

大學叢書

初級方程式論

狄克遜著
黃新鐸譯

商務印書館發行

中華民國二十四年七月初版

(53208.2續)

大學叢書
(教本) 初級方程式論一冊

First Course in the Theory of Equations

每冊定價大洋壹元捌角

外埠酌加運費匯費

原著者 L. E. Dickson

譯述者 黃新鐸

發行人 王雲五

印刷所 商務印書館

發行所 商務印書館

版權所
翻印必究

★ C 二八三八

周

(本書校對者王養吾)

原 序

方程式論者不僅爲繼續研究各門算學及其應用所需要，且繼幾何代數解析幾何而予以闡明也。更有進者，本門對於多項式簡要之情款其各種微積分之基本觀念重新演述極爲週詳。故方程式論者無論繼微積分之後而學習抑同時學習皆予微積分以有用之補充也。

本書爲適合學者對於已習或將習各門算學之需要起見，關於編輯幾經考慮審慎出之。此書與拙著初等方程式論 (Elementary Theory of Equations) 一書取材不同，互有增減，蓋以本書係爲初級學者而作且可與微積分一門同時教授也。書內所用證法皆簡明而週詳，至所輯習題則簡易而繁多，遍及各類，且其中復含有多數之實用問題。

本書對於各項初等論題予以明白之指示。例如，一學幾何之聰穎生徒其曾習平分一角之法者，必將問以凡角是否皆可以尺及規三等分之，如其不能則何爲而不能。其於知做 3, 4, 5, 6, 8 及 10 邊之正邊形後則必以 7 及 9 邊之正邊形之闕如爲問。使教師知悉此項事實且知此類問題之簡單討論，如第三章所述者，自可從容處之矣。至關於代數問題其他諸章曾予以所需要之指示。特別如第五章所述圖形理論其

科學的及實用的態度則非在代數及解析幾何內所可能者也。

編內所述計算一方程式實根之方法，乃最省力而所得小數皆正確無疑。法先以荷諾方法求連續變換的方程式，至變換的次數則為所擬求之根其有效數字位數之半。而於變得之最後一方程式應用，從略去之二次及高次項所算出之修改數 (Correction)，於常數項將其化為一次方程式，再用省略除法演算則所擬求之根得矣。此法蓋計算便捷而結果正確二者兼備之法也。

牛頓方法，係本圖形的及數目的立場申述，有可應用於非代數的方程式之優點；該法對於各種非代數的方程式之應用編中演述至詳。

至若定或圈定一方程式之實根茲可以合法做出之圖形或笛卡兒，斯特姆，及布丹諸定理定之。而該定理等在通常則敘述證明兩不正確也。

行列式一章與其前諸章並無關連，章內所述之一般的一次方程組之理論亦本方陣之立場而為論列也。

本書初稿經敏內少達大學卜色教授，華盛頓大學羅艾渥教授，伊利諾大學肯蒲諾教授，芝加哥大學楊教授閱讀後予以有價值之更正，著者深為感荷。再稿復經西北大學克蒂斯教授詳加批閱予以改善。著者對威斯康新大學朱來斯登教授並致謝意，以其對於證法曾予以各種有用之更正也。

芝加哥，一九二一。

目次

第一章

複數

1. 平方根	1
2. 複數	1
3. 一之立方根	3
4. 複數之幾何圖示法	3
5. 複數之積	4
6. 複數之商	5
7. 笛莫佛定理	5
8. 立方根	6
9. n 次方根	8
10. 一之方根	9
11. 一之原 n 次方根	10

第二章

關於方程式根之基礎定理

12. 二次方程式	13
-----------	----

13.	有理整函數, 多項式	14
14.	餘數定理	15
15.	綜合除法	16
16.	多項式之因子式	18
17.	重根	19
18.	恆等多項式	20
19.	代數之基本定理	21
20.	根與係數間之關係	21
21.	虛根成對	24
22.	實根之上限	26
23.	根之他一上限	27
24.	整根	29
25.	牛頓求整根方法	31
26.	求整根之另一種方法	33
27.	有理根	34

第 三 章

用尺規做圖法

28.	不可能之做圖	36
29.	二次方程式之圖解法	36
30.	可做圖之解析的準則	37
31.	三次方程式之含可做圖之根者	39

32.	角之三等分	42
33.	正9邊形,倍立方	43
34.	正7邊形	44
35.	正7邊形與一之根	44
36.	倒根方程式	46
37.	正9邊形與一之方根	48
38.	一的方根之週期	50
39.	正17邊形	50
40.	正17邊形之做法	53
41.	正 n 邊形	54

第四章

三次及四次方程式之解法:

該方程式等之判別式

42.	化簡的三次方程式	56
43.	化簡的三次方程式之代數解法	56
44.	判別式	58
45.	三次方程式之實根之個數	59
46.	不可化的情款	60
47.	三次方程式其 $\Delta > 0$ 者之三角解法	61
48.	四次方程式之佛拉利解法	62
49.	先決的三次方程式之根	64

50	判別式	65
51	四次方程式之笛卡兒解法	65
52	笛卡兒解法之對稱形式	66

第 五 章

一 方 程 式 之 圖 形

53	方程式論內圖形之用途	69
54	描線時之注意	70
55	變點	71
56	微得函數	73
57	水平的切線	75
58	重根	76
59	常點的及屈點的切線	77
60	實三次方程式之實根	81
61	多項式連續之定義	83
62	任一具有實係數之多項式 $f(x)$ 在 $x=a$ 爲連續, 至 a 則 爲任何實常數	83
63	有根在 a 與 b 之間設 $f(a)$ 與 $f(b)$ 有相反符號	84
64	多項式之符號	85
65	婁爾定理	86

第 六 章

圈 定 實 方 程 式 之 實 根

66.	圈定實根之方法及目的.....	89
67.	笛卡兒符號定則.....	90
68.	斯特姆方法.....	94
69.	斯特姆定理.....	93
70.	斯特姆函數之化簡法.....	93
71.	四次方程式之斯特姆函數.....	100
72.	斯特姆定理於有重根之情款.....	103
73.	布丹定理.....	104

第 七 章

數目方程式之解法

74.	荷諾方法.....	109
75.	牛頓方法.....	114
76.	牛頓方法之圖形的討論.....	115
77.	按牛頓方法根之綜合計算法.....	118
78.	牛頓方法對於非多項式的函數之應用.....	121
79.	虛根.....	123

第 八 章

行列式; 一次方程組

80.	以二次行列式解兩一次方程式之方法.....	126
-----	-----------------------	-----

81.	以三次行列式解三個一次方程式之解法	128
82.	三次行列式其項之符號	129
83.	對換次數之永爲偶數或永爲奇數	130
84.	n 次行列式之定義	131
85.	行與列之對換	133
86.	兩列之對換	134
87.	兩行之對換	134
88.	兩行或兩列相同	134
89.	子式	136
90.	依一行或一列之展開式	136
91.	因子之移出	139
92.	行列式之和	140
93.	列或行之加法	140
94.	n 個含 n 未知數而 $D \neq 0$ 之一次方程組	142
95.	行列式之秩	144
96.	n 個含 n 未知數而 $D = 0$ 之一次方程組	145
97.	齊一次方程式	149
98.	m 個有 n 未知數之一次方程式之組	150
99.	補子式	152
100.	拉普拉斯依列展列式	153
101.	拉普拉斯依行展列式	154
102.	行列式之積	155

第九章

對稱函數

103. 西革馬函數, 初等對稱函數.160
104. 對稱函數之基本定理161
105. 有理函數之除對一根外對於其餘所有根皆對稱者165
106. 根的同次冪數之和.....167
107. 以係數表出 s_k 之瓦靈公式170
108. Σ 函數之以函數 s_k 表出者.....174
109. 對稱函數之計算.....175

第十章

消元法, 消元所得式及判別式

110. 消元法.....177
111. 二含 x 多項式之消元所得式178
112. 塞爾維特分離消元法179
113. 勃朝消元法183
114. 消元法之一般的定理186
115. 判別式.....187
- 附錄 代數之基本定理191
- 答案.....196
- 索引.....208

初級方程式論

第一章

複數

1. 平方根. 設 p 爲正實數, 記號 \sqrt{p} 乃用以表示 p 之平方根. 該平方根極易以對數法計算之.

茲將負數之平方根以成立 $i^2 = -1$ 關係之記號 i 表出而以 $+i$ 及 $-i$ 表示 $x^2 = -1$ 之根. 至 $x^2 = -4$ 之根則書爲以代 $\pm\sqrt{-4}$. 於一般情形, 設 p 爲正數, 則將 $x^2 = -p$ 之根書爲 $\pm\sqrt{p}i$ 以代 $\pm\sqrt{-p}$.

如是則各根之平方爲 $(\sqrt{p}i)^2 = -p$. 如於 $x^2 = -p$ 之根用通常所罕記法 $\pm\sqrt{-p}$, 則易使吾人於求其各根之平方時以根號內兩值相乘謬誤之結果:

$$\sqrt{-p}\sqrt{-p} = \sqrt{p^2} = +p.$$

爲免除斯種錯誤計茲用 $\sqrt{p}i$ 而不用 $\sqrt{-p}$.

2. 複數. 設 a 及 b 爲任意二實數而 $i^2 = -1$ 則 $a+bi$ 爲複數⁽¹⁾ 而 $a-bi$ 爲其配數. 設 $a=b=0$ 則謂各數爲零. 謂二複

⁽¹⁾ 複數蓋集成雙實數而成. 欲詳本此立場之論述以及以矢量爲之論述, 參看者者 L. E. Dickson 之 "Elementary Theory of Equations," 第 2 第 18 頁.

$a+bi$ 及 $c+di$ 相等者則設且必設 $a=c$ 及 $b=d$. 就特別情形之, 如 $a+bi=0$, 則設且必設 $a=b=0$. 設 $b \neq 0$, 則謂 $a+bi$ 爲虛於特別情形, bi 名爲純虛數.

複數加法之義定爲

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i.$$

與加法相反之運算名爲減法, 即於

$$(c+di) + z = a+bi$$

求複數 z 之法也. z 之記法及值爲

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i.$$

乘法之義定爲

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i,$$

從而知其構成之方法與通常代數方法無異, 惟用 $i^2 = -1$ 關係加以化簡耳. 例如,

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

除法之義則定爲與乘法相反之運算, 亦即於 $(a+bi)q = e$ 求複數 q 之法也. 以 $a-bi$ 乘各節則得 q 之記法及值爲

$$\frac{e+fi}{a+bi} = \frac{(e+fi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{ae+bf}{a^2+b^2} + \frac{af-be}{a^2+b^2}i.$$

因 $a^2+b^2=0$ 當 a 及 b 爲實數時必須 $a=b=0$, 從可斷言法除用零除外所得之商爲可能的單一的.

習 題

以複數表出:

$$1 \quad \sqrt{-1} \quad 2 \quad \sqrt{-1} \quad 3 \quad (\sqrt{-1})^2 \quad (\sqrt{-1})^3 \quad (\sqrt{-1})^4 \quad \dots$$

5. $8+2\sqrt{3}$. 6. $\frac{3+\sqrt{-5}}{2+\sqrt{-1}}$. 7. $\frac{3+5i}{2-3i}$. 8. $\frac{a+bi}{a-bi}$.

9. 證明二相配複數之和為實數,而其差為純虛數.

10. 證明二複數和之配數等於其配數之和,如將內中和字易為差字結果亦能成立乎?

11. 證明二複數積(或商)之配數等於其配數之積(或商).

12. 證明設二複數之積為零則二數中至少有一數為零.

13. 求適合次式之二實數 x, y :

$$(x+yi)^2 = -7+24i.$$

仿第13題,以複數表示次數之平方根:

14. $-11+60i$. 15. $5-12i$. 16. $4cd+(2c^2-2d^2)i$.

3. 一之立方根. 任意複數 x 其立方等於一者名為一之立方根. 因

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1),$$

故 $x^3=1$ 之根為 1 及適合

$$x^2+x+1=0, \quad (x+\frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}, \quad x+\frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i.$$

之二數. 是以一之立方根有三, 即

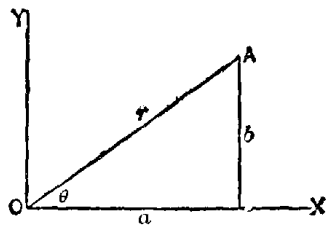
$$1, \quad \omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i, \quad \omega' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i.$$

按 ω 之由來, 則得重要之關係式

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^3 = 1.$$

因 $\omega\omega' = 1$ 及 $\omega^3 = 1$, 故得 $\omega' = \omega^2, \omega = \omega'^2$.

4. 複數之幾何圖示法. 用直角坐標軸 OX 及 OY , 茲以坐標為 a, b 之點 A 示 $a+bi$ (第1圖).



正數 $r = \sqrt{a^2+b^2}$ 示 OA 之長名為 $a+bi$ 之模數(或絕對值). 角 $\theta = XO A$,

第 1 圖

即從 OX 按反表針之方向量至 OA 之角度，名爲 $a+bi$ 之
如是則 $\cos \theta = a/r$, $\sin \theta = b/r$, 而

$$(1) \quad a+bi = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

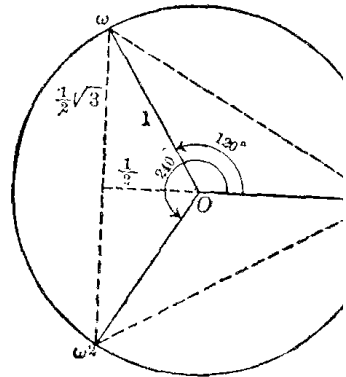
第二節名爲 $a+bi$ 之三角式.

至輻角 θ 則可以 $\theta \pm 360^\circ$, $\theta \pm 720^\circ$, 等等之任一角代之
二複數相等設且必設其模數相等及其中一數之
等於他數之輻角.

例如， -1 之立方根爲 1 及

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\ &= \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ, \\ \omega^2 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\ &= \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ, \end{aligned}$$

而可以用取 O 爲圓心及以 1 爲半徑之圓其內接等邊三角形，如圖上記爲 $1, \omega, \omega^2$ 之角頂示之(第 2 圖). ω 及 ω^2 之輻角各爲 120° 及 240° ，而其模數各爲 1 .



第 2 圖

-3 之模數爲 3 而其輻角爲 180° 或
 180° 加減 360° 與任何正整數之積.

5. 複數之積. 按乘法及三角法,

$$\begin{aligned} & [r(\cos \theta + i \sin \theta)][r'(\cos \alpha + i \sin \alpha)] \\ &= rr'[(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + i(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha)] \\ &= rr'[\cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha)]. \end{aligned}$$

是以二複數乘積之模數等於其模數之積，而其積之輻
於其輻角之和。

例如, $\omega = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$ 之平方其模數為 1 而其幅角為 $120^\circ + 120^\circ$ 即 $\omega^2 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$. 再 ω 及 ω^2 之積其模數為 1 及其幅角為 $120^\circ + 240^\circ$ 亦即為 $\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ$, 而可化為 1. 此則與已知之結果 $\omega^3 = 1$ 適相契合也.

在前式內取 $r = r' = 1$, 則得一有用公式

$$(2) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = \cos(\theta + \alpha) + i \sin(\theta + \alpha).$$

6. 複數之商. 於 (2) 內取 $\alpha = \beta - \theta$ 而將所得之方程式以 $\cos \theta + i \sin \theta$ 除之, 則得

$$\frac{\cos \beta + i \sin \beta}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos(\beta - \theta) + i \sin(\beta - \theta).$$

是以 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 除 $R(\cos \beta + i \sin \beta)$ 所得之商其幅角等於兩幅角之差 $\beta - \theta$ 而其模數等於原模數之商 R/r .

於 $\beta = 0$ 時得一有用公式

$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

7. 笛莫佛定理. 設 n 為任何正整數,

$$(3) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

此式當 $n = 1$ 時顯然成立, 而當 $n = 2$ 時從公式 (2) 使 $\alpha = \theta$ 即得. 依算學歸納法為之, 假定於 n 為 $1, 2, \dots, m$ 時皆成立. 且吾人能證明於 n 為其後之值 $m + 1$ 時此式亦可成立. 蓋按此設知

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^m = \cos m\theta + i \sin m\theta$$

以 $\cos \theta + i \sin \theta$ 乘各節, 而以從 (2) 式使 $\alpha = m\theta$ 所得之值代入右節. 如是得

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{m+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos m\theta + i \sin m\theta) \\ &= \cos(\theta + m\theta) + i \sin(\theta + m\theta), \end{aligned}$$