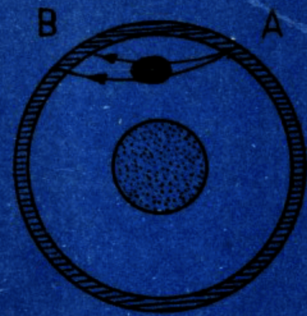

材料的力学反问题引论

[法]H. D. Bui 著
高玉臣等译

哈尔滨工程大学出版社

材料的力学反问题引论

〔法〕H.D.Bui 著

高玉臣　李玉琴
何晓华　刘国利　译

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了材料的力学反问题的研究方法。它首先侧重于物理概念，其次才是数学的严格性，而且力图用最小的篇幅向读者提供尽量多的数学工具。第1—4章属于固体力学的基本内容：弹性和塑性、断裂和损伤、守恒定律、断裂动力学。第5—10章讲述反问题（识别问题）的各种方法和目标：振动法、弹性波及声波衍射法、光－热法、射线层析法、微重力法。第11和第12章专门讲述了材料常数、接触应力及残余应力的识别问题。最后，书中给出三个附录，讲述病态问题的正则化方法、传递矩阵及最优控制理论。

本书适用于结构工程、材料力学、地质勘探、医学诊断等领域的研究人员、教师、研究生及大学本科高年级学生参考。

原著：〔法〕H. D. Bui
"Introduction aux problems
inverses en mecanique des materiaux",
Direction des Etudes et Recherches d' Electricite
de France/Editions EYROLLES, Paris, ©1993.

材料的力学反问题引论
〔法〕H. D. Bui 著
高玉臣　李玉琴　何晓华　刘国利 译
责任编辑　李玉琴
*
哈尔滨工程大学出版社出版发行
新　华　书　店　总　经　销
东北农业大学印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 8　字数 198 千字
1995年8月第1版　1995年8月第1次印刷
印数：1—2000 册
ISBN 7－81007－594－2
O·40　定价：9.80 元

译者序

“反问题”一词的英文为“Inverse Problem”，亦称为“逆问题”或“识别问题”。传统的力学问题是当材料的本构属性为已知时，在给定的边界条件和初始条件下，利用物理(动力学)及几何(协调)方程的求解来预报材料或结构对外载的反应特性。“力学反问题”则是将传统力学已知条件和待求量交换了地位。例如结构中含有夹杂，其形状和弹性模量是未知的，因而本构关系和边界条件(形状)中出现了未知因素。但是这一夹杂结构对各种外载的反应特性却变成已知的了，即可通过试验测得。由测得的反应信息来识别材料内部的几何及物理属性，这便是力学反问题。反问题的研究在结构、材料、地质、医学等领域均有重要应用。但由于其本身的固有困难，至今仍处于发展阶段。

法国力学家 H.D.Bui 为人忠耿，治学严谨，造诣殊深，但慎于著述。《材料的力学反问题引论》这一书，虽篇幅不长，但内容全面，是当前国际上该领域中的第一部著作。1993 年法文版问世，随即被译成英文和日文出版，本人在访问法国期间有幸先睹，为向国内学者介绍这些新的学术思想，现由哈尔滨工程大学几位同志按英文版译成中文。李玉琴译作者序、符号、目录及 1—4 章；何晓华译5—8章；刘国利译 9—12 章及附录。遵原作者之嘱，本人统校全书。因本书为学术著作，有些地方宁肯文字生硬些，而使含意确切些。限于译者及审校者的水平和时间，错误疏漏之处恐仍存在，敬请读者不吝指出。

高玉臣

1994 年 5 月

作者序

在物理学、力学和地质学等许多领域中都会遇到反问题。反问题的大部分应用是在石油资源的寻找、医学的断面造影、雷达技术以及裂缝的超声检查等领域。这些课题包含着许多应用数学的进展。看来，数学在这些领域中的发展对于固体力学中的反问题也是有用的。固体力学中有许多课题可以看作是反问题，如裂缝奇异性的识别、材料常数的识别、固体中不同能量的分离、残余应力的确定等。

本书的目的是从应用数学文献中抽出那些对材料的力学有用的工具。作为反问题的导论，我们首先强调的是物理及实验的观点，之后才是数学方面的考虑。我们将展示如何从理论上确定和研究一个看作黑匣子的力学系统，所用的信息则通过在其表面进行力学激发或利用物理现象得到(例如热场，重力等)。适用于不同情况的理论方法将在以后各章节中逐步给出。我们假定读者具有一定的连续力学、固体力学和断裂力学的基础。我们试图在本书中以最小的篇幅，向读者提供尽可能多的数学工具。因此，对多数定理的证明只能是给个轮廓而不能进入细节。补充材料可以从每章后面列出的文献中找到。

本书包括两个主要部分。

第一部分为1—4章，主要叙述材料的力学知识：弹性和塑性，断裂和损伤，断裂力学所用到的弹性与热弹性的守恒律，还有脆性固体的动态断裂。多数结果是新的而且主要在法文文献上发表过。

第二部分为5—12章，主要是研究固体结构和材料的力学反问题：振动反问题包括确定屈曲载荷和研究形状微小改动对特征

频率的影响(第5章);裂纹及缺陷的无损检验所用的弹性波和声波的绕射(第6、7章);固体中非均匀性的光-热检查(第8章);断面造影(第9章);地球物理和地质技术中的孔洞探测所用的微重力(第10章);接触应力、材料常数、弹性律的识别(第11章);用最优控制理论分析塑性残余应力(第12章)。附加的数学材料是为了克服反问题的病态特征,它包含三个附录:Tykhonov正则化方法(附录A);弹性和拉普拉斯方程的柯西问题及传递矩阵(附录B);最优控制理论(附录C)。

作者感谢哈尔滨工程大学的高玉臣教授,他为本书的中文版问世作了努力。在他研究休假访问巴黎期间,我和他作了许多有成果的讨论,特别是在非线性断裂力学方面。这本跨学科(材料的力学与数学反问题)著作的筹划得到高玉臣教授的大力支持。最后,我感谢哈尔滨工程大学出版社李玉琴副编审对本书的编辑加工。

作者简介

H.D.Bui 生于 1937 年，毕业于巴黎高等工学院(Paris Ecole Polytechnique)和巴黎大学科学系(Dr-és-Sciences of Paris University)。他是巴黎高等工学院固体力学研究所所长、法国电力部研究与发展署的科学顾问。作者的研究领域包括：塑性、断裂力学、边界积分方程方法和固体力学中的反问题。

他还任以下杂志的编委：《国际固体和结构》(美国斯坦福大学)，《计算力学》(东京)，《边界元工程分析》(南安普顿)，《国际工程反问题》杂志(滑铁卢大学和帕克大学)，《数学及其应用选集》(巴黎)，《科学院通报》(巴黎)。

作者于 1987 年当选为巴黎科学院院士。

符号说明

爱因斯坦求和约定在本书中从头至尾使用。

e^1, e^2, e^3	正交基向量
x	R^n 中的向量,坐标为 $x_i(i = 1, \cdots, n)$
t	时间
v 或 $\dot{u}$	速度
X	Lagrangian 坐标,分量为 X_i
$\partial k, \partial t, f_{,k}$	偏导数 $\partial/\partial x_k, \partial/\partial t, \partial f/\partial x_k$
$x \cdot y$	向量 x 和 y 的标量积,x_iy_i
R	左旋度(对二阶张量)
R^*	右旋度(对二阶张量)
τ	转置
$:=$	定义符
$\mathbf{E}$	(E_{ij})变形张量 Green-Lagrange
$\mathbf{A}$	(A_{ij})变形张量 Almansi-Euler
u	位移向量(u_i)
ε	(ϵ_{ij})应变张量(小扰动)
σ	(σ_{ij})Cauchy 应力张量
T	$T = \sigma \cdot n$ 应力向量$(T_i = \sigma_{ij}n_j)$
n	单位法向量
Θ	第一 Piola-Kirchhoff 应力张量
	(或 Boussinesq 应力张量)
Π	第二 Piola-Kirchhiff 应力张量
Π^0	预应力
$W(\varepsilon)$	变形能密度
$\mathbf{A}$	弹性模量张量
$\mathbf{A} \cdot \varepsilon$	$(\mathbf{A} \cdot \varepsilon)_{ij} = A_{ijhk}\varepsilon_{hk}$
λ, μ	(lame)系数
$\rho, \rho u := p$	密度,矩
E, γ	杨氏模量,波桑比
$\lambda(t), \mu(t)$	拉氏乘子

$\lambda(x)$	塑性因子
D	-div
D^*	$1/2(\mathrm{grad}+\mathrm{grad}^T)$, $\mathrm{grad}\equiv\nabla$
$\mathrm{div}\Gamma$, $\mathrm{grad}\Gamma$	Γ 的散度和梯度
D	内部耗散
α	热涨系数
α	内变量
ε^p	塑性变量
K_α	$\alpha=$ Ⅰ Ⅱ Ⅲ应力强度因子(静的)
K_α^e 或 K_α^d	动态应力强度因子
K_α^*	裂纹张开强度因子
G	能量释放率
θ	温度
d	损伤变量
J	J 积分
$J_{\mathrm{I}}, J_{\mathrm{II}}$	Ⅰ,Ⅱ型裂纹的 J 积分分量
T	热弹性中的路径积分
G^{θ}	G 的区域积分
A	T 的区域积分
$H(u,u)$, $H(u,v)$	动态路径积分
$H(u,p)$	哈密尔顿函数
$\mathscr{H}(x,\lambda,t;v)$	最优控制理论中的哈密尔顿函数
$v(t)$	控制向量
k	传播向量
$k(x)$	热传导系数
$d(x,y)$	欧几里德模 $\Vert x-y\Vert$
$\mathrm{U}(x,y)$	弹性论中的基本张量(Green) $U_{ik}=\dfrac{1}{16\pi(1-\nu)d(x,y)}\{(3-4\nu)\delta_{ik}+\partial x_i\partial x_k d(x,y)\}$
ω	频率
$\bar{\omega}$	$1/2(\mathrm{grad}-\mathrm{grad}^T)u$

目　　录

1 弹性和塑性

1.1 固体力学基础

本章对固体力学的基础,即以弹性和塑性理论为基础作一个简短的概述,进一步的细节,读者可参考连续介质力学的教科书(Eringen, 1967, Germain, 1962, Mandel, 1966, Marsden 和 Hughes, 1968, Salencon, 1988)。

1.1.1 变形与连续性

1.1.1.1 几何变换

固体从其原始自然状态的变形是由每个物质点的位移表征的。在 $t=0$ 时刻,物质点的位置矢量为 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, X_3)$,而在时刻 t 位置矢量变为 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$,其中 X_i 及 x_i 分别为向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 在以 $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3$ 为基向量的标架中的分量。为了保证物体的连续性,我们假定 $(\mathbf{X}, t)\to\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$ 和 $(\boldsymbol{x}, t)\to\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$ 都是一对一的映射(见图 1-1),而且在其有关区域(Ω_0 或 Ω)$\times[0, t]$ 内对空间时间变量是连续可微分的。

固体的变形可由位移场表征

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \tag{1.1}$$

它借助于拉格朗日坐标 X_i 及欧拉坐标 x_i 给出。对变形至少有两种可能的描述,这取决于位移场的空间坐标的选取。

令 $\mathbf{F}\equiv\partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X}$ 表示位移梯度张量

$$F_{ij} = \partial x_i/\partial X_j \tag{1.2}$$

以 $\mathbf{G}=\mathbf{F}^{-1}\equiv\partial\boldsymbol{X}/\partial\boldsymbol{x}$ 表其逆。

由初始状态到当前状态的运动将导致物质线素的长度改变。

确切地讲，长度的平方的变化应是 d$\mathbf{X}$ 或 d$\boldsymbol{x}$ 的二次型。

$$ds^2 - ds_0^2 = E_{ij}dX_idX_j = A_{ij}dx_idx_j \tag{1.3}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) \tag{1.4}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij}\right) \tag{1.5}$$

其中 $\mathbf{E} = (\mathbf{F}^{\tau}\mathbf{F} - \mathbf{I})$ 和 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\tau}\mathbf{G})$ 分别为拉格朗日和欧拉应变张量。欧拉应变张量的分量可由位移分量的梯度给出

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_h}{\partial x_i}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right) \tag{1.6}$$

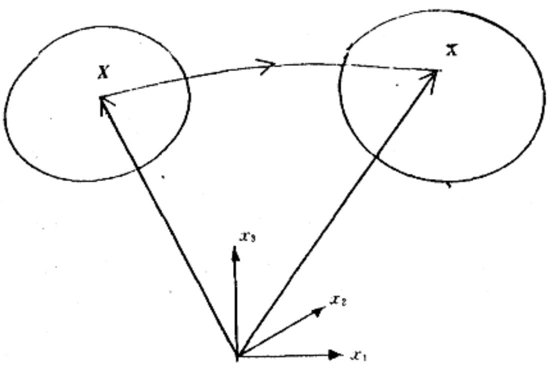

图 1-1　几何变换 $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{x}$

物体的连续性，特别是质量守恒条件，由下式表示

$$\rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t))J = \rho_0(\boldsymbol{X}) \tag{1.7}$$

其中 $J = \det\mathbf{F}$ 为雅柯比行列式，ρ 为密度，ρ_0 为初始密度。

1.1.1.2　小扰动

如果位移与物体的特征长度比起来是个小量，而且位移梯度 $\partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{x}$ 或 $\partial \boldsymbol{u}/\partial \mathbf{X}$ 是小量，那么我们可以近似地取 $\mathbf{X} \approx \boldsymbol{x}$，$\partial/\partial \mathbf{X} \approx \partial/\partial \boldsymbol{x}$，因而

$$E_{ik} \approx A_{ik} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) := \epsilon_{ik} \tag{1.8}$$

这时应变张量 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{A}$ 与线性化的应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 等同

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^{\tau})\boldsymbol{u} \tag{1.9}$$

这样，质量守恒方程简化为

$$\rho(\boldsymbol{x})(1 + \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho_0(\boldsymbol{x}) \tag{1.10}$$

如果存在一个定义在区域 Ω 内的位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 使得对称张量场 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 满足(1.8)式，则称应变场 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 是协调的。

1.1.1.3　协调条件

可以用经典方法证明，如果区域 Ω 是单连通的，为使应变场协调，有 6 个充分条件，称之为协调条件。在数学上，协调方程可写为一个紧凑形式，如果引进微分算子 R 和 R^*，它们的定义如下：

令 $\mathbf{T}(\boldsymbol{x}) = T_{ij}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$ 代表任意一个二阶张量场，让 $\partial_k \equiv \partial/\partial x_k$，定义

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{T} \equiv R \cdot \mathbf{T} \equiv -(\partial_k \mathbf{T}) \wedge \boldsymbol{e}^k := -\partial_k T_{ij}\boldsymbol{e}^i \otimes (\boldsymbol{e}^j \wedge \boldsymbol{e}^k) \tag{1.11}$$

$$\mathrm{Rot}^*\,\mathbf{T} \equiv R^*\mathbf{T} \equiv \boldsymbol{e}^k \wedge \partial_k \mathbf{T} := \partial_k T_{ij}(\boldsymbol{e}^k \wedge \boldsymbol{e}^i) \otimes \boldsymbol{e}^j \tag{1.12}$$

算子 Rot 或 R 称为左旋度，其共轭算子 R^* 称为右旋度，算子 RR^* 为自共轭的。6 个协调条件正好是以下 6 个方程

$$\mathrm{RR}^*\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{1.13}$$

紧凑形式的协调条件(1.13)式对研究弹性理论的数学结构是很有用的。

1.1.2　应力

1.1.2.1 定义

经典教科书中所给出的应力概念将不在此重复，这里只提供一些重要结果和引进符号。应力有许多种定义，这取决于空间坐标的选取。考虑任意一个面元 ds，其单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，设其承受接触力为 $\boldsymbol{T}ds$，这里 $\boldsymbol{T}$ 为表面的力向量。$\boldsymbol{T}ds$ 有以下多种表示：

$$\boldsymbol{T}ds = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})ds \quad (\boldsymbol{\sigma}\text{:对称柯西应力张量}) \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{T}ds = (\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{n}_0)ds_0 \quad (\boldsymbol{\Theta}\text{:非对称张量}) \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{T}ds = F(\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{n}_0)ds_0 \quad (\boldsymbol{\Pi}\text{:对称张量}) \tag{1.16}$$

其中 ds_0（$\boldsymbol{n}_0$ 为其法向量）上的切向量 $d\boldsymbol{x}_0$ 和 ds（法向量为 $\boldsymbol{n}$）上的切向量 $d\boldsymbol{x} = Fd\boldsymbol{x}_0$ 由映射 F 相联系。因而，$\boldsymbol{\Theta} = F\boldsymbol{\Pi}$, $J\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Theta}F^{\tau}$。张量 $\boldsymbol{\Theta}$ 称为第一 Piola－Kirchhoff 应力张量；而 $\boldsymbol{\Pi}$ 称为第二 Piola－Kirchhoff 应力张量。（法文文献中称 $\boldsymbol{\Theta}$ 为 Boussinesq 应力张量，而 $\boldsymbol{\Pi}$ 称为 Kirchhoff 应力张量）。

1.1.2.2 矩的守恒定律

矩的守恒律可以用拉格朗日坐标 X_i 表示为

$$\frac{\partial \Theta_{jk}}{\partial X_k} + \rho_0(X)\left(g_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\right) = 0 \qquad \text{在 } \Omega_0 \text{ 内} \tag{1.17}$$

也可以用欧拉坐标 x_i 表示为

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial X_k} + \rho(X)\left(g_j - \frac{\partial}{\partial t}v_j - v_h \frac{\partial v_j}{\partial x_h}\right) = 0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 内} \tag{1.18}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为物质点的速度。在(1.17)式中，$\boldsymbol{g}$ 是在原始构形中 M_0 点作用于单位质量上的力，而(1.18)式中的 $\boldsymbol{g}$ 则是作用在当前构形中单位质量上的力（想象的点 M）。

在小变形假定成立的情况下，动力学方程可写为

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \rho\left(g_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{1.19}$$