 新型人才的需求，对教材提出了更高的要求，即教材要充分体现科学性、先进性和实用性。

(3) 高职高专教育自身的特点是强调学生的实践能力和动手能力，教材的取材和内容设置必须满足不断发展的教学需求，突出理论和实践的紧密结合。

有鉴于此，清华大学出版社在相关主管部门的大力支持下，组织部分高等职业技术学院的优秀教师以及相关行业的工程师，推出了一系列切合当前教育改革需要的高质量的面向就业的职业技术实用型教材。

系列教材

本系列教材主要涵盖以下领域：

- 计算机基础及其应用
- 计算机网络
- 计算机图形图像处理与多媒体
- 电子商务
- 计算机编程
- 电子电工
- 机械
- 数控技术及模具设计
- 土木建筑
- 经济与管理
- 金融与保险

另外，系列教材还包括大学英语、大学语文、高等数学、大学物理、大学生心理健康等基础教材。所有教材都有相关的配套用书，如实训教材、辅导教材、习题集等。

教材特点

为了完善高等职业技术教育的教材体系，全面提高学生的动手能力、实践能力和职业技术素质，特意聘请有实践经验的高级工程师参与系列教材的编写，采用了一线工程技术人员与在校教师联合编写的模式，使课堂教学与实际操作紧密结合。本系列丛书的特点如下：

(1) 打破以往教科书的编写套路，在兼顾基础知识的同时，强调实用性和可操作性。

(2) 突出概念和应用，相关课程配有上机指导及习题，帮助读者对所学内容进行总结和提高。

(3) 设计了“注意”、“提示”、“技巧”等带有醒目标记的特色段落，使读者更容易得到有益的提示与应用技巧。

(4) 增加了全新的、实用的内容和知识点，并采取由浅入深、循序渐进、层次清楚、步骤详尽的写作方式，突出实践技能和动手能力。

读者定位

本系列教材针对职业教育，主要面向高职高专院校，同时也适用于同等学历的职业教育和继续教育。本丛书以三年制高职为主，同时也适用于两年制高职。

本系列教材的编写和出版是高职教育办学体制和运作机制改革的产物，在后期的推广使用过程中将紧紧跟随职业技术教育发展的步伐，不断吸取新型办学模式、课程改革的思路和方法，为促进职业培训和继续教育的社会需求奉献我们的力量。

我们希望，通过本系列教材的编写和推广应用，不仅有利于提高职业技术教育的整体水平，而且有助于加快改进职业技术教育的办学模式、课程体系和教学培训方法，形成具有特色的职业技术教育的新体系。

教材编委会

新世纪高职高专实用规划教材

·公共基础系列编委会

前　言

“专转本”考试是大专(高职)学生继续本科学习之前的一种选拔考试，高等数学作为一门非常重要的理论基础课成为必考科目之一。为了更好地指导学生学好这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高运用知识解决实际问题的能力，帮助学生有效地进行系统复习，根据教育部颁发的高职高专高等数学教学基本要求及“专转本”考试大纲的要求，我们专门编写了这本高等数学辅导教程。

全书共分 11 章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何、多元函数的微分学、多元函数的积分学和级数。每章首先给出了本章的内容结构图，使读者对全章的结构有一个整体了解，便于对知识点进行理解记忆，然后列出本章的考试基本要求，接下来对各知识点进行剖析。

每章列举了大量典型例题，不少例题为历年“专转本”考题。在进行例题讲解时，对常见的题型、常见的解法进行了归类总结。每章都配有习题、复习题，题型基本上类似于“专转本”试题形式，有填空题、选择题、证明题、解答题等，以便于学生进行练习自测，巩固消化所要掌握的知识点。全书最后附有江苏省近 4 年 “专转本”考试高等数学考题，以便让学生了解考试动态与考试走向。同时还附有全书各章习题、复习题及江苏省“专转本”考题答案。

参加本书编写的作者均为一线骨干教师，他们具有丰富的课堂教学经验，同时具有多年指导“专转本”、“专升本”辅导经验。因此在编写技巧和例题讲解等方面均由浅入深、循序渐进，且在难度上层次分明，紧扣“专转本”考试要求。

本书既可作为“专转本”的复习辅导教程，又可作为在校学生学习高等数学的指导书，还可作为参加全国各类成人高考“专升本”高等数学复习考试指导教材。

全书由杨和稳担任主编，牛春霞、吉有书担任副主编。其中，第 1、2、3 章由牛春霞编写，第 4、5、6、7 章由杨和稳编写，第 8、9、10、11 章由吉有书编写。由杨和稳负责全书的统稿工作。

由于编者学术水平及辅导经验有限，不妥之处在所难免，恳请广大师生、读者不吝指正。

编　者

2003 年 5 月

目 录

第 1 章　函数、极限、连续 1

1.1　函数 2

1.1.1　函数的概念 2

1.1.2　函数的性质 4

1.1.3　习题 9

1.2　函数的极限 12

1.2.1　数列的极限 12

1.2.2　函数极限 12

1.2.3　极限的四则运算 14

1.2.4　极限存在准则 14

1.2.5　两个重要极限 15

1.2.6　无穷小量与无穷大量 19

1.2.7　求极限的常用方法 23

1.2.8　习题 26

1.3　函数的连续性 28

1.3.1　连续的概念 28

1.3.2　连续函数的等价条件及性质 28

1.3.3　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续性的判定 29

1.3.4　函数的间断点及其分类 29

1.3.5　闭区间上连续函数的性质 30

1.3.6　习题 33

1.4　复习题 34

第 2 章　导数与微分 38

2.1　导数 39

2.1.1　导数的概念 39

2.1.2　求导数的方法 43

2.1.3　高阶导数 45

2.1.4　习题 51

2.2　微分 53

2.2.1　微分的概念 53

2.2.2　微分的基本公式和运算法则 54

2.2.3　用微分进行近似计算的常用公式 55

2.2.4　习题 56

2.3　复习题 57

第 3 章　导数的应用 60

3.1　微分中值定理 61

3.1.1　罗尔中值定理 61

3.1.2　拉格朗日中值定理 62

3.1.3　习题 64

3.2　洛必达法则 65

3.2.1　不定型“$\frac{0}{0}$”、“$\frac{\infty}{\infty}$”的极限 65

3.2.2　“$0\cdot\infty$”、“$\infty-\infty$”、“1^∞”、“0^0”、“∞^0”型的极限 67

3.2.3　习题 69

3.3　导数的应用 70

3.3.1　函数的增减性与极值 70

3.3.2　函数的最大值与最小值及其应用 73

3.3.3　曲线的凹凸性与作图 75

3.3.4　习题 77

3.4　复习题 79

第 4 章　不定积分 82

4.1　不定积分的概念与性质 82

4.1.1　原函数 82

4.1.2　不定积分 83

4.1.3 不定积分的几何意义............83
4.1.4 不定积分的性质......................84
4.1.5 基本不定积分公式..................84
4.1.6 习题 86
4.2 第一类换元积分法 87
4.2.1 第一换元积分法......................87
4.2.2 常见微分凑法..........................87
4.2.3 习题 90
4.3 第二类换元积分法..........................92
4.3.1 根式代换 92
4.3.2 倒代换 $x=\frac{1}{t}$ 93
4.3.3 三角代换 93
4.3.4 习题 95
4.4 分部积分法 96
4.4.1 运用分部积分法......................96
4.4.2 习题 98
4.5 复习题..99

第 5 章 定积分...................................102

5.1 定积分的概念与性质 102
5.1.1 定积分的概念........................102
5.1.2 定积分的几何意义................103
5.1.3 定积分的性质........................104
5.1.4 习题 106
5.2 牛顿—莱布尼兹公式 107
5.2.1 积分上限函数........................107
5.2.2 牛顿—莱布尼兹公式............111
5.2.3 习题 112
5.3 定积分的换元积分法
与分部积分法..............................113
5.3.1 定积分的换元法....................113
5.3.2 奇偶函数的积分特点............114
5.3.3 周期函数的积分特点............115
5.3.4 定积分的分部积分法............116
5.3.5 习题 117
5.4 广义积分 119
5.4.1 无穷区间上的广义积分........119
5.4.2 无界函数的广义积分............121
5.4.3 习题 123
5.5 复习题 124

第 6 章 定积分的应用 127

6.1 定积分在几何上的应用................127
6.1.1 平面图形的面积.....................127
6.1.2 立体的体积............................132
6.1.3 平面曲线的弧长.....................136
6.1.4 习题 139
6.2 定积分在物理上的应用.................141
6.2.1 变力作功 141
6.2.2 液体的静压力........................142
6.2.3 物体的引力 143
6.2.4 习题...144
6.3 复习题 145

第 7 章 常微分方程..............................147

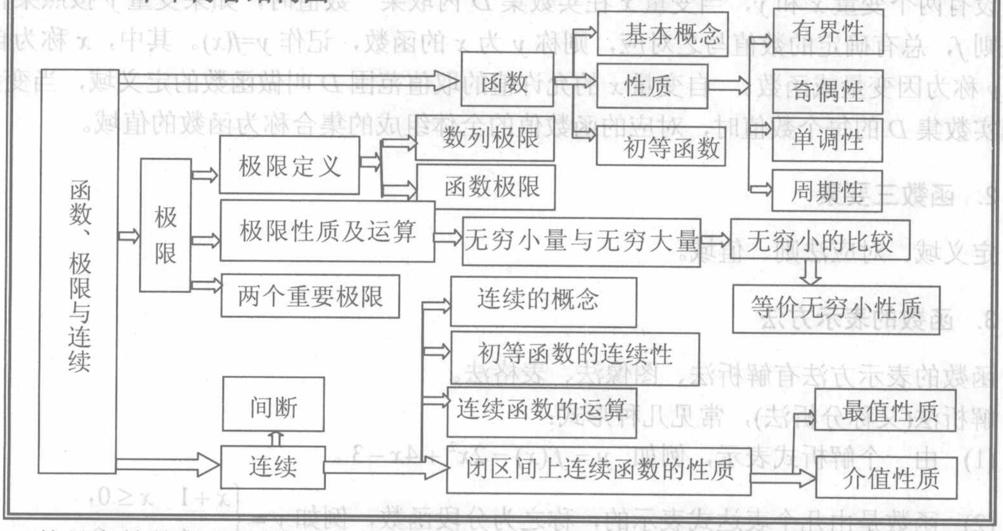
7.1 可分离变量微分方程 148
7.1.1 微分方程的基本概念 148
7.1.2 可分离变量微分方程............148
7.1.3 可化为可分离变量微分
方程的微分方程......................150
7.1.4 习题...152
7.2 一阶线性微分方程 153
7.2.1 一阶线性微分方程................153
7.2.2 贝努利微分方程....................156
7.2.3 习题...158
7.3 可降阶的高阶微分方程.................159
7.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 159
7.3.2 $y'' = f(x, y')$ 160
7.3.3 $y'' = f(y, y')$ 161
7.3.4 习题...163
7.4 二阶常系数线性微分方程.............164
7.4.1 二阶常系数齐次线性
微分方程..................................164
7.4.2 二阶常系数非齐次线性
微分方程..................................165
7.4.3 习题...168
7.5 复习题 169

第 8 章　向量代数空间解析几何 172
8.1　二阶和三阶行列式 172
8.1.1　二阶行列式 172
8.1.2　三阶行列式 173
8.1.3　习题 173
8.2　空间直角坐标系 173
8.3　向量 174
8.3.1　向量的定义 174
8.3.2　向量的模 175
8.3.3　向量的坐标表示 175
8.3.4　向量的方向余弦 175
8.3.5　向量的运算 176
8.3.6　习题 180
8.4　平面与直线 181
8.4.1　平面及其方程 181
8.4.2　直线及其方程 184
8.4.3　习题 188
8.5　空间曲面与曲线 190
8.5.1　空间曲面方程 190
8.5.2　母线平行于坐标轴的柱面方程 190
8.5.3　以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程 190
8.5.4　常见的二次曲面 191
8.5.5　空间曲线方程 192
8.5.6　习题 193
8.6　复习题 194
第 9 章　多元函数的微分学 196
9.1　多元函数的概念、极限与连续 197
9.1.1　多元函数 197
9.1.2　二元函数的极限 200
9.1.3　二元函数的连续性 200
9.1.4　函数表达式符号的应用 201
9.1.5　习题 202
9.2　偏导数 203
9.2.1　偏增量与全增量 203
9.2.2　偏导数 203
9.2.3　习题 207
9.3　全微分及其应用 209
9.3.1　定义 209
9.3.2　性质 209
9.3.3　全微分在近似计算中的应用 210
9.3.4　习题 211
9.4　多元复合函数的微分法 212
9.4.1　复合函数的微分法 212
9.4.2　隐函数的微分法 216
9.4.3　习题 218
9.5　偏导数的应用 219
9.5.1　偏导数在几何上的应用 219
9.5.2　习题 223
9.5.3　多元函数的极值 224
9.5.4　习题 229
9.6　复习题 230
第 10 章　二重积分 232
10.1　二重积分的概念和性质 232
10.1.1　二重积分的概念 232
10.1.2　习题 234
10.2　二重积分的计算 235
10.2.1　在直角坐标系下计算二重积分 235
10.2.2　交换二次积分的次序 240
10.2.3　习题 241
10.2.4　在极坐标系下计算二重积分 242
10.2.5　习题 247
10.3　二重积分的应用 247
10.3.1　求空间曲面所围成的立体的体积 247
10.3.2　计算平面薄板的质量 251
10.3.3　习题 252
10.4　复习题 253
第 11 章　无穷级数 255
11.1　常数项级数的概念和性质 256

11.1.1 级数的定义 256
11.1.2 级数的基本性质 256
11.1.3 习题 257
11.2 正项级数 258
11.2.1 正项级数的定义 258
11.2.2 正项级数收敛性的判别方法 258
11.2.3 习题 263
11.3 任意项级数 263
11.3.1 交错级数 263
11.3.2 任意项级数 264
11.3.3 习题 266
11.4 幂级数 267
11.4.1 函数项级数 267
11.4.2 幂级数 268
11.4.3 习题 275
11.5 将初等函数展开为幂级数 276
11.5.1 泰勒级数 276
11.5.2 将函数展开为幂级数 276
11.5.3 习题 281
11.6 复习题 282
附录 A 284
附录 B 习题参考答案 293

第 1 章　函数、极限、连续

本章内容结构图



函数是高等数学中最重要的基本概念之一。微积分学是在实数范围内，以函数为研究主要对象。极限是微积分的基本概念，利用极限方法可以研究变量的变化趋势。

本章要求

(1)　理解函数的概念。会求函数的定义域、表达式及函数值，会做出简单的分段函数的图像，理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性，掌握基本初等函数的性质及其图像。会建立简单实际问题的函数关系式。

(2)　理解极限的概念(对极限定义中“$\varepsilon-N$”、“$\varepsilon-\delta$”、“$\varepsilon-M$”等形式的描述不作要求)根据极限概念分析函数的变化趋势，会求函数在一点处的左极限与右极限，了解函数在一点处极限存在的充分必要条件。

(3)　掌握极限的四则运算。理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系，会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等阶)，会运用等阶无穷小量代换求极限。

(4)　熟练掌握用两个重要极限求极限的方法。

(5)　理解函数在一点处连续与间断的概念。掌握函数(含分段函数)在一点的连续性的判断方法，理解函数在一点处连续与极限存在的关系。

(6)　会求函数的间断点及确定其类型。

(7)　掌握在闭区间上连续函数的性质，会运用介值定理推证一些简单命题。

(8)　理解初等函数在其定义区间上的连续性，会利用连续性求极限。

1.1 函　　数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，当变量 x 在实数集 D 内取某一数值时，如果变量 y 按照某种对应法则 f，总有确定的数值与之对应，则称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$。其中，x 称为自变量，y 称为因变量或函数。自变量 x 的允许值的取值范围 D 叫做函数的定义域，当变量 x 取遍实数集 D 的每个数值时，对应的函数值的全体组成的集合称为函数的值域。

2. 函数三要素

定义域、对应法则、值域。

3. 函数的表示方法

函数的表示方法有解析法、图像法、表格法。

解析法(又称分析法)，常见几种形式：

(1) 由一个解析式表示，例如 $y=f(x)=2x^2+4x-3$。

(2) 函数是由几个表达式表示的，称之为分段函数，例如 $y=\begin{cases} x+1 & x\le 0, \\ x-1 & x>0。\end{cases}$

(3) 函数的对应法则是由方程 $f(x,y)=0$ 表示的，称之为隐函数，例如 $x^2+xy-e^x=0$。

(4) 函数的对应法则是通过第三变量联系起来的，即由参数方程表示的函数，例如 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t。\end{cases}$

例 1 下列函数是否是相同的函数？为什么？

(1) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；　　(2) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(3) $y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$；　　(4) $y=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 与 $y=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$；

(5) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$。

分析：对于(1)，$y=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$y=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由于两个函数的定义域不同，因此它们不是相同的函数。

对于(2)，$y=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$，由于两个函数的对应法则不同，因此它们不是相同的函数。

对于(3)，$y=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$，而 $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，由于两个函数的定义域不同，因此它们不是相同的函数。

对于(4)，它们的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$，又 $y=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$，易知两个函数的

定义域、值域相同，且两个函数的对应法则相同，因此它们是相同的函数。

对于(5)，$y=\sqrt{x^2}=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\le 0\end{cases}$ 与 $y=x$ 的对应法则不同，因此它们不是相同的函数。

小结：解这类题目的依据是函数三要素。只有当三要素中三个条件都满足时，它们才是相同函数，只要有一个不满足，则它们为不同的函数。

例 2　求下列函数的定义域。

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$；(2) $y=\dfrac{x^2+x-1}{\tan x}$；(3) $y=\lg(x-1)+\arcsin|x-2|$

分析：求函数的定义域，即求自变量的允许值的取值范围。

解：(1)要使函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 有意义，需使偶次根号下的被开方式非负，同时分母不为零，

即 $\begin{cases}x+1\ge 0\\ x-2\ne 0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne 2\end{cases}$ 所以函数的定义域为 $[-1,2)\cup(2,+\infty)$。

(2) 要使函数 $y=\dfrac{x^2+x-1}{\tan x}$ 有意义，需使正切函数有意义，同时分母不为零，

即 $\begin{cases}\tan x\text{有意义}\\ \tan x\ne 0\end{cases}$，　解得 $\begin{cases}x\ne k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ x\ne k\pi\end{cases}$，$k\in z$，

即 $\begin{cases}x\ne(2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}\\ x\ne 2k\cdot\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $k\in z$，

所以函数的定义域为 $x\ne k\cdot\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$ 的全体实数。

(3) 要使函数 $y=\lg(1-x)+\arcsin|x-2|$ 有意义，需满足条件 $\begin{cases}1-x>0\\ |x-2|\le 1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x<1\\ 1\le x\le 3\end{cases}$，所以函数的定义域为 $[3,+\infty)$

小结：求由解析式给出的函数的定义域，即是求使解析式有意义的自变量的取值范围，为此要求：

(1) 分式的分母不能为零；

(2) 偶次根号的被开方式非负；

(3) 对数的底大于零而不等于 1、对数的真数大于零；

(4) 正切函数中的表达式不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in z$；

(5) 余切函数中的表达式不等于 $k\pi$，$k\in z$；

(6) 反正弦、反余弦函数中的表达式的绝对值小于等于 1。

对于实际问题还须保证其符合题意的实际意义。

例 3　函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,2)$，求函数 $f(2x-1)+f(x-1)$ 的定义域。

分析：应先求函数 $f(2x-1)$、$f(x-1)$ 的定义域，而 $f(2x-1)$、$f(x-1)$ 的自变量为 x，所以由 $2x-1$、$x-1$ 的范围，求 x 的范围。

解：$\because$ $f(x)$ 的定义域为 $[0,2)$，$\therefore 0 \le 2x-1 < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{3}{2}$

因此 $f(2x-1)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$；同理，由 $0 \le x-1 < 2$ 得 $f(x-1)$ 的定义域为 $[1,3)$，所以函数 $f(2x-1)+f(x-1)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ 与 $[1,3)$ 的交集 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$。

小结：已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f(\varphi(x))$ 的定义域的问题转化为由 $a \le \varphi(x) \le b$ 的范围求 x 的范围的问题；已知 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 $[a,b]$，求 $f(x)$ 的定义域的问题转化为由 $a \le x \le b$ 的范围求 $\varphi(x)$ 的范围的问题。

例 4 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $g(f(2))$ 和 $f(g(x))$。

分析：这是分段函数，x 在不同区间函数有不同的表达式，要根据 x 的不同范围进行求解。

解：$g(f(2))=g(-1)=\mathrm{e}^{-1}$

$$f(g(x))=f(e^x)=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

小结：解答这类题目时应从里层到外层计算，一定注意变量替换时定义域的变化。

1.1.2 函数的性质

1. 函数的奇偶性

(1) 定义：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任一 $x \in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

(2) 奇偶性的判定：①用定义。先看定义域是否关于原点对称，再验证等式 $f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$ 是否成立；②两偶函数之和(差)为偶函数，两奇函数之和(差)为奇函数；两偶(奇)函数之积为偶函数；奇函数与偶函数之积为奇函数。

(3) 奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称。

2. 函数的单调性

(1) 定义：设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在该区间内单调递增；如果对于该区间内的任意两点 $x_1 < x_2$，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在该区间内单调递减。

注意： (1) 单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数；

(2) 上述区间为函数的单调区间，函数的单调区间可以是有限区间也可以是无限区间。

(2) 判定方法：① 根据定义；② 根据图像；③ 根据导数的符号。

3. 函数的周期性

定义：设函数 $f(x)$ 的定义域 D，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于任一 $x\in D$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，常数 T 称为 $f(x)$ 的周期，满足条件的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期。

注意： (1) 若 T 为周期，则 kT 也为周期；

(2) 并不是每个周期函数都有最小正周期。

4. 函数的有界性

(1) 定义：设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义，如果存在正数 $M>0$，对于该区间内任意的 x，恒有$|f(x)|<M$，则称函数 $f(x)$ 在该区间内为有界函数，参见图 1.1。

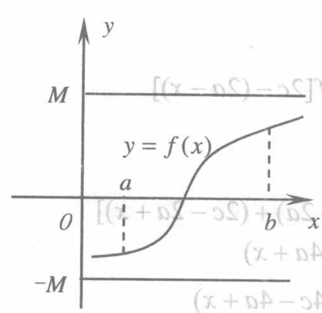


图 1.1

(2) 判定方法

① 利用基本初等函数的图像；

② 适当放大或缩小有关表达式找出其界；

③ 利用导数或极限的相关性质。

例 5 已知函数 $f(x)$ 对一切 x，$y\in \mathrm{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，又 $f(3)=-2$

(1) 求证：$f(x)$ 在 R 上是减函数；

(2) 求 $f(x)$ 在 $[-12,12]$ 上的最大值和最小值。

分析： 等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对一切 x，$y\in\mathrm{R}$ 成立，当然对特殊的 x，y 也成立，对 x、y 进行赋值，证明 $f(x)$ 是奇函数，再利用函数单调性的定义证明 $f(x)$ 是减函数。

证明： (1) 令 $x=y=0$，得 $f(0)+f(0)=f(0)$ 即 $f(0)=0$

又令 $y=-x$，得 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$ $\therefore f(x)$ 是奇函数。

任取 $x_1<x_2$ 且 x_1、$x_2\in\mathrm{R}$，$\because x_2-x_1>0$，$\therefore f(x_2-x_1)<0$，

$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)<0$

$\therefore f(x)$ 是 R 上的减函数。

解：(2) $\because f(x)$在$[-12,12]$上是减函数，$\therefore f(x)_{\min}=f(12)$，$f(x)_{\max}=f(-12)$，
又 $f(12)=f(6)+f(6)=2f(6)=2[f(3)+f(3)]=4f(3)=-8$

$f(-12)=-f(12)=8$

$\therefore f(x)$ 在$[-12,12]$上的最大值是 8，最小值-8。

小结：赋值法是解决抽象函数有关问题(如奇偶性问题)时常用的方法；证明函数的单调性可用定义。

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，曲线 $y=f(x)$ 有一个对称中心 (a,b) 和一条对称轴 $x=c(c\neq a)$，证明 $f(x)$ 是周期函数。

分析：设法从函数的对称性中导出 $f(x)$ 所满足的等式，从而找到满足条件 $f(x+T)=f(x)$ 的非零常数 T。

解：由曲线 $y=f(x)$ 有一个对称中心 (a,b)，可知对一切 x 有 $f(a+x)+f(a-x)=2b$
即 $f(x)+f(2a-x)=2b$ (1)

由曲线 $y=f(x)$ 有一个对称轴 $x=c(c\neq a)$，可知对一切 x 有 $f(c+x)=f(c-x)$
即 $f(x)=f(2c-x)$ (2)

由(1)，(2)两式可得

$$f(x)=2b-f(2a-x)=2b-f[2c-(2a-x)]$$
$$=2b-f(2c-2a+x) \quad (3)$$

再次使用(3)式得

$$f(2c-2a+x)=2b-f[(2c-2a)+(2c-2a+x)]$$
$$=2b-f(4c-4a+x) \quad (4)$$

(4)式代入(3)式得 $f(x)=f(4c-4a+x)$

$\because c\neq a \therefore 4c-4a$ 是不等于零的常数

所以函数 $f(x)$是以 $4|c-a|$ 为周期的周期函数。

小结：证明函数的周期性一般用定义。

5\. **反函数**

(1) 定义：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_x，值域为 D_y。若对于 D_y 中的每一个值 y，通过关系 $y=f(x)$，都有值 x 与之对应，这就建立了 x 与 y 之间的函数关系 $x=\varphi(y)$，则称 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上 x 表示自变量，交换 x、y 的位置得 $y=\varphi(x)$；$y=f(x)$ 的反函数通常是指 $y=\varphi(x)$，记作：$y=f^{-1}(x)$。

(2) 判断：如果函数 $y=f(x)$ 的映射为 1-1 映射，则函数 $y=f(x)$ 必有反函数。

(3) 反函数的图像特点：函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

(4) 反函数的一般步骤：①从 $y=f(x)$ 中解出 $x=\varphi(y)$；②交换 x，y 的位置得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$；③ 指出反函数的定义域，即原函数的值域。