高中新课标

数学提优教程

综合专题讲座（适用于任何版本教材）

4

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

高中新课标数学提优教程

第四册

主编　冯惠愚
主审　葛　军

江蘇教育出版社
凤凰出版传媒集团

图书在版编目(CIP)数据

高中新课标数学提优教程. 第4册/冯惠愚主编. —南京：江苏教育出版社，2007.8

ISBN 978-7-5343-8116-4

Ⅰ.高...　Ⅱ.冯...　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第053882号

主编　冯惠愚

主审　葛　军

编委　（按姓氏笔划为序）

王　刚　王建彬　仇炳生

叶　凡　祁建新　孙居国

李　生　季建生　周敏泽

赵若麟　姚　动　徐　瑢

徐德同　凌惠明　曹瑞彬

曹新跃　蔡玉书　潘春雷

序

哪一个高中学生不想学好数学?

哪一个高中学生不想成为优秀生?

要学好数学,成为优秀生,首先得学好教材的内容.

然后呢?

应当在学好教材的基础上,再读一本好的书.

江苏教育出版社出版的《高中新课标数学提优教程》就是这样的好书.

这本书的特点之一是与教材紧密配合.前三册与教材基本同步,第四册讨论有关的专题.它以教材为基础,在教材的基础上进行提优.其中例题既有高考的中档题,也有高考中较难的题.特别适合准备参加高考与名牌大学自主招生考试的同学.

书中也有全国高中数学联赛的问题,但总的难度略低于常见的竞赛书籍,不以冬令营(CMO)为目标,而是将重点放在提优上.

因此,对于广大高中同学,这本书的内容是能够掌握的,这本书的目标是可望的,也是可即的.

本书的编者仇炳生、赵若麟、曹瑞彬、蔡玉书、潘春雷、

周敏泽、李生、孙居国、王刚、凌惠明、祁建新、徐瑢等老师，都是长期在第一线从事教育工作的名校名师，水平高，经验丰富. 主编冯惠愚老师是著名的特级教师，长期指导南京市中学数学竞赛，培养出沈凯、查宇涵、朱泽园、周伟康等许多优秀学生.

冯老师也是我中学时代的同窗. 四十多年前，我们都是喜爱数学的高中学生. 自己组织了一个名为 F. S. T. Y 的数学小组，做《数学通报》“问题解答”栏目上的题目(F 就是冯老师，S 就是在下). 但那时我们能够看到的数学书是很少的. 如果当时就有一本这样的“提优教程”，那么我们的进步一定会很大的.

高中学生需要一本数学提优教程.

冯老师大概也是出于这样的考虑，所以主编了这样一本书，在其中注入了大量自己的心得、体会，以感广大有志于数学学习的高中学生.

既有这样的好书，当然应抓住机会，先睹为快！

单墫

2007. 3

前 言

二十年前，南京市数学奥林匹克学校成立之初，我就希望能与全体教练员合力编出一套相应的数学提优教材，但这个愿望一直没有实现，现在江苏教育出版社帮我圆了这个梦.《高中新课标数学提优教程》经过作者与编者一年半的努力，终于奉献在读者的面前了.

这是一本高中数学提优的书，是按高中数学新课程标准的体系编写的，所以涵盖了高中数学教学的全部内容. 前三册与日常教学基本同步，即按高中数学新课标必修 1、4、5、2、3 的顺序安排. 其中，第一册主要配套必修 1 的内容，第二册主要配套必修 4、5 的内容，第三册主要配套必修 2、3 的内容. 每学期可以用一册或从中选出与教学进度相符的部分内容进行教学；每册都有几个专题按高中数学联赛大纲的要求安排平面几何、整数论、组合等内容，所以，本书也涵盖了高中数学联赛的全部教学要求，这些内容可在选修课或课外兴趣小组中进行教学（或放在假期教学）. 第四册主要是有关的综合性专题. 本书内容安排上既注重了高考，也兼顾了高中数学联赛. 因此，本书对于高考、著名高校的自主招生考试及高中数学联赛都有较强的针对性.

本书的每个专题安排约 8 个例题，其中 A 类例题相当于高考中档题，B 类例题是高考较难题和联赛一试中档题，C 类例题则达到全国联赛最后三题的难度. 例题尽可能注明出处. 每个例题都体现了一种思路，或一种解法，或一个解题技巧，使学生通过这个例题得到一定收获.

每个专题安排练习题与习题共 16 题左右，一般也分成 A、B、C 三类，即 A 类的容易题，B 类的中档题和 C 类的较难题. 其中部分与例题相似或难度相当的练习题安排在例题后面作为“情景再现”. 例题与练习题主要在高考题、全国联赛赛题、各种

全国性赛事赛题、各地高中竞赛赛题中选择，也选用了少量 IMO 题或冬令营题中较易的.

本书内容层次分明，适用面广，不同学生可根据自身情况各取所需，获得不同发展. 通过使用本书，可以帮助学生达到的第一层次是：提高解题能力，在高考中获得好成绩；可以达到的第二层次是：在全国高中数学联赛中获奖，从而在高校招收保送生、自主招生中获得名校青睐；可以达到的第三层次是：在全国联赛中成绩名列前茅，获得进入国家数学奥林匹克冬令营资格.

江苏省是教育大省，本书作者都是江苏省各地的重点高中的名师，他们大多是数学特级教师或高级教师，也大多是中国数学奥林匹克高级教练. 他们都具有丰富的高考辅导与高中数学竞赛辅导的经验，活跃于近年江苏省高中数学联赛辅导第一线. 所以，这本书也是他们多年进行高考与竞赛辅导的经验的结晶.

本册由下列老师执笔：徐瑢（第 61～62 讲）、孙居国（第 63～64 讲）、冯惠愚（第 65、67～69 讲）、蔡玉书（第 66、80 讲）、叶凡（第 70 讲）、李生（第 71 讲）、曹瑞彬、王建彬（第 72 讲）、赵若麟（第 73 讲）、凌惠明（第 74 讲）、祁建新（第 75、77 讲）、潘春雷（第 76 讲）、周敏泽（第 78、79 讲）.

本书同时也得到了来自高校的数学竞赛研究专家的关注. 著名数学家、数学教育家单墫教授专门为本书写了序言；在本书初稿完成后，又经南京师范大学葛军教授审阅，作了许多修改. 在此向他们致以由衷的感谢. 由于我们的水平有限，错误与不足实难避免，也望读者不吝赐教.

希望这本书能给广大高中同学一点帮助.

冯惠愚

2007. 03. 15.

目　录

contents

第 61 讲　复数的运算与方程的根

本讲主要内容有：复数的概念以及复数相等的充要条件、复数代数形式的四则运算及其几何意义；模与共轭的性质；方程的根（代数基本定理）和单位根.

A 类例题

例 1　(2005 年高考上海春季卷试题)已知 z 是复数，$z+2\mathrm{i}$，$\frac{z}{2-\mathrm{i}}$ 均为实数（i 为虚数单位），且复数 $(z+a\mathrm{i})^2$ 在复平面上对应的点在第一象限，求实数 a 的取值范围.

分析　设出复数 z 的代数形式，利用复数为实数，求出 z，再利用在第一象限的条件，可得实数 a 的范围.

解　由 $z+2\mathrm{i}$ 为实数，设 $z+2\mathrm{i}=x\ (x\in\mathbf{R})$，得 $z=x-2\mathrm{i}$.

故 $\frac{z}{2-\mathrm{i}}=\frac{x-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{1}{5}(x-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=\frac{1}{5}(2x+2)+\frac{1}{5}(x-4)\mathrm{i}$.

由题意得 $x=4$，$\therefore z=4-2\mathrm{i}$.

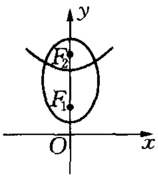
又 $(z+a\mathrm{i})^2=(12+4a-a^2)+8(a-2)\mathrm{i}$，据题意，可知

$\begin{cases}12+4a-a^2>0,\\ 8(a-2)>0,\end{cases}$ 解得 $2<a<6$. $\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(2,6)$.

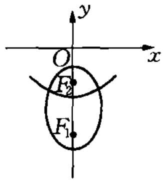
说明　将复数问题实数化是解决复数问题的基本方法之一，它使得代数与几何之间的相互转化得以实现.

例 2　(1993 年全国联赛一试试题)设 m，n 为非零实数，i 为虚数单位，$z\in\mathbf{C}$，则方程

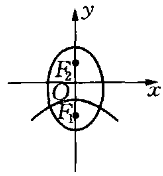
$|z+n\mathrm{i}|+|z-m\mathrm{i}|=n$ ①与 $|z+n\mathrm{i}|-|z-m\mathrm{i}|=-m$ ②，(如图)在同一复平面内的图形(F_1，F_2 是焦点)是　　(　　)



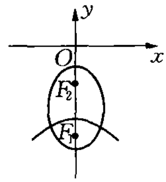
A.



B.



C.



D.

分析　可根据复平面内点的轨迹的定义，也可根据 m, n 的取值讨论进行求解.

解　方程①当 $n>|n+m|$ 时，在复平面上的轨迹为以 $-n\mathrm{i}$, $m\mathrm{i}$ 为焦点的椭圆.

方程②当 $|m+n|>|m|$ 时，在复平面上的轨迹为以 $-n\mathrm{i}$, $m\mathrm{i}$ 为焦点的双曲线的一支.

已知的 4 个图均为椭圆及双曲线的一支，故 $n>|m+n|>|m|$ 成立. 从而 $n>0$, $m<0$. 且 $n>|m|$. 由于 $-m>0$. 即方程②表示双曲线的上支(到 $-n\mathrm{i}$ 的距离较大).

只有 B 满足上述要求. 故选 B.

说明　本题属于读图题型，上述解法为基本方法. 本题的关键是对复平面内点的轨迹的定义的理解.

例 3　(2001 年高考上海卷)对任意一非零复数 z，定义集合 $M_z=\{\omega\mid\omega=z^{2n-1},\ n\in\mathbf{N}\}$.

(1) 设 α 是方程 $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{2}$ 的一个根. 试用列举法表示集合 M_α，若在 M_α 中任取两个数，求其和为零的概率 P；

(2) 设复数 $\omega\in M_z$，求证：$M_\omega\subseteq M_z$.

分析　先解出方程的复数根，然后代入集合进行复数的代数式运算，最后从集合知识的角度解决该问题.

解　(1) $\because$ α 是方程 $x^2-\sqrt{2}x+1=0$ 的根，

$\therefore$ $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$ 或 $\alpha_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$.

当 $\alpha_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$ 时，有 $\alpha_1^2=\mathrm{i}$, $\alpha_1^{2n-1}=\dfrac{(\alpha_1^2)^n}{\alpha_1}=\dfrac{\mathrm{i}^n}{\alpha_1}$,

$\therefore M_{\alpha_1}=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}),-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\right\}$.

当 $\alpha_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$ 时，有 $\alpha_2^2=-\mathrm{i}$，

$\therefore M_{\alpha_2}=\left\{\dfrac{-\mathrm{i}}{\alpha_2},\dfrac{-1}{\alpha_2},\dfrac{\mathrm{i}}{\alpha_2},\dfrac{1}{\alpha_2}\right\}=M_{\alpha_1}$.

因此，不论 α 取哪一个值，集合 M_α 是不变的，于是 $P=\dfrac{2}{\mathrm{C}_4^2}=\dfrac{1}{3}$.

(2) $\because \omega\in M_z$，$\therefore$ 存在 $m\in\mathbf{N}$，使得 $\omega=z^{2m-1}$.

于是对任意 $n\in\mathbf{N}$，$\omega^{2n-1}=z^{(2m-1)(2n-1)}$，由于 $(2m-1)(2n-1)$ 是正奇数，$\omega^{2n-1}\in M_z$，所以 $M_\omega\subseteq M_z$.

说明 在复数的代数式运算中，熟练把握 i，$1\pm\mathrm{i}$，$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 等常用的特殊复数的乘方运算规律是十分重要的.

情景再现

1. (1990 年全国联赛一试试题)若 A，B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角，则复数 $z=(\cos B-\sin A)+\mathrm{i}(\sin B-\cos A)$ 在复平面内所对应的点位于 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. (2004 年高考北京卷试题)满足条件 $|z-\mathrm{i}|=|3+4\mathrm{i}|$ 的复数 z 在复平面上对应点的轨迹是 ( )

A. 一条直线　　B. 两条直线　　C. 圆　　D. 椭圆

B 类例题

例 4 (1995 年全国联赛一试试题)设 α，β 是一对共轭复数，若 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$，且 $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ 是实数，则 $|\alpha|=$ ________.

分析 将抽象的共轭复数具体化，或利用复数 z 为实数的充要条件：$z=\bar{z}$.

解法一 设 $\alpha=a+b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$，则 $\beta=a-b\mathrm{i}$，

$\therefore |\alpha-\beta|=|2b\mathrm{i}|=2\sqrt{3}$，$\therefore |b|=\sqrt{3}$.

又 $\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\dfrac{a+b\mathrm{i}}{(a-b\mathrm{i})^2}=\dfrac{a^3-3ab^2+(3a^2b-b^3)\mathrm{i}}{(a^2+b^2)^2}\in\mathbf{R}$,

$\therefore 3a^2b-b^3=0$，由 $|b|=\sqrt{3}$ 知 $a^2=1$，$\therefore |\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

解法二 $\dfrac{\alpha}{\beta^2}\in\mathbf{R}\Rightarrow\dfrac{\alpha}{\beta^2}=\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}^2}\Rightarrow\alpha\bar{\beta}^2=\beta^2\bar{\alpha}$，而 $\bar{\alpha}=\beta$，$\alpha=\bar{\beta}$，

$\therefore \alpha^3=\beta^3$，

$\therefore \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3=1$，$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}=1$，$\omega$，$\omega^2$，即 $\beta=\alpha$，$\alpha\omega$，$\alpha\omega^2$，显然 $\beta\neq\alpha$.

$\therefore |\alpha-\beta|=|\alpha(1-\omega)|=2\sqrt{3}$ 或 $|\alpha(1-\omega^2)|=2\sqrt{3}$，

$\therefore |\alpha|=2$.

> **链接** 复数的表示还有三角形式：$z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$，r 是 z 的模，θ 称为辐角，在 $[0,2\pi)$ 内的辐角叫做辐角主值，记为 $\arg z$.
>
> 复数的三角形式的运算：若
>
> $$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$
>
> 乘法：$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2))$；
>
> 除法：$z_1\div z_2=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2))$.
>
> 复数的三角形式沟通了代数、三角与几何之间的联系. 用三角式解本题方法如下：设 $\alpha=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$\alpha$，$\beta$ 对应于复平面上的点分别为 A，B. 连 AB，则 $|AB|=|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$，设 AB 与 OX 交于 M，则 $|AM|=\sqrt{3}$. 由 $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ 是实数，所以 $3|\theta|=180^\circ$ 或 360°，即 $|\theta|=60^\circ$ 或 120°，从而 $r=|\alpha|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$，即 $|\alpha|=2$.

例 5 （1995 年全国联赛一试试题）设复平面上单位圆内接正 20 边形的 20 个顶点所对应的复数依次为 z_1，z_2，…，z_{20}，则复数 $z_1^{1\,995}$，$z_2^{1\,995}$，…，$z_{20}^{1\,995}$ 所对应的不同的点的个数是 （　　）

A. 4　　B. 5　　C. 10　　D. 20

解 设 $z_1=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则有 $z_k=z_1\varepsilon^{k-1}$，其中 $\varepsilon=\cos\dfrac{\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{10}$.

$k=1, 2, \cdots, 20$.

于是 $\varepsilon^5=\mathrm{i}$, $\varepsilon^{10}=-1$, $\varepsilon^{15}=-\mathrm{i}$, $\varepsilon^{20}=1$,则有 $\varepsilon^{1\,995}=-\mathrm{i}$.

从而 $z_k^{1\,995}=(\cos 1\,995\theta+\mathrm{i}\sin 1\,995\theta)\varepsilon^{1\,995(k-1)}=(\cos 1\,995\theta+\mathrm{i}\sin 1\,995\theta)(-\mathrm{i})^{k-1}$.

由于 $(-\mathrm{i})^{k-1}$ 只有 4 个值,故相应的不同点数为 4. 选 A.

> **链接** 设复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,则
>
> 复数的乘方(棣美弗定理):$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$;
>
> 复数的 n 次方根:z 的 n 次方根为 $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{2k\pi+\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi+\theta}{n}\right)$, $(k=0, 1, \cdots, n-1)$ 共有 n 个值.
>
> 复数 n 次方根的几何意义:表示复数 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根的点,是以原点为圆心,$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上的 n 个点,它们构成圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 6 设复数 z_1, z_2 满足 $z_1^2-z_1z_2+\frac{1}{4}(1+a^2)z_2^2=0\ (a>0)$,它们在复平面内分别对应于不同的点 A, B, O 为坐标原点,若 $|z_2|=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$,求使得$\triangle AOB$ 有最大面积时的 a 的值,并求出最大面积.

分析 先由方程解得两复数 z_1 与 z_2 的关系,再由几何意义建立面积的函数.

解 方程变形为 $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\frac{1}{4}(1+a^2)=0$,得:$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1\pm a\mathrm{i}}{2}$.

$$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{1\pm a\mathrm{i}}{2}\right|=\frac{\sqrt{1+a^2}}{2},\ \tan\angle AOB=\pm a,$$

$$\therefore \sin\angle AOB=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\angle AOB\\&=\frac{1}{2}|z_1|\cdot|z_2|\cdot\sin\angle AOB\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+a^2}}{2}\cdot\left(1-\frac{a^2}{4}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{a(4-a^2)}{4^2} = \frac{\sqrt{2a^2(4-a^2)(4-a^2)}}{\sqrt{2}\cdot 4^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{16\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{2a^2+(4-a^2)+(4-a^2)}{3}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

当且仅当 $2a^2 = 4-a^2$，即 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取得等号. 此时，$\triangle AOB$ 取得最大面积为$\frac{\sqrt{3}}{9}$.

说明 复数运算的几何意义是实现数形结合和问题转化的关键.

> **链接** 复数乘法、除法的几何意义可以从三角式的乘除运算中获得. 复数乘法几何意义是：若复数 z_1，z_2 所对应的向量为$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，则 z_1z_2 所对应的向量，其模是 $r_1\cdot r_2$，辐角是 $\alpha+\beta$.（除法则相反）

例 7 （1994 年全国联赛二试试题）关于 x 的二次方程 $x^2+z_1x+z_2+m=0$（z_1，z_2，m 均是复数，且 $z_1^2-4z_2=16+20\mathrm{i}$）的两个根 α，β 满足 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$. 求$|m|$的最大值和最小值.

分析 对涉及复系数一元二次方程两根关系的问题，可以考虑用韦达定理来处理；若从求模的最值角度来考虑，可以利用复数模的不等式性质来解决.

解法一 根据韦达定理有 $\begin{cases}\alpha+\beta=-z_1,\\ \alpha\beta=z_2+m.\end{cases}$

因 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=z_1^2-4z_2-4m$，

故 $|\alpha-\beta|^2=|4m-(z_1^2-4z_2)|=28$. 即 $|m-(4+5\mathrm{i})|=7$.

这表明复数 m 在以 $A(4,5)$ 为圆心，以 7 为半径的圆周上（如图 61-1 所示）. 因 $|OA|=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}<7$，故原点 O 在$\odot A$ 之内. 连接 OA，延长交$\odot A$ 于两点 B 与 C，则 $|OB|=|OA|+|AB|=\sqrt{41}+7$ 为 $|m|$ 最大值.

$|OC|=|CA|-|AO|=7-\sqrt{41}$ 为 $|m|$ 最小值.

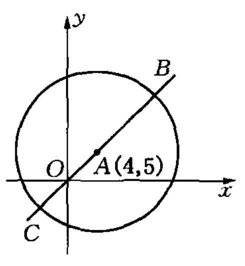


图 61-1

$\therefore$ $|m|$ 的最大值是 $\sqrt{41}+7$，$|m|$ 的最小值是 $7-\sqrt{41}$.

解法二 同解法一，得 $|m-(4+5\mathrm{i})|=7$，

$\therefore$ $|m|=|m-(4+5\mathrm{i})+(4+5\mathrm{i})|\leqslant|m-(4+5\mathrm{i})|+|4+5\mathrm{i}|=7+\sqrt{41}$. 等号成立的充要条件是 $m-(4+5\mathrm{i})$ 与 $(4+5\mathrm{i})$ 所表示的向量是同向共线的，此时，$|m|$ 取最大值 $7+\sqrt{41}$. 同理，当 $m-(4+5\mathrm{i})$ 与 $(4+5\mathrm{i})$ 所表示的向量是异向共线时，$|m|$ 取最小值 $7-\sqrt{41}$.

说明 两种解法，各有千秋，从不同侧面提示了本题的内在结构特征. 解法一运用数形结合法，揭示复数 m 的几何意义，直观清晰；解法二运用不等式中等号成立的条件获得答案.

本题也可设复数的三角式，从而转化为三角函数的最值问题. 同解法一，得 $|m-(4+5\mathrm{i})|=7$，令 $m=x+y\mathrm{i}\ (x,\ y\in\mathbf{R})$.

则 $\begin{cases}x=7\cos\alpha+4,\\ y=7\sin\alpha+5.\end{cases}$ $\therefore$ $|m|^2=x^2+y^2=90+56\cos\alpha+70\sin\alpha=90+14\sqrt{41}\left(\dfrac{4}{\sqrt{41}}\cos\alpha+\dfrac{5}{\sqrt{41}}\sin\alpha\right)=90+14\sqrt{41}\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$. $\therefore$ $|m|$ 的最大值 $=\sqrt{90+14\sqrt{41}}=7+\sqrt{41}$，$|m|$ 的最小值 $=7-\sqrt{41}$.

情景再现

3. (2001 年全国联赛一试试题)若复数 z_1，z_2 满足 $|z_1|=2$，$|z_2|=3$，$3z_1-2z_2=\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=$ ________.

4. (1992 年全国联赛一试试题)设复数 z_1，z_2 在复平面上对应的点分别为 A，B，且 $|z_1|=4$，$4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$，O 为坐标原点，则$\triangle OAB$ 的面积为 (　　)

A. $8\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $6\sqrt{3}$　　D. $12\sqrt{3}$

5. (2000 年全国联赛一试试题)设 $\varepsilon=\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$，则以 ε，ε^3，ε^7，ε^9 为根的方程是 (　　)

A. $x^4+x^3+x^2+x+1=0$　　B. $x^4-x^3+x^2-x+1=0$

C. $x^4-x^3-x^2+x+1=0$　　D. $x^4+x^3+x^2-x-1=0$

C 类例题

例 8 (1991 年全国联赛一试试题)设复数 z_1，z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$,求 $\log_2|(z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1z_2)^{2000}|$ 的值.

分析 可以利用模与共轭的关系来寻找 z_1，z_2 的关系,并进一步求出 $z_1\bar{z}_2$，$z_2\bar{z}_1$ 的具体值.

解 由 $|z_1+z_2|^2=9$，$|z_1-z_2|^2=27$,得$(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=9$ ①，$(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=27$ ②,由①+②,得 $|z_1|^2+|z_2|^2=18$,又 $|z_1|^2=9$,所以 $|z_2|^2=9$. 由 ②-①,得 $z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=-9$,即

$$z_1\bar{z}_2+\frac{|z_1|^2\cdot|z_2|^2}{z_1\bar{z}_2}=-9,$$

化简,得

$$(z_1\bar{z}_2)^2+9(z_1\bar{z}_2)+81=0.$$

解得 $z_1\bar{z}_2=9\omega$，$\left(\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$. 取共轭,得 $\bar{z}_1z_2=\frac{9}{\omega}$.

故

$$(z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1z_2)^{2000}=(9\omega)^{2000}+\left(\frac{9}{\omega}\right)^{2000}$$

$$=9^{2000}\left(\omega^{2000}+\frac{1}{\omega^{2000}}\right)=9^{2000}(\omega^2+\omega)=-9^{2000}.$$

所以 $\log_3|(z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1z_2)^{2000}|=\log_3 9^{2000}=4\,000$.

说明 若从复数乘法的几何意义出发,有以下解法:

由 $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ 及已知条件可得 $|z_2|=3$，在复平面上,设 z_1，z_2，z_1+z_2 对应的点分别为 z_1，z_2，z,则 $\triangle OZ_2Z$，$\triangle OZ_1Z$ 均为正三角形,从而 $\angle Z_2OZ_1=120°$，由复数乘法几何意义知 $\frac{z_2}{z_1}=\cos(\pm120°)+\mathrm{i}\sin(\pm120°)$，于是

$$z_1\bar{z}_2=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)|z_2|^2=9\cdot\frac{z_1}{z_2}=9\omega,\ z_2\bar{z}_1=\frac{9}{\omega},$$

这里

$$\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

当 $z_1\bar{z}_2=9\omega$ 时,可得 $(z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1z_2)^{2000}=-9^{2000}$，故

$\log_3 |(z_1\bar{z}_2)^{2000}+(\bar{z}_1z_2)^{2000}|=4\,000.$

当 $\bar{z}_1z_2=9\omega^2$ 时，可得同样结果，故答案为 4 000.

例 9 （2003 年全国联赛一试试题）设 A，B，C 分别是复数 $z_0=a\mathrm{i}$，$z_1=\dfrac{1}{2}+b\mathrm{i}$，$z_2=1+c\mathrm{i}$，$(a, b, c\in\mathbf{R})$，对应的不共线三点. 求证：曲线 $z=z_0\cos^4t+2z_1\cos^2t\sin^2t+z_2\sin^4t$ $(t\in\mathbf{R})$ 与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点，并求出此点.

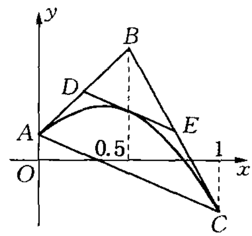


图 61-2

分析 将复数问题实数化，得到 z 的参数方程，再利用向量不共线的性质推理得出 z 所表示的图形为抛物线的一部分，然后求出中位线方程，与抛物线的方程联立即可解决问题.

证明 将 $z_0=a\mathrm{i}$，$z_1=\dfrac{1}{2}+b\mathrm{i}$，$z_2=1+c\mathrm{i}$ 代入曲线 $z=z_0\cos^4t+2z_1\cos^2t\sin^2t+z_2\sin^4t$，实虚部分离可得

$$z=\sin^2t+(a\cos^4t+2b\cos^2t\sin^2t+c\sin^4t)\mathrm{i}.$$

又设 $z=x+y\mathrm{i}$ $(x, y\in\mathbf{R})$，则 $\begin{cases}x=\sin^2t,\\ y=a\cos^4t+2b\cos^2t\sin^2t+c\sin^4t.\end{cases}$ 而 $t\in\mathbf{R}$，消去 t，得曲线直角坐标方程为

$$y=(a-2b+c)x^2-2(a-b)x+a\ (\text{其中 } 0\leqslant x\leqslant 1). \qquad ①$$

因为 A，B，C 是不共线的三点，所以直线 AB 的斜率不等于直线 AC 的斜率，即 $\dfrac{b-a}{\frac{1}{2}-0}\neq\dfrac{c-a}{1-0}$，整理得 $a-2b+c\neq 0$，故曲线①是抛物线的一部分（如图 61-2）. 由已知，AB 中点所对应的复数为 $\dfrac{z_0+z_1}{2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a+b}{2}\mathrm{i}$，$BC$ 中点所对应的复数为 $\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{b+c}{2}\mathrm{i}$.

所以，$\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线方程为

$$\left(y-\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{b+c}{2}-\frac{a+b}{2}\right),$$