高等院校数学教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火

丛书主编 张天德

概率论与数理统计辅导及习题精解

（与人大修订本教材配套）

王光臣 张云峰 主编

联系考研，渗透精讲历年考研真题

- 知识图表 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

全新修订

第4版

赠《重要公式及性质》手册

天津人民出版社

概率论与数理统计
辅导及习题精解

Spark® 星火

概率论与数理统计辅导及习题精解

（与人大修订本教材配套）

主　编　王光臣　张云峰

天津人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导及习题精解：人大版/张天德编著.
天津：天津人民出版社，2008.6
ISBN 978-7-201-05983-9

Ⅰ.概... Ⅱ.张... Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 086614 号

天津人民出版社出版
出版人：刘晓津
（天津市西康路 35 号 邮政编码：300051）
邮购部电话：(022) 23332469
网址：http://www.tjrmcbs.com.cn
电子信箱：tjrmcbs@126.com
高青龙马印务有限责任公司印刷 新华书店经销

2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷
880×1230 毫米 32 开本 12 印张
字 数：310 千字
定 价：15.80 元

前言

概率论与数理统计是高等院校理工科专业和部分文科专业重要的基础课程，也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。

中国人民大学经济信息管理系编写的《概率论与数理统计》深受广大教师和学生欢迎，被全国很多高校采用。经过修订后的第二版，更是结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅，在讲授基础知识的同时注意提炼、渗透数学思想方法，质量、体例均臻于炉火纯青。

为了帮助广大高校在校生和准备考研的学子学好、复习好概率论与数理统计这门课程，我们本着"选好教材、做好辅导"的宗旨，以中国人民大学经济信息管理系编写的《概率论与数理统计》(修订版)为针对教材，编写了这本与之章节、内容完全同步的《概率论与数理统计辅导及习题精解》配套辅导用书。

全书共分十一章，每一章又分为若干节，循着教材顺序对内容清晰梳理、深入讲解；每一章内容讲完后，再对整章内容重点做一回顾和加深，然后给出该章教材上的习题答案详解，并提供该章同步自测题。

每一章中每节内容讲解 这部分由三块组成：该节知识结构图表、该节重点考点提炼、该节题型例题方法。

一、知识结构图表 这一部分用直观、形象的图表形式，将该节知识间的相互联系、逻辑关系清晰地展示给读者。

二、重点考点提炼 这一部分将该节一些重要的知识点和考点清晰、准确地提炼出来，并简明地点出掌握这些重点、考点需要注意的问题。

三、题型例题方法 这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，作者将教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题，深入讲解，务必使您对每一个考查点扎实掌握、悟透吃透，并能熟练运用在具体解题中，可谓知识梳理、重点深讲、考点透析三重互动、一举突破，从而使应用、应试能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的"思路探索"、"方法点击"，更是巧妙点拨，让您举一反三、触类旁通。

每一章后教材习题答案　这一部分对该章教材上的全部习题给出详细、准确的解答，方便您在解题中回顾、巩固、深化前面的内容讲解。

每一章后同步自测练习　这一部分是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的，目的是给读者提供进一步的练习机会，让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力。其后给出了练习全部解答。

书的最后，附上了2008年考研数学试题及解析，以便准备考研的读者了解最新考研试题、检测自我能力水平，找出差距、调整复习。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色：

一、知识梳理清晰、简洁　直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的题型归纳，将教材内容简明扼要的展现给读者，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识结构体系，为提高解题能力和数学思维水平打下坚实的基础。

二、能力提升迅速、互动　所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量精选的例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合，一举完成。

三、联系考研密切、实用　本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的能力。

本书博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分，笔者在此向这些书籍的作者表示感谢。同时，由于作者水平所限，不足之处，在所难免，殷切希望读者提出宝贵意见，以便再版时改进、修正。

编者

目　录

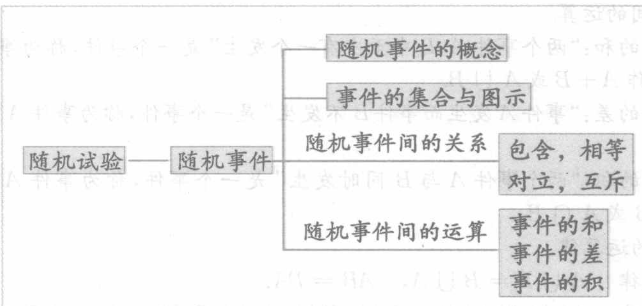
第一章 随机事件及其概率

本章介绍了随机试验、随机事件的概念、事件间的关系及其运算，主要介绍了古典概率、条件概率的定义、概率的加法法则、乘法法则、全概率定理和贝叶斯定理，同时对古典概型和贝努里概型也做了重点论述.

第一节 随机事件

一、内容简析

【知识结构】



【重要知识点和考点分析】

1. 随机事件

(1) 随机试验：在概率论中将具备下列三个条件的试验称为随机试验，简称试验：

1°. 在相同条件下可重复进行；

2°. 每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验之前可以明确试验的所有可能结果；

3°. 在每次试验之前不能准确预言该次试验将出现何种结果.

(2) 随机事件：大量随机试验中具有某种规律性的事件.

(3) 基本事件：不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件.

(4) 必然事件：每次试验中一定发生的事件.

(5) 不可能事件：每次试验中一定不发生的事件.

2. 事件的集合

对于试验的每一个基本事件，若用只包含一个元素的单点集合表示，则由所有基本事件对应的全部元素组成的集合称为样本空间. 每一个基本事件所对应的元素称为样本空间的样本点. 随机事件可定义为样本点的某个集合.

对于随机事件，常用A、B、C等表示. 对于必然事件，常用Ω表示. 对于不可能事件，常用$\varnothing$表示.

3. 事件间的关系

(1) 包含：如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，记作$A\subset B$或$B\supset A$.

(2) 相等：如果事件A包含事件B，事件B也包含事件A，则称事件A与事件B相等. 记作$A=B$.

(3) 互斥：若事件A与B不能同时发生，则称A、B为互斥事件. 显然，基本事件间是互斥的.

(4) 对立："事件A不发生"的事件称为事件A的对立事件. A的对立事件常记为$\overline{A}$.

容易看出：对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件.

(5) 完备事件组：若事件$A_1,\cdots,A_n$为两两互不相容的事件，并且$A_1+\cdots+A_n=\Omega$，称$A_1,\cdots,A_n$构成一个完备事件组.

4. 事件间的运算

(1) 事件的和："两个事件A、B中至少有一个发生"是一个事件，称为事件A与B的和(并). 记作$A+B$或$A\cup B$.

(2) 事件的差："事件A发生而事件B不发生"是一个事件，称为事件A与B的差. 记作$A-B$.

(3) 事件的积："两个事件A与B同时发生"是一个事件，称为事件A与B的积(交). 记作AB或$A\cap B$.

5. 事件的运算律：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，　$AB=BA$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.

(4) 摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(5) 对减法运算满足$A-B=A\overline{B}$.

(6) 双重否定律$\overline{\overline{A}}=A$.

上述运算规律比较常用，希望读者熟练掌握. 对于较复杂的事件运算，可采用文氏图帮助分析和理解.

二、题型、例题、方法

基本题型Ⅰ：事件和样本空间的概念

【思路探索】　充分利用事件的定义、事件的关系和运算律.

例1　在电炉上安装了4个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度t_0，电炉就断电. 以E表示事件"电炉断电"，而$T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$为4个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件$E$等于(　　). (2000年，研，数学三、四)

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　(B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　　(C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　(D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解: $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$ 表示四个温控器显示温度均不低于 t_0
$\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$ 表示至少三个温控器显示温度均不低于 t_0
$\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$ 表示至少二个温控器显示温度均不低于 t_0
$\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$ 表示至少一个温控器显示温度均不低于 t_0
故应选(C).

例 2 写出下列随机试验 E 的样本空间 Ω,并写出所给事件 A 包含的样本点.
(1) E:某班 50 个学生中男同学的个数,A:男生比女生少;
(2) E:从 1,2,3,4 中选出两个不同的数,A:所选出两个数的和大于 5;
(3) E:连续抛一枚硬币,直到出现正面为止,A:至多只需抛 3 次.

解: (1) 基本事件是{有 i 个男同学}$(i=0,1,\cdots,50)$,样本空间 Ω 由这 51 个基本事件所组成. 事件 A 由其中的 25 个基本事件$(i=0,1,\cdots,24)$所组成;
(2) 样本空间 Ω 由 6 个基本事件组成,
$\Omega=\{12,13,14,23,24,34\}$
其中每个事件由一个两位数来表示,这个两位数的个位与十位表示被选中的数.
事件 A:{选出两数的和大于 5} $=\{24,34\}$,共含两个基本事件;
(3) 设 0 表示出现反面,1 表示出现正面,则样本空间为
$\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),\cdots\}$
其中$(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{个}0},1)$表示基本事件前 n 次均出现反面,第 $n+1$ 次出现正面.
事件 A:{至多只需抛 3 次} $=\{(1),(0,1),(0,0,1)\}$,共含三个基本事件.

【方法点击】 事件是某些基本事件的集合,是样本空间的子集,要准确理解试验的目的,弄清基本事件,以进一步弄清事件.

基本题型 Ⅱ:事件间的关系

例 3 用 A 表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则( ) 不是其互斥事件.
(A)"甲种产品滞销,乙种产品畅销"
(B)"甲、乙两种产品均滞销"
(C)"甲种产品畅销"
(D)"甲种产品滞销或乙种产品畅销"

解: 由互斥事件的定义知:当 A 事件发生时,(A)、(B)、(D) 选项中所给出的事件均不可能发生,而选项(C) 所述事件包含 A 事件,故(C) 所述事件与 A 事件不是互斥事件. 故选(C).

例 4 对于任意两个随机事件 A 与 B,其对立的充要条件为( ).
(A) A 与 B 至少必有一个发生
(B) A 与 B 不同时发生
(C) A 与 B 至少必有一个发生,且 A 与 B 至少必有一个不发生
(D) A 与 B 至少必有一个不发生

解: A 与 B 对立 $\Leftrightarrow A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,故由摩根律有 $\overline{A}\cup\overline{B}=\Omega$ 且 $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$. 由此不难判定(C) 正确.

【方法点击】 两事件互斥只需满足它们不能同时发生，而两事件对立则总是有一个且只有一个事件发生. 对立事件一定不同时发生，故是互斥事件，而互斥事件可能都不发生，故不一定是对立事件.

基本题型 Ⅲ：事件间的运算

例 5 设 A,B,C 表示三个随机事件，试用其表示下列各事件.

(1) A 出现，B、C 都不出现； (2) 三个事件中至少有一个出现；

(3) 不多于一个事件出现； (4) A,B,C 中恰好有两个出现.

解：(1) $A\bar{B}\bar{C}$. (2) $A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}}$.

(3) 方法一：直接法

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\,\bar{B}C$；

方法二：间接法

“不多于一个事件出现” 的对立事件为“三个事件中至少有两个出现”，从而易知“不多于一个事件出现” 可表示为 $\overline{AB+AC+BC}$.

(4) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

例 6 在某校学生中任选一名学生，设 A 表示该学生是男生，B 表示该学生是三年级学生，C 表示该学生是运动员. 则

(1) 说明 $AB\bar{C}$ 的意义；

(2) 在什么条件下恒成立 $ABC=C$；

(3) 在什么条件下 $B\subset C$ 成立；

(4) 在什么条件下 $\bar{A}=B$ 成立.

解：(1) $AB\bar{C}$ 表示 $A,B,\bar{C}$ 三个事件同时发生，故其表示所选学生是三年级男生，但不是运动员；

(2) 若 $ABC=C$，则有 $C\subset A,C\subset B$，故当全校的运动员全部是男生且都是三年级学生时有 $ABC=C$；

(3) 当所有三年级学生都是运动员时，有 $B\subset C$ 成立；

(4) $\bar{A}=B\Leftrightarrow\bar{A}\subset B$ 且 $B\subset\bar{A}$，即要求若被选出的是女生，则该学生一定是三年级学生且若该学生是三年级学生，则其一定是女生，也即要求所有女生都是三年级学生且三年级学生都是女生.

例 7 设 A,B,C 是任意的三个随机事件，试证明：

$$ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC=AB+BC+AC.$$

证明：根据事件并的性质易知，

$$\begin{aligned}&ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC\\&=(ABC+AB\bar{C})+(ABC+A\bar{B}C)+(ABC+\bar{A}BC)\\&=AB+AC+BC.\end{aligned}$$

故得证.

【方法点击】 正确运用随机事件并的性质.

第二节 概率

一、内容简析

【知识结构】

- 随机事件 — 概率
  - 统计定义 — 指出概率客观存在
  - 古典定义 — $P(A)=\dfrac{m}{n}$

【重要知识点和考点分析】

1. 概率的统计定义:在不变的条件下,重复进行n次试验,事件A发生的频率稳定地在某一常数p附近摆动.且一般说来,n越大,摆动幅度越小,则称常数p为事件A的概率,记作$P(A)$.

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的,但这个定义不能用来计算$P(A)$.事实上,人们往往采用一次大量试验的频率或一系列频率的平均值作为$P(A)$的近似值.

2. 古典概型试验:概率论中,将具有下列两个特点的试验称为古典概型试验.

(1) 每次试验只有有限种可能的试验结果;

(2) 每次试验中,各基本事件出现的可能性完全相同.

对于古典概型试验,事件A发生的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件数}}.$$

3. 几何概率

将古典概型中的有限推广到无限,保留等可能性,就得到几何概型,设区域G的长度(面积或体积)为D,质点等可能地落在G中的任何一点,g是G的一部分,其长度(面积或体积)为d,则定义事件A"质点落在g内"的概率为$P(A)=\dfrac{d}{D}$.

4. 计算古典概型概率是本节的重点内容,也是考研的重点内容之一.计算古典概型概率$P(A)$的关键是找出A中的基本事件数,在计算过程中常用到排列组合知识.

二、题型、例题、方法

基本题型 Ⅰ:整除、非整除问题

例1 从所有3位数(100~999)中随机取一个数,求它能被5或8整除的概率.

解:设$A=$"从所有3位数中随机取一个数,它能被5或8整除".在$100-999$中,能被5整除的数共有180个,能被8整除的数共有112个,能同时被5和8整除的数共有22个,所以在$100-999$中能被5或8整除的数共有$180+112-22=240$个.所以$P(A)=\dfrac{A\text{ 中基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件数}}=\dfrac{240}{900}=0.27$.

基本题型 Ⅱ:分房问题

例 2 设有 n 个房间,分给 n 个人,每个人都以 $\frac{1}{n}$ 的概率进入每一房间,而且每间房里的人数没有限制,试求不出现空房的概率.

解: 由题意 n 个房间分给 n 个人,人数没有限制,也就是说每个房间可以重复分配给不同的人,所以可能的排列种数为 n^n. 不出现空房,即每房间进入一人,这相当于 n 个房间不重复地分给 n 个排列好的人,也就是将这 n 个房间进行全排列,可能的排列种数为 $n!$. 从而所求的概率为 $p=\frac{n!}{n^n}$.

基本题型 Ⅲ:配对问题

例 3 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只,问其中恰有一双配对的概率是多少?

解: 很明显,基本事件总数为 C_{12}^4. 有利事件中的基本事件数是,先从 6 双鞋子中取出一双,再从剩余的鞋子中任取两双,并从其每双中各取出一只,即 $C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1$. 从而所求的概率为

$$p=\frac{C_6^1C_5^2C_2^1C_2^1}{C_{12}^4}=\frac{16}{33}.$$

例 4 从 n 双不同的手套中任取 $2r(2r<n)$ 只,求下列事件发生的概率:

(1) 没有成双的手套;　　(2) 只有一双手套;

(3) 恰有两双手套;　　(4) 有 r 双手套.

解: 试验的基本事件总数为 C_{2n}^{2r}.

(1) 有利事件中的基本事件数是,先从 n 双中取 $2r$ 双,再从每双中取出一只,即 $C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}$. 则所求的概率为

$$p=\frac{C_n^{2r}(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}.$$

> 此类问题的关键是如何确定有利事件中的基本事件数.

(2) 有利事件中的基本事件数是,先从 n 双中取 1 双,再从剩下的 $n-1$ 双中取 $2r-2$ 双,并从每双中取出一只,即 $C_n^1C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}$,则所求概率为

$$p=\frac{C_n^1C_{n-1}^{2r-2}(C_2^1)^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(3) 有利事件中的基本事件数为,先从 n 双中任取 2 双,再从剩余的 $n-2$ 双中取 $2r-4$ 双,并从每双中取出一只,即 $C_n^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}$,则所求概率为

$$p=\frac{C_n^2C_{n-2}^{2r-4}(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}.$$

(4) 有利事件中的基本事件数为,先从 n 双中任取 r 双,再将每双中的两只全部取出,即 $C_n^r(C_2^2)^r$. 故所求概率为

$$p=\frac{C_n^r(C_2^2)^r}{C_{2n}^{2r}}.$$

基本题型 Ⅳ:摸球问题

例 5 假设某袋中共有 9 个球,4 个白球,5 个黑球,现从中任取两个,试求下列

事件发生的概率.

(1) 两个均为白球;

(2) 两个球中一个是白球,另一个是黑球;

(3) 至少有一个黑球.

解:(1) 方法一:设随机试验与选球的先后次序无关,易知基本事件总数为 C_9^2,且每事件等可能地发生,有利于取两个白球的事件 A 的基本事件数为 C_4^2,故

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_9^2}=\frac{1}{6};$$

方法二:设随机试验与选球的先后次序有关,则基本事件总数为 P_9^2,且每事件等可能地发生,有利于取两个白球的事件 A 的基本事件数为 P_4^2,所以

$$P(A)=\frac{P_4^2}{P_9^2}=\frac{1}{6};$$

(2) 方法一:设随机试验与选球的先后次序无关,基本事件总数为 C_9^2,有利于取一白一黑事件 B 的基本事件个数为 $C_4^1C_5^1$,所以

$$P(B)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\frac{5}{9};$$

方法二:设随机试验与选球的先后次序有关,基本事件总数为 P_9^2,"两球中一白一黑"这一事件等价于{"先取到白球,后取到黑球";"先取到黑球,后取到白球"},则有利于取一白一黑事件 B 的基本事件个数为 $P_4^1P_5^1+P_5^1P_4^1=2P_4^1P_5^1$,所以

$$P(B)=\frac{2P_4^1P_5^1}{P_9^2}=\frac{5}{9}.$$

(3) 令事件 C 表示"至少有一个黑球",由对立事件的定义知 $\overline{C}=A$,故对 C 有利的基本事件数为 $C_9^2-C_4^2$,故

$$P(C)=\frac{C_9^2-C_4^2}{C_9^2}=\frac{5}{6}.$$

例 6　设一个袋中装有 a 个黑球,b 个白球,现将球随机地一个个摸出,问第 k 次摸出黑球的概率是多少($1\leqslant k\leqslant a+b$)?

解:令 A 表示事件"第 k 次摸到黑球".

将这 $a+b$ 个球编号,并将球依摸出的先后次序排队,易知基本事件总数为 $(a+b)!$,事件 A 等价于在第 k 个位置上放一个黑球,在其余 $a+b-1$ 个位置上放余下的 $(a+b-1)$ 个球,则 A 包含的基本事件数为 $a(a+b-1)!$. 那么所求概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

基本题型 V:抽签问题

例 7　某普通话考试中有 7 份试卷,其中有 3 份较简单,有 7 位同学抽签决定自己的试卷(每份试卷对应一根签),甲同学先抽,乙同学随后抽. 请问甲、乙两同学分别抽到较简单试卷的概率是否相等?并证明你的结论.

解:利用古典概型解决此问题.

分别用 A、B 表示事件"甲先抽到简单试卷"和"乙第二个抽到简单试卷". 把 7 个签所有可能的排列作为基本事件总数 7!. 事件 A 等价于第一个位置排列简单试卷,其余六个位置随意排列试卷,所以有 $C_3^1 6!$,即

$$P(A)=\frac{C_3^1 6!}{7!}=\frac{3}{7};$$

事件 B 等价于第二个位置排列简单试卷,其余六个位置随意排列试卷,所以有 $C_3^1 6!$,即

$$P(B)=\frac{C_3^1 6!}{7!}=\frac{3}{7}.$$

从而 A、B 两事件发生的概率相等.

例 8　某城有 N 部卡车,车牌号从 1 到 N,有一个外地人到该城去,把遇到的 n 部车子的牌号抄下(可能重复抄到某些车牌号),问抄到的最大号码正好为 k 的概率($1\leqslant k\leqslant N$).

解:这种抄法可以看作是对 N 根签进行 n 次有放回的抽签,所有可能的抽法共有 N^n 种,这就是基本事件总数. 由于每部卡车被遇到的机会可以认为相同,因此这是一个古典概型的计算问题. 设 A 表示事件"抄到的最大号码正好为 k",先考虑最大车牌号不大于 k 的取法,这样取法共有 k^n 种,再考虑最大车牌号不大于 $k-1$ 的取法,其数目有 $(k-1)^n$ 种,因此 A 包含的基本事件总数 $k^n-(k-1)^n$,故所求概率为 $P(A)=\dfrac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$.

基本题型 Ⅵ:几何概率

例 9　甲、乙两人约定 6～7 时在某处会面,并约定先到者应等候另一个人 15 分钟,过时即可离去. 求两人能会面的概率.

解:以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间,则两人能会面的充分条件为 $|x-y|\leqslant 15$

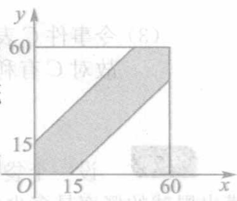


图 1-1

如图 1-1 建立坐标系,则 (x,y) 的所有可能结果是边长为 60 的正方形,而可能的会面时间是图中阴影部分所示. 这是一个几何概率问题,由等可能性,

$$p=d/D=\frac{60^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2}=\frac{7}{16}$$

例 10　在一张打上方格的纸上投一枚直径为 1 的硬币,方格边长要多少才能使硬币与线不相交的概率小于 1%.

解:设方格边长为 a,当硬币圆心落于图 1-2 中阴影部分才与边界不相交(图中只取一个方格),由几何概率得

$P\{$硬币与线不相交$\}$