大學叢書

初級方程式論

狄克遜 著
黃新鐸 譯

商務印書館發行

大學叢書

初級方程式論

狄克遜著
黃新鐸譯

商務印書館發行

中華民國二十四年七月初版

(53208·2精)

大學叢書(教本) 初級方程式論一冊

First Course in the Theory of Equations

每冊定價大洋壹元捌角

外埠酌加運費匯費

原著者 L. E. Dickson

譯述者 黃新鐸

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者王養吾)

✤C二八三八

周

原　序

方程式論者不僅爲繼續研究各門算學及其應用所需要,且繼幾何代數解析幾何而予以闡明也.更有進者,本門對於多項式簡要之情款其各種微積分之基本觀念重新演述極爲週詳.故方程式論者無論繼微積分之後而學習抑同時學習皆予微積分以有用之補充也.

本書爲適合學者對於已習或將習各門算學之需要起見,關於編輯幾經考慮審愼出之.此書與拙著初等方程式論(Elementary Theory of Equations)一書取材不同,互有增減,蓋以本書係爲初級學者而作且可與微積分一門同時教授也.書內所用證法皆簡明而週詳.至所輯習題則簡易而繁多,遍及各類,且其中復含有多數之實用問題.

本書對於各項初等論題予以明白之指示.例如,一學幾何之聰穎生徒其曾習平分一角之法者,必將問以凡角是否皆可以尺及規三等分之,如其不能則何爲而不能.其於知做3, 4, 5, 6, 8及10邊之正邊形後則必以7及9邊之正邊形之闕如爲問.使教師知悉此項事實且知此類問題之簡單討論,如第三章所述者,自可從容處之矣.至關於代數問題其他諸章曾予以所需要之指示.特別如第五章所述圖形理論其

科學的及實用的態度則非在代數及解析幾何內所可能者也.

編內所述計算一方程式實根之方法,乃最省力而所得小數皆正確無疑.法先以荷諾方法求連續變換的方程式,至變換的次數則爲所擬求之根其有効數字位數之半.而於變得之最後一方程式應用,從略去之二次及高次項所算出之修改數(Correction),於常數項將其化爲一次方程式,再用省略除法演算則所擬求之根得矣.此法蓋計算便捷而結果正確二者兼備之法也.

牛頓方法,係本圖形的及數目的立場申述,有可應用於非代數的方程式之優點;該法對於各種非代數的方程式之應用編中演述至詳.

至若定或圈定一方程式之實根玆可以合法做出之圖形或笛卡兒,斯特姆,及布丹諸定理定之.而該定理等在通常則敍述證明兩不正確也.

行列式一章與其前諸章並無關連.章內所述之一般的一次方程組之理論亦本方陣之立場而爲論列也.

本書初稿經敏內少達大學卜色教授,華盛頓大學羅艾渥教授,伊利諾大學肯蒲諾教授支加哥大學楊教授閱讀後予以有價値之更正,著者深爲感荷.再稿復經西北大學克蒂斯教授詳加批閱予以改善.著者對威斯康新大學朱來斯登教授並致謝意,以其對於證法曾予以各種有用之更正也.

支加哥,一九二一.

目次

第一章

複數

第二章

關於方程式根之基礎定理

第三章

用尺規做圖法

第四章

三次及四次方程式之解法;

該方程式等之判別式

第五章

一方程式之圖形

第六章

圈定實方程式之實根

第七章

數目方程式之解法

第八章

行列式;一次方程組

第九章

對稱函數

第十章

消元法，消元所得式及判別式

初級方程式論

第一章

複數

1. 平方根. 設 p 爲正實數,記號 $\sqrt{p}$ 乃用以表示 p 之平方根.該平方根極易以對數法計算之.

茲將負數之平方根以成立 $i^2=-1$ 關係之記號 i 表出而以 $+i$ 及 $-i$ 表示 $x^2=-1$ 之根.至 $x^2=-4$ 之根則書爲以代 $\pm\sqrt{-4}$.於一般情形,設 p 爲正數,則將 $x^2=-p$ 之根書 $\pm\sqrt{p}\,i$ 以代 $\pm\sqrt{-p}$.

如是則各根之平方爲 $(\sqrt{p})^2 i^2=-p$.如於 $x^2=-p$ 之根用通常所習記法 $\pm\sqrt{-p}$,則易使吾人於求其各根之平方時以根號內兩值相乘謬誤之結果:

$$\sqrt{-p}\sqrt{-p}=\sqrt{p^2}=+p.$$

爲免除斯種錯誤計茲用 $\sqrt{p}\,i$ 而不用 $\sqrt{-p}$.

2. 複數. 設 a 及 b 爲任意二實數而 $i^2=-1$ 則 $a+bi$ 名複數[1]而 $a-bi$ 爲其配數.設 $a=b=0$ 則謂各數爲零.謂二複

---

[1] 複數蓋集成雙實數而成.欲詳本此立場之論述以及以矢量爲之論述,參看著者 L. E. Dickson 之 "Elementary Theory of Equations," 第2 第18頁.

$a+bi$ 及 $c+di$ 相等者則設且必設 $a=c$ 及 $b=d$. 就特別情形
之,如 $a+bi=0$, 則設且必設 $a=b=0$. 設 $b\neq 0$, 則謂 $a+bi$ 爲虛
於特別情形, bi 名爲純虛數.

複數加法之義定爲

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

與加法相反之運算名爲減法,即於

$$(c+di)+z=a+bi$$

求複數 z 之法也. z 之記法及值爲

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

乘法之義定爲

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i,$$

從而知其構成之方法與通常代數方法無異,惟用 $i^2=-1$
關係加以化簡耳. 例如,

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

除法之義則定爲與乘法相反之運算,亦即於 $(a+bi)q=e$
求複數 q 之法也. 以 $a-bi$ 乘各節則得 q 之記法及值爲

$$\frac{e+fi}{a+bi}=\frac{(e+fi)(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{ae+bf}{a^2+b^2}+\frac{af-be}{a^2+b^2}i.$$

因 $a^2+b^2=0$ 當 a 及 b 爲實數時必須 $a=b=0$, 從可斷言
法除用零除外所得之商爲可能的單一的.

習　題

以複數表出:

1. [illegible] 2. [illegible] 3. [illegible]

5. $8+2\sqrt{3}$.　　6. $\dfrac{3+\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-1}}$.　　7. $\dfrac{3+5i}{2-3i}$.　　8. $\dfrac{a+bi}{a-bi}$.

9. 證明二相配複數之和爲實數,而其差爲純虛數.

10. 證明二複數和之配數等於其配數之和.如將內中和字易爲差字結果亦能成立乎?

11. 證明二複數積(或商)之配數等於其配數之積(或商).

12. 證明設二複數之積爲零則二數中至少有一數爲零.

13. 求適合次式之二實數 x, y:

$$(x+yi)^2=-7+24i.$$

仿第13題,以複數表示次數之平方根:

14. $-11+60i$.　　15. $5-12i$.　　16. $4cd+(2c^2-2d^2)i$.

3. 一之立方根. 任意複數 x 其立方等於一者名爲一之立方根.因

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

故 $x^3=1$ 之根爲 1 及適合

$$x^2+x+1=0,\qquad (x+\tfrac{1}{2})^2=-\tfrac{3}{4},\qquad x+\tfrac{1}{2}=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

之二數.是以一之立方根有三,卽

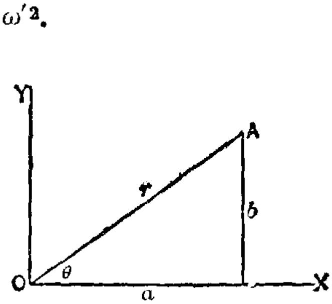
$$1,\qquad \omega=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i,\qquad \omega'=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

按 ω 之由來,則得重要之關係式

$$\omega^2+\omega+1=0,\quad \omega^3=1.$$

因 $\omega\omega'=1$ 及 $\omega^3=1$, 故得 $\omega'=\omega^2$, $\omega=\omega'^2$.

4. 複數之幾何圖示法. 用直角坐標軸 OX 及 OY, 茲以坐標爲 a, b 之點 A 示 $a+bi$ (第1圖).



第 1 圖

正數 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 示 OA 之長名爲 $a+bi$ 之模數(或絕對值). 角 $\theta=XOA$,

即從 OX 按反表針之方向量至 OA 之角度,名爲 $a+bi$ 之

如是則 $\cos\theta=a/r$, $\sin\theta=b/r$, 而

$$(1)\qquad a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

第二節名爲 $a+bi$ 之三角式.

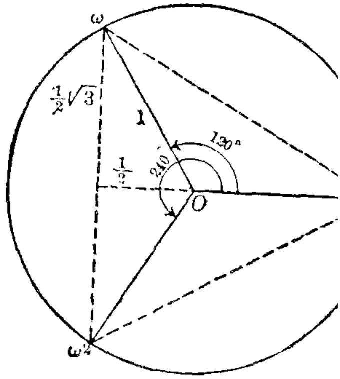
至幅角 θ 則可以 $\theta\pm360^\circ$, $\theta\pm720^\circ$, 等等,之任一角代之

二複數相等設且必設其模數相等及其中一數之等於他數之幅角.

例如,一之立方根爲 1 及

$$\omega=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i$$
$$=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ,$$
$$\omega^2=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,i$$
$$=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ,$$

而可以用取 0 爲圓心及以一爲半徑之圓其內接等邊三角形,如圖上記爲 $1,\omega,\omega^2$ 之角頂示之(第 2 圖). ω 及 ω^2 之幅角各爲 120° 及 240°, 而其模數各爲 1.



第 2 圖

-3 之模數爲 3 而其幅角爲 180° 或 180° 加減 360° 與任何正整數之積.

5. 複數之積. 按乘法及三角法,

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)][r'(\cos\alpha+i\sin\alpha)]$$
$$=rr'[(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)+i(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)]$$
$$=rr'[\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha)].$$

是以二複數乘積之模數等於其模數之積,而其積之幅於其幅角之和.

例如，$\omega=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$ 之平方其模數爲 1 而其幅角爲 $120^\circ+120^\circ$
$\omega^2=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$. 再 ω 及 ω^2 之積其模數爲 1 及其幅角爲 $120^\circ+240^\circ$ 亦
爲 $\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ$, 而可化爲 1. 此則與已知之結果 $\omega^3=1$ 適相契合也.

在前式內取 $r=r'=1$, 則得一有用公式

$$(2)\qquad (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha).$$

6. 複數之商. 於 (2) 內取 $\alpha=\beta-\theta$ 而將所得之方程式以
$\cos\theta+i\sin\theta$ 除之,則得

$$\frac{\cos\beta+i\sin\beta}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos(\beta-\theta)+i\sin(\beta-\theta).$$

是以 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 除 $R(\cos\beta+i\sin\beta)$ 所得之商其幅角等於兩幅角之差 $\beta-\theta$ 而其模數等於原模數之商 R/r.

於 $\beta=0$ 時得一有用公式

$$\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

7. 笛莫佛定理. 設 n 爲任何正整數,

$$(3)\qquad (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

此式當 $n=1$ 時顯然成立,而當 $n=2$ 時從公式 (2) 使 $\alpha=$
即得. 依算學歸納法爲之,假定於 n 爲 $1, 2, \cdots, m$ 時皆成立.
吾人能證明於 n 爲其後之値 $m+1$ 時此式亦可成立. 蓋按
設知

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$$

以 $\cos\theta+i\sin\theta$ 乘各節. 而以從 (2) 式使 $\alpha=m\theta$ 所得之値代
右節. 如是得

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{m+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos m\theta+i\sin m\theta)\\&=\cos(\theta+m\theta)+i\sin(\theta+m\theta),\end{aligned}$$