Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

丛书主编/王后雄　本册主编/马春华

新课标

超级课堂

Chaoji Ketang

高中数学

1（必修）

考点分类例析

方法视窗导引

防错档案预警

专题优化测训

华中师范大学出版社

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破 超级课堂

Chaoji Ketang

数学

紧扣课标，直击高考，突破难点，解析疑点，化整为零，各个击破，点线面全方位建构“同步专题”攻略平台。

由“母题”发散“子题”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸，万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。

ISBN 978-7-5622-3126-4

9 787562 231264 >

定价：18.80元

责任编辑/陈兰枝　责任校对/张忠　封面设计/甘英

新课标

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

丛书主编/王后雄　本册主编/马春华

超级课堂

高中数学

1

（必修）

華中師範大學出版社

新出图证(鄂)字 10 号
图书在版编目(CIP)数据
同步专题突破超级课堂 高中数学 1(必修) 丛书主编 王后雄 本册主编 马春华
—武汉:华中师范大学出版社,2008.8
ISBN 978-7-5622-3126-4
Ⅰ.同… Ⅱ.①王… ②马… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 113275 号

同步专题突破超级课堂 高中数学 1(必修)

丛书主编:王后雄 本册主编:马春华
责任编辑:陈兰枝 责任校对:张 忠 封面设计:甘 英
选题设计:第一编辑室(027－67867361)
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号
销售电话:027－67863040 027－67867076 027－67867371 027－67861549
传真:027－67863291 邮购:027－67861321
网址:http://www.ccnupress.com 电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北省鄂南新华印务有限公司 督印:章光琼
字数:288 千字
开本:889mm×1194mm 1/16 印张:10
版次:2008 年 8 月第 1 版 印次:2008 年 8 月第 1 次印刷
定价:18.80 元

《同步专题突破超级课堂》使用图解

课标解读

呈现新课程标准内容要素，锁定不同版本教材的要求，指明学习和考试具体目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法指导，揭示学习重点和难点，探讨考试命题规律。

考点例析

考点分类、核心总结，要点重点各个击破，典例创新引导，首创分类解析导解模式。

变式跟踪

案例学习迁移，母题多向发散，预测高考可考变式题型，层层剖析深入变式训练。

板块一 集合

第1讲 集合的含义与表示

课标解读

1. 了解集合的含义、元素与集合的"属于"关系.
①了解"属于"、"不属于"的概念及其符号的运用；
②理解集合中元素的特性；
③了解集合的分类和空集的特征

学法导引

本讲内容的学习关键是概念的理解、观念的转变.它是高中数学的第一个板块，抽象性比较强.学习方式和方法与初中有比较大的差异.应重点注意：
①集合的概念与"全体"的区别，集合元素的概念是

考点分类例析

考点1 判断一个语句能否构成集合

核心总结

(1)集合的概念：一般地，把一些能够确定的不同的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合.
(2)集合必须具有以下两个特点：①整体性：说明集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象；②确定性：对象要么是集合的元素，要么不是集合的元素，二者必居其一.

考题1 考查下列每组对象：
(1)著名的数学家；
(2)某校2007年在校的所有高个子同学；
(3)不超过20的非负数；
(4)方程 $x^2-9=0$ 在实数范围内的解；
(5)直角坐标平面内第一象限的一些点.
其中能构成集合的是（　　）.
A. (1)(3)　　B. (2)(3)　　C. (3)(4)　　D. (1)(2)(5)
【解析】 (1)"著名的数学家"无明确的标准，对于某个人是否"著名"无法客
【变式1-1】 下列各组对象能否构成集合：
(1)所有漂亮的人；
(2)所有大于0的正整数；
(3)不大于3且不小于0的有理数；

方法视窗

1. 解此类问题的难点是判断标准的把握，集合中的元素是确定的，即对于任何一

规律清单

表示集合，首先要明确元素的特点，再确定表示方法.当集合元素个数不多时，宜用列举法或图示法表示；当集合元素个数无

防错档案

1. 易错点
(1)思考问题不全面，从而导致遗漏.如在考题2(1)中只考虑了两种情况，没有注意

超级链接

最佳导学模式，学案式名师指津。方法视窗、规律清单、防错档案，革新传统学习模式。

专题优化测训

学业水平测试

1. (考点1)给出下列四个对象，其中能构成集合的个数为（　　）.
①某中学的大胖子；②你所在班中身高超过1.80米的高个子；③2008年北京奥运会中的比赛项目；④$\{1,1,3,5\}$
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4
2. (考点5)集合 $\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant 3\}$ 的另一种表示方法为（　　）.
A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$
C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$
3. (考点4)给出下列关系：①$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$；②$\sqrt{2}\in\mathbf{Q}$；③$|-3|\in\mathbf{N}^*$；④$|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}$.其中正确的个数为（　　）.
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4
4. (考点2)集合 $\{3,x,x^2-2x\}$ 中，x 应满足的条件是________.
5. (考点4)设 $-5\in\{x\mid x^2-ax-5=0\}$，则集合 $\{x\mid x^2-4x-a=0\}$ 中所有元素之和为________.
6. (考点2、4)已知 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，则 $a=$________.

高考水平测试

一、选择题($5'\times 8=40'$)
1. (考点1)下列几组对象可以构成集合的是（　　）.
A. 充分接近 π 的全体实数
B. 善良的人
C. 某校高一所有聪明的同学
D. 某单位所有身高在1.7m以上的人
2. (考点2)由 $a^2,2-a,4$ 组成一个三元素集合 A，则实数 a 的值可以是（　　）.
A. 1　　B. -2　　C. 6　　D. 2
3. (考点4，2007，全国卷Ⅰ)设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a=$（　　）.
A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2
4. (考点3)已知 x,y,z 为非零实数，代数式 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{|xyz|}{xyz}$ 的值所组成的集合是 M，则下列判断正确的是（　　）.
A. $0\notin M$　　B. $2\in M$
C. $-4\notin M$　　D. $4\in M$

优化测训

学业水平测试、高考水平测试，习题层级清晰，水平测试立足教材、夯实基础，高考真题再现，提升解题能力。

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时，解题依据教你回归考点知识和例题启示。

答案与提示

板块一 集合

第1讲 集合的含义与表示

【变式训练】
[变式1-1] 由题目可获取以下主要信息：
题设中给了5个语句，解答本题可先判断这5个语句中的对象是否确定，然后判定是否可构成集合.
本题考查集合中元素的确定性，如果所给出的对象不明确就不能构成集合.(1)、(5)中的元素不确定，不能构成集合.(2)、(3)、(4)中的元素都是明确的，能构成集合.
[变式2-1] x 不能取的实数值为 $-1,0,1,2$.
【学业水平测试】
1. B [提示：①无标准不确定；④元素重复不能确定.]
2. A [提示：$x\leqslant 3$ 且 $x\in\mathbf{N}$，即 $x=0,1,2,3$.]
3. B [提示：①③正确，②④不正确.]
【高考水平测试】
1. D [提示：A、B、C项均无确定标准.]
2. C [提示：反代检验.]
3. C [提示：显然 $a\neq 0$，则 $a+b=0\Rightarrow a=-b$，$\frac{b}{a}=-1$.　∴ $a=-1$，$b=1$，则 $b-a=2$.]
4. D [提示：x,y,z 同为正值则代数式的值为4.]
5. C [提示：解法1　令 $a=1,b=2$，则 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$，可排除A、B；令 $a=\sqrt{3},b=2\sqrt{3}$，则 $\frac{b}{a}=2$，可排除D.

答案提示

提示解题思路，突破解析模式，规范标准答案，全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

同步专题突破超级课堂 高中数学1(必修)

编委会

丛书主编：王后雄

本册主编：马春华

编　　者：马春华　郑晓玲　田祥高　章雄钢

吴海林　李　俊　杨海林　马晨冉

秦　俭　张　营　刘国发　林　芳

马　威　左建华

目录 CONTENTS

板块一　集合

第1讲　集合的含义与表示

课标解读

1. 了解集合的含义、元素与集合的"属于"关系.

(1)了解"属于"、"不属于"的概念及其符号的运用;

(2)理解集合中元素的特性;

(3)了解集合的分类和空集的特征;

(4)能记住常用特定集合的记法.

2. 能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

(1)会用列举法表示集合;

(2)会用描述法表示集合;

(3)会进行集合描述法与列举法表示之间的转换.

学法导引

本讲内容的学习关键是概念的理解、观念的转变.它是高中数学的第一个板块,抽象性比较强.学习方式和方法与初中有比较大的差异.应重点注意:

(1)集合的概念与"全体"的区别,集合元素的概念是数学中的原始概念,要注意把握集合中元素的确定性、互异性、无序性;

(2)集合常用的三种表示方法:列举法、描述法、图示法(Venn图法或数轴法),各有优点,用什么方法要具体情况具体分析.

考点分类例析

考点1　判断一个语句能否构成集合

核心总结

(1)集合的概念:一般地,把一些能够确定的不同的对象看成一个整体,就说这个整体是由这些对象的全体构成的集合.

(2)集合必须具有以下两个特点:①整体性:说明集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象;②确定性:对象要么是集合的元素,要么不是集合的元素,二者必居其一.

考题1　考查下列每组对象:

(1)著名的数学家;

(2)某校2007年在校的所有高个子同学;

(3)不超过20的非负数;

(4)方程 $x^2-9=0$ 在实数范围内的解;

(5)直角坐标平面内第一象限的一些点.

其中能构成集合的是(　　).

A. (1)(3)　　B. (2)(3)　　C. (3)(4)　　D. (1)(2)(5)

【解析】　(1)"著名的数学家"无明确的标准,对于某个人是否"著名"无法客观地判断,因此"著名的数学家"不能构成一个集合;类似地,(2)也不能构成集合;(3)任给一个实数 x,可以明确地判断是不是"不超过20的非负数",即"$0\leqslant x\leqslant 20$"与"$x>20$ 或 $x<0$",两者必居其一,且仅居其一,故"不超过20的非负数"能构成集合;类似地,(4)也能构成集合;(5)"一些点"无明确的标准,对于某个点是否在"一些点"中无法确定,因此"直角坐标平面内第一象限的一些点"不能构成集合.

故选C.

【变式1-1】　下列各组对象能否构成集合:

(1)所有漂亮的人;

(2)所有大于0的正整数;

方法视窗

1. 解此类问题的难点是对判断标准的把握,集合中的元素是确定的,即对于任何一个对象,都可判断它是或不是给定集合的元素,即要有一个明确的判断标准.例如,"我们班的高个子同学"就不能组成一个集合,因为组成集合的标准不明确,从而对象不确定;再如"较大的整数"、"著名数学家"等,都不能组成一个集合.

2. 对于给定的语句其核心是把握给定的对象是"模棱两可"的,还是"确定无疑"的.

(3)不大于 3 且不小于 0 的有理数；
(4)参与中国加入 WTO 谈判的中方成员；
(5)某校 2005 年在校的所有成绩好的同学.

考点 2 集合中元素特性的应用

核心总结

(1)集合中元素的三个特性：确定性、互异性、无序性.
①确定性：对于集合 A 和某一对象 x，有一个明确的判断标准可以鉴定 $x\in A$，还是 $x\notin A$，二者必居其一，而且只居其一.
②互异性：集合中没有相同的元素. 如，方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集用集合记为“$\{1\}$”，而不能记作“$\{1,1\}$”.
③无序性：集合中的元素是不排序的. 如，集合 $\{1,2\}$ 与 $\{2,1\}$ 是同一个集合.
(2)两集合相等的概念：只要构成两个集合的元素是一样的，就称这两个集合是相等的.

考题 2 (1)数集 $\{1,x,x^2-x\}$ 中元素 x 所满足的条件是________.
(2)已知集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,aq,aq^2\}$(a 为常数)，若 $A=B$，求 d,q 的值.

【解析】 (1)根据集合中元素的互异性可知

$$\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq x^2-x\\ x^2-x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 1,\\ x\neq 0 \text{ 且 } x\neq 2,\\ x\neq\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2},\end{cases}$$

故 x 满足的条件为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0,x\neq 1,x\neq 2,x\neq\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

故填 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0,x\neq 1,x\neq 2,x\neq\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(2)由 $A=B$，即 A 与 B 的元素一样，则

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}a+d=aq,\\ a+2d=aq^2\end{cases} \text{或} (\text{Ⅱ})\begin{cases}a+d=aq^2,\\ a+2d=aq.\end{cases}$$

由(Ⅰ)消去 d，得 $aq^2-2aq+a=0$.
根据已知条件，显然 $a\neq 0,d\neq 0$，解得 $q=1$.
但 $q=1$ 时，$a=aq=aq^2$，这与集合中元素的互异性矛盾，故 $q=1$ 舍去.
由(Ⅱ)消去 d，得 $2aq^2-aq-a=0$.
$\because a\neq 0,q\neq 1$，$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$ 或 $q=1$(舍去).
将 $q=-\dfrac{1}{2}$ 代入(Ⅱ)解得 $d=-\dfrac{3}{4}a$.
$\therefore d=-\dfrac{3}{4}a,\ q=-\dfrac{1}{2}$.

【变式 2-1】 数集 $\{0,2,x^2-x\}$ 中的 x 不能取哪些实数值?

方法视窗

1. 对于集合中字母和数元素所满足的条件的求解，关键是把握集合元素的互异性，并且思考全面，不遗不漏.

2. 对于利用集合相等求字母元素的问题：关键是利用其中元素相等的特点，列出方程求解. 但常常需要检验，看结果是否符合集合元素必须具备的三个特性.

防错档案

1. 易错点

(1)思考问题不全面，从而导致遗漏. 如在考题 2(1)中只考虑了两种情况，没有注意三个元素两两不相等的情况；

(2)只注意题设条件的直接运用，而不注意回代检验而导致增解.

2. 防错良方

(1)重点关注元素互异性；
(2)养成回代检验的良好习惯.

【变式2-2】 已知集合 A 中有3个元素 $x-2, 2x^2+5x, 12$，且 $-3\in A$，求 x 的值.

考点3 集合的分类问题

核心总结

(1)含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集，不含有任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

(2)空集($\varnothing$)是一个特殊的集合，引进空集的概念是出于实际的需要，引进空集后又带来了许多方便. 在集合论中，空集有重要的意义，它有点类似于0在通常的数系统中所占的地位. 引进空集之后，"方程在某个数集中无解"就可以说成"在某数集上方程的解集为空集".

考题3 (2008，武汉调考)设集合 $M=\{$大于0小于1的有理数$\}$，$W=\{$小于 10^{50} 的正整数$\}$，$P=\{$定圆 C 的内接△$\}$，$Q=\{$所有能被7整除的数$\}$，$R=\{$2008年5月12日汶川大地震中遇难的人数$\}$.

其中无限集是(　　).

A. M、W、P　　B. M、P、Q　　C. N、P、Q　　D. M、N、Q

【解析】 小于 10^{50} 的正整数，即 $1,2,3,\cdots,10^{50}-1$，元素是有限个，R 中虽然人数有几万人，较多，但是仍是有限的，故为有限集. M、P、Q 中元素均有无限个，故选B.

【变式3-1】 下列集合是有限集合的是(　　).

A. $\{$能被3整除的数$\}$　　B. $\{$正方形$\}$

C. $\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<2\}$　　D. $\{$方程 $3x^2+x=0$ 的解$\}$

【变式3-2】 下列说法正确的是(　　).

A. $\{0\}$是空集　　B. $\left\{x\in\mathbf{Q}\,\middle|\,\frac{6}{x}\in\mathbf{N}\right\}$是无限集

C. $\{x\in\mathbf{Q}\mid x^2+x+2=0\}$是空集　　D. 存在实数 x 使 $x\in\varnothing$ 成立

方法视窗

1. 明确集合分类的含义："有限集"和"无限集"是通过集合中元素的个数来定义的，个数很多但不一定是无限集，如考题3中的集合 R.

2. 关键是根据已有知识判定集合中元素是有限个还是无限个或者是没有.

3. 无论何时何地，"$x\in\varnothing$"的写法都是错误的，$x\notin\varnothing$ 是永恒的真理. $\{0\}$与 $\varnothing$ 是不同的，$\{0\}$表示由一个元素0构成的集合，$\varnothing$ 是不含任何元素的集合.

考点4 集合与元素关系的判断

核心总结

(1)如果 a 是集合 A 的元素，称 a 属于 A，记 $a\in A$，否则 $a\notin A$.

(2)符号"$\in$"与"$\notin$"只能用在元素与集合之间，表示元素与集合的从属关系. 如 $0\in\mathbf{N}$. $0\notin\mathbf{N}^*$. 除此之外，"$\in$"与"$\notin$"没有其他用途.

(3) a 与 $\{a\}$ 是不同的，a 表示一个元素，$\{a\}$表示由一个元素 a 构成的集合，一般称 $\{a\}$ 为单元素集. 特别地，0与 $\{0\}$ 是不同的.

(4)关注特定集合的记法

$\mathbf{N}$(自然数集)，$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$(正整数集)，$\mathbf{Z}$(整数集)，$\mathbf{Q}$(有理数集)，$\mathbf{R}$(实数集).

考题4 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1) $2\sqrt{3}$ ______ $\{x\mid x<\sqrt{11}\}$，$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ______ $\{x\mid x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$；

(2)3 ______ $\{x|x=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$，$(-1,1)$ ______ $\{y|y=x^2\}$；

(3)设 $x=\dfrac{1}{3-5\sqrt{2}}$，$y=3+\sqrt{2}\pi$，$M=\{m\mid m=a+b\sqrt{2},a\in\mathbf{Q},b\in\mathbf{Q}\}$，则 x ______ M，y ______ M.

【解析】 (1)$2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$.

$\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{7+2\sqrt{10}}<\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

故填$\notin$；$\in$.

(2)设 $n^2+1=3$，$n=\pm\sqrt{2}\notin\mathbf{N}$，

把$(-1,1)$代入 $y=x^2$ 成立，但$(-1,1)$是有序实数对，而$\{y|y=x^2\}$是 y 值的集合.

故填$\notin$；$\notin$.

(3)$x=\dfrac{1}{3-5\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{41}-\dfrac{5\sqrt{2}}{41}$， $\because -\dfrac{3}{41}\in\mathbf{Q}$，$-\dfrac{5}{41}\in\mathbf{Q}$.

$\therefore x\in M$. $\because \pi\notin\mathbf{Q}$， $\therefore y\notin M$.

故填$\in$；$\notin$.

考题5 设实数集 S 是满足下面两个条件的集合：

①$1\notin S$；②若 $a\in S$，则$\dfrac{1}{1-a}\in S$.

(1)求证：若 $a\in S$，则 $1-\dfrac{1}{a}\in S$；

(2)若 $2\in S$，则在 S 中必含有其他的两个数，试求出这两个数；

(3)S 能否是单元素集？若能，把它求出来，若不能，说明理由.

【解析】 (1)由 $a\in S$，则$\dfrac{1}{1-a}\in S$ 可得$\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in S$，

即 $$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{1-a-1}=1-\frac{1}{a}\in S.$$

故若 $a\in S$，则 $1-\dfrac{1}{a}\in S$.

(2)由 $2\in S$，则$\dfrac{1}{1-2}=-1\in S$；由 $-1\in S$，则 $\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}\in S$， 而当 $\dfrac{1}{2}\in S$时， $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in S$，又回到了开始.

因此当 $2\in S$ 时，只有另两个元素 $-1\in S$，$\dfrac{1}{2}\in S$.

(3)不妨设 $S=\{a\}$，则由条件②得：$\dfrac{1}{1-a}\in S$，由元素的互异性知：$a=\dfrac{1}{1-a}$ 即 $a^2-a+1=0$，由于 $\Delta=1-4=-3<0$，故方程无实数根，因此集合 S 不能为单元素集.

【变式4-1】 用符号$\in$和$\notin$填空.

(1)1 ______ $\mathbf{N}^*$；0 ______ $\mathbf{N}$；$\sqrt{3}$ ______ $\mathbf{Z}$；π ______ $\mathbf{R}$；

(2)$2\sqrt{2}$ ______ $\{x|x<3\}$；$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ______ $\{x|x>\sqrt{2}+\sqrt{6}\}$；

(3)13 ______ $\{x|x=m^2+n^2,m,n\in\mathbf{N}^*\}$；

(4)102 ______ $\{y|y=m^2-n^2,m,n\in\mathbf{N}^*\}$；

(5)$(2,4)$ ______ $\{y|y=x^2\}$，$(3,9)$ ______ $\{(x,y)|y=x^2\}$.

【变式4-2】 (2008，长沙调考)已知集合 $M=\{t\mid t=a+\sqrt{2}b,a、b\in\mathbf{Z}\}$，设 $x,y\in M$，则( ).

A. $x\pm y\notin M$　　B. $xy\in M,x\pm y\notin M$

C. $xy\notin M$　　D. $x\pm y\in M,xy\in M$

方法视窗

1. 判断一个对象是不是某个集合的元素，就是判断这个对象是否具有集合元素所具有的属性.由于集合多种多样，因此判定方法也多种多样，因题而异.

2. 一般地，①确定某数是否为某特定数集的元素关键是对该数的认定，进而作出判断，如考题4(1).

②确定某数是否为某数集的元素关键是看该数是否能表示成该集合的元素形式，如考题4(2).

③确定元素是否在集合中，要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来确定，如考题5中解决的关键是多次使用条件②，此外还应看到，在解决问题的过程中使用了集合中元素的互异性，因此遇到集合问题时要牢牢把握集合的性质，当然若能利用好第一问的结论，则能使第二问快速获解.事实上，有 $2\in S$，$1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\in S$，$1-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=-1\in S$.

考点5　集合的表示方法

核心总结

(1)列举法——把集合的元素一一列举出来.

如前面所说的$A=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$,$C=\{$北京,哈尔滨,长春,…,上海,武汉,…,香港,澳门,台北$\}$都属于列举法.

在列举法中必须注意两点:一是对于元素较多的集合,列举时应尽可能呈现该集合的明显规律,如把集合A写成$\{9,5,3,1,7,\cdots\}$就叫人摸不着头脑;二是注意有限集与无限集中省略号的应用,如$M=\{1,3,5,7,9,\cdots,999\}$就表示1000以内的正奇数,它是有限集(集合中的元素的个数是有限的),而$A=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$则表示无限集.

(2)描述法——把集合中元素的公共属性描述出来.

描述法常见的有:文字语言描述,符号语言描述,图形语言描述.例如:

①$B=\{$直线$y=2x-1$上所有的点$\}$就为文字语言描述;②$B=\{(x,y)\mid y=2x-1\}$就为符号语言描述;③在平面直角坐标系内画出直线$y=2x-1$的图象,就为图形语言描述.不管用哪种语言描述,都必须做到简明、准确,不产生歧义.

考题6　用适当的方法表示下列集合:

(1)小于10的所有正奇数组成的集合;

(2)被5除余2的自然数组成的集合;

(3)绝对值大于1且不超过5的整数组成的集合;

(4)一次函数$y=4-3x$,当自变量取正整数时,因变量组成的集合.

【解析】(1)因为10以内的正奇数只有1,3,5,7,9,所以用列举法表示:$\{1,3,5,7,9\}$.也可以用特征性质描述法表示为:$\{x\mid x$是小于10的正奇数$\}$,或者$\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{N},k<5\}$.

(2)因为集合的元素有无限多个,所以用特征性质描述法:设集合为A,元素为x,则$x=5k+2$且$k\in\mathbf{N}$,$A=\{x\mid x=5k+2,k\in\mathbf{N}\}$.

(3)用特征性质描述法:设集合为A,元素为x,则$A=\{x\in\mathbf{Z}\mid 1<|x|\leqslant 5\}$.又集合元素个数不多可以用列举法表示:$A=\{2,3,4,5,-2,-3,-4,-5\}$.

(4)用特征性质描述法表示为:$A=\{y\mid y=4-3x,x\in\mathbf{N}^*\}$.

考题7　用列举法表示下列集合:

(1)$A=\{y\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;

(2)$B=\{(x,y)\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;

(3)$C=\{n\mid |n|\leqslant 3,n\in\mathbf{Z}\}$,$D=\{(x,y)\mid 3x+2y=16,x\in C\}$.

【解析】(1)$\because y\in\mathbf{N}$,　$\therefore x^2\leqslant 6$且$x\in\mathbf{N}$.

$\therefore x=0,1,2$分别对应的$y=6,5,2$.$A=\{6,5,2\}$.

(2)由(1)知x取0,1,2,相应的y取6,5,2.

又集合的元素是点(x,y),故$B=\{(0,6),(1,5),(2,2)\}$.

(3)$\because |n|\leqslant 3$且$n\in\mathbf{Z}$,$n=-3,-2,-1,0,1,2,3$,$C=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$,

又$x\in C$,相应的$y=\dfrac{16-3x}{2}$,可取$\dfrac{25}{2},11,\dfrac{19}{2},8,\dfrac{13}{2},5,\dfrac{7}{2}$.

又集合元素是点(x,y),

$\therefore D=\left\{\left(-3,\dfrac{25}{2}\right),(-2,11),\left(-1,\dfrac{19}{2}\right),(0,8),\left(1,\dfrac{13}{2}\right),(2,5),\left(3,\dfrac{7}{2}\right)\right\}$.

【变式5-1】　有下列各命题:

(1)方程$\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$的解集是$\left\{\dfrac{1}{2},-1\right\}$;

(2)方程$x^2+x-6=0$的解集为$\{(-3,2)\}$;

(3)集合$M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$与集合$P=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$表示同一集合;

(4)方程组$\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$的解集是$\{(x,y)\mid x=-1$或$y=2\}$.其中描述正确的个数为(　　).

方法视窗

1.用列举法表示集合,首先要明确集合有哪些元素,然后再在“{　}”内将元素一一列举出来.

2.使用描述法时,需要注意以下几点:

①写清楚代表元素的字母;②说明集合元素的特征性质;③不能出现未说明的字母;④应恰当应用“且”与“或”;⑤语句精练准确.

3.将特征性质描述法表示的集合转化为用列举法表示时,特别要注意元素是什么,字母的限制条件是什么.看懂集合的具体意义是关键,特别注意x、y所满足的限制条件.如考题7(1)(2)中,$x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$;(3)中$n\in\mathbf{Z},x\in C$.

规律清单

表示集合,首先要明确元素的特点,再确定表示方法.当集合元素个数不多时,宜用列举法或图示法表示;当集合元素个数无限或不宜列举时,宜用特征性质描述法表示.

防错档案

1.易错点

描述集合时只关注条件中的关系式,而不注意关键“代表元”的含义,如易将$M=\{y\mid y=x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$与$N=\{(x,y)\mid y=x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$搞混淆.

2.防错良方

表示集合时,要明确“代表元”的意义,

A. 0个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

【变式5-2】 用特征性质描述法表示图1-1中阴影部分(含边界)的点的坐标的集合.

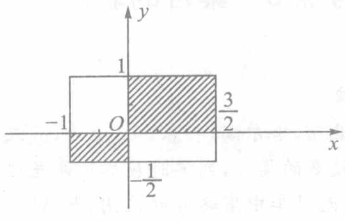

图1-1

【变式5-3】 用列举法表示下列集合.

(1)大于10且小于20的所有奇数构成的集合A；

(2)方程$x^2-5x+6=0$的解集B；

(3)方程$x^2-6x+9=0$的解集C.

分清集合是数集还是点集，如$\{x|y=x^2+2\}$表示$y=x^2+2$的定义域集合，$\{y|y=x^2+2\}$表示$y=x^2+2$的值域集合，而$\{(x,y)|y=x^2+2\}$表示$y=x^2+2$图象上的点集.

专题优化测训

学业水平测试

1.(考点1)给出下列四个对象，其中能构成集合的个数为(　　).

①某中学的大胖子；②你所在班中身高超过1.80米的高个子；③2008年北京奥运会中的比赛项目；④$\{1,1,3,5\}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2.(考点5)集合$\{x\in \mathbf{N}|x\leqslant 3\}$的另一种表示方法为(　　).

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$

C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

3.(考点4)给出下列关系：①$\frac{1}{2}\in \mathbf{R}$；②$\sqrt{2}\in \mathbf{Q}$；③$|-3|\in \mathbf{N}^*$；④$|-\sqrt{3}|\in \mathbf{Q}$. 其中正确的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4.(考点2)集合$\{3,x,x^2-2x\}$中，x应满足的条件是________.

5.(考点4)设$-5\in\{x|x^2-ax-5=0\}$，则集合$\{x|x^2-4x-a=0\}$中所有元素之和为________.

6.(考点2、4)已知$A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若$1\in A$，则$a=$________.

高考水平测试

一、选择题($5'\times 8=40'$)

1.(考点1)下列几组对象可以构成集合的是(　　).

A. 充分接近π的全体实数

B. 善良的人

C. 某校高一所有聪明的同学

D. 某单位所有身高在1.7m以上的人

2.(考点2)由$a^2,2-a,4$组成一个三元素集合A，则实数a的值可以是(　　).

A. 1　　B. -2　　C. 6　　D. 2

3.(考点4，2007，全国卷Ⅰ)设$a,b\in\mathbf{R}$，集合$\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则$b-a=$(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

4.(考点3)已知x,y,z为非零实数，代数式$\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{|xyz|}{xyz}$的值所组成的集合是$M$，则下列判断正确的是(　　).

A. $0\notin M$　　B. $2\in M$

C. $-4\notin M$　　D. $4\in M$

5.(考点4，2006，辽宁)设$\oplus$是$\mathbf{R}$上的一个运算，A是$\mathbf{R}$的非空子集. 若对任意$a,b\in A$，有$a\oplus b\in A$，则称A对运算$\oplus$封闭. 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于零)四则运算都封闭的是(　　).

A. 自然数集　　B. 整数集

C. 有理数集　　D. 无理数集

6.(考点5，2007，江西)若集合$M=\{0,1,2\}$，$N=\{(x,y)|x-2y+1\geqslant 0$且$x-2y-1\leqslant 0,x,y\in M\}$，则$N$中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 2

7.(考点2、4、5，2005，湖北)设P、Q为两个非空实数集合，定义集合$P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若$P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则$P+Q$中元素的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

8.(考点4，2006，上海)若关于x的不等式$(1+k^2)x\leqslant k^4+4$的解集是M，则对任意实常数k，总有(　　).

A. $2\in M,0\in M$　　B. $2\notin M,0\notin M$

C. $2\in M,0\notin M$　　D. $2\notin M,0\in M$

二、填空题($5'\times 4=20'$)

9.(考点2、3)集合$A=\{x|x=(-1)^n,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$C=\{(x,y)|3x+2y=16,x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\}$，$D=\{x\in\mathbf{Q}|1<x<2\}$，$E=\{$直角三角形$\}$，其中有限集个数是________.

10.(考点2、4)设 $A=\{x|x\in\mathbf{R}$,且 $x\in\mathbf{Q}\}$,给出实数 $-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\pi,-0.101010\cdots,-\sqrt{2},\sqrt[3]{-2},\cos60^\circ$,其中是集合 A 中的元素的有____________________________.

11.(考点3)方程 $ax+b=0$ 的解集为 A,若 A 为空集,则 a、b 满足的条件为________;A 为有限集,则 a,b 满足的条件为________,若 A 为无限集,则 a,b 满足的条件为________.

12.(考点4、5)集合 $A=\{a|a+1\geqslant5\}$,$B=\{y|y=x^2+2x+5,x\in\mathbf{R}\}$,则 A,B________(填"是"或"不")表示同一集合.

三、解答题($10'\times4=40'$)

13.(考点5)用适当的方法表示下列集合(1)(2)(3);用另一种方法表示下列集合(4)(5)(6).

(1)21 的正约数构成的集合;

(2)x^2-9 的一次因式组成的集合;

(3)直角坐标系下第二象限内的点组成的集合;

(4)$\left\{x\,\middle|\,x(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-2)(x^2+2)=0,x\in\mathbf{Q}\right\}$;

(5)$\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;

(6)$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\right\}$.

14.(考点5)已知 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{6}{3-x}\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{Z}\right\}$,试用列举法表示集合 A.

15.(考点2)已知含有三个元素的集合 $M=\{x,xy,x-y\}$,$N=\{0,|x|,y\}$,且 $M=N$.求 x、y 的值.

16.(考点4)已知集合 $M=\{x|x=a+b\sqrt{2},a、b\in\mathbf{Q}\}$,若 $x_1\in M,x_2\in M$.

(1)试问:$x_1\cdot x_2,\frac{x_1}{x_2}$是否属于 M?为什么?

(2)若将 M 改为 $M=\{x|x=a+b\sqrt{2},a、b\in\mathbf{Z}\}$,试问:$x_1\cdot x_2,\frac{x_1}{x_2}$是否属于 M?为什么?

第2讲 集合之间的关系

课标解读

1.能识别给定集合的子集，理解子集、真子集的概念.

2.理解两集合相等的含义，会用子集的观点来解释两个集合相等.

3.在具体情境中了解空集的含义并理解空集是任何集合的子集的规定.

4.初步认识Venn图并会用Venn图来表示两个集合的关系，能借助集合关系与其特征性质之间的关系来研究有关集合的问题.

学法导引

本讲学习的重点是理解集合之间的包含关系，会由相等集合的条件解决一些问题，同时会写出给定集合的子集，特别要注意空集在具体情境中对解题的影响，并注重数形结合、分类讨论思想在研究集合关系时的应用.

考点分类例析

考点1 求集合的子集

核心总结

1.子集

(1)子集的定义

对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，我们就说集合A包含于集合B，或集合B包含集合A，记作

$$A\subseteq B(\text{或 }B\supseteq A).$$

这时我们也说集合A是集合B的子集.

(2)需注意的几点

①"A是B的子集"的含义是：集合A中的任何一个元素都是集合B中的元素，即由任意$x\in A$，能推出$x\in B$.

②当A不是B的子集时，我们记作"$A\not\subseteq B$"(或$B\not\supseteq A$)，读作："A不包含于B"(或"B不包含A").

例如：$A=\{a,b,c\}$不是$B=\{b,c,d,e,f\}$的子集.因为A中的元素a，不是集合B中的元素.

③任何一个集合是它本身的子集.因为，对于任何一个集合A，它的任何一个元素都属于集合A本身，记作$A\subseteq A$.

④空集是任何集合的子集，即对于任一集合A，有$\varnothing\subseteq A$.

⑤在子集的定义中，不能理解为子集A是B中的"部分元素"所组成的集合.因为若$A=\varnothing$，则A不含任何元素；若$A=B$，则A中含有B中的所有元素，但此时都说集合A是集合B的子集.

(3)Venn图

为了直观地表示集合间的关系，我们常用封闭曲线的内部表示集合，利用它可对集合关系进行图形语言表示，如$A\subseteq B$可表示为图2-1.

图2-1

2.分清几种符号之间的联系与区别

(1)$\subseteq$、$\subsetneqq$、$\not\subseteq$

"$\subseteq$"表示子集(包含)关系，"$\subsetneqq$"表示真子集关系，"$\not\subseteq$"表示不包含的关系，它们都是用于集合之间关系的符号.

(2)$\in$与$\subseteq$，$\notin$与$\not\subseteq$

"$\in$"与"$\notin$"是用于元素与集合之间的关系符号，"$\subseteq$"与"$\not\subseteq$"是用于集合之间关系的符号.

如 $3\in\{1,3,5,7,9\}$，$2\notin\{1,3,5,7,9\}$，

因此，$3\subseteq\{1,3,5,7,9\}$是错误的，但$\{3\}\subseteq\{1,3,5,7,9\}$就是正确的.

(3)认识0，$\{0\}$，$\varnothing$之间的关系

"0"是数，表示元素；$\{0\}$表示仅含0的单元素集合；"$\varnothing$"为空集，它不含任何元素.

它们之间的关系是$0\in\{0\}$，$0\notin\varnothing$，$\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

考题 1　满足条件$\{1,2\}\subsetneqq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合 M 的个数是(　　).

A. 3　　B. 6　　C. 7　　D. 9

【解析】确定 M 中元素的组成情况即可求解.

由已知得:集合 M 必含有 1 和 2,且至少有一个不同于 1 和 2 的元素,故符合条件的集合 M 为$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,5\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,2,3,4,5\}$,共 7 个,故选 C.

【变式 1-1】(1)满足条件$\{x\mid x^2+1=0\}\subseteq M\subseteq\{x\mid x^2-1=0\}$的 M 为________;

(2)(2005,天津)满足条件$M\subseteq\{1,2,3\}$的集合个数是________;

(3)已知$\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4\}$,求满足条件的集合 A.

方法视窗

1. 考题 1 中,(1)利用子集的定义解题,可根据元素个数由少到多来分类处理.(2)分析结果中的 7 个集合,若去掉每个集合中的元素 1,2 便得到$\{3\}$,$\{4\}$,$\{5\}$,$\{3,4\}$,$\{3,5\}$,$\{4,5\}$,$\{3,4,5\}$,这恰为$\{3,4,5\}$的非空子集,即每一个符合条件的 M 对应$\{3,4,5\}$的一个非空子集,求符合条件的 M 的个数即对应求$\{3,4,5\}$的非空子集个数.这种在两个集合的元素间建立一一对应关系,通过求一个集合元素的个数达到求另一集合元素个数的方法正是解决数学问题的一种重要思想方法——“对应”的思想方法.

2. 对于求集合的子集问题,一定要注意有两个集合比较特殊,即空集$\varnothing$和集合本身.因此解决这类问题时,

(1)要注意对符号$\subseteq$、$\subsetneqq$的辨析;

(2)合理使用分类讨论的思想,按集合元素个数多少分类写出.

考点 2　集合关系的判断

核心总结

1. 集合相等

(1)如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素,我们就说集合 A 等于集合 B,记作 $A=B$,读作 A 等于 B.

(2)需注意以下三点:

①证明:若 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

因为 $A\subseteq B$,所以 A 的元素都是 B 的元素;又因为 $B\subseteq A$,所以 B 的元素都是 A 的元素,这就是说,集合 A 与集合 B 的元素是完全相同的,因而我们说 A 与 B 是相等的集合.

②上面定义的证明给出我们证明两个集合相等的方法,即欲证 $A=B$,只需证 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 都成立即可.

③图形语言——Venn 图表示为图 2-2.

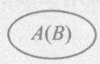

图 2-2

2. 真子集

如果 $A\subseteq B$,且 $A\neq B$,就说集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

(1)图形语言——Venn 图表示为图 2-3.

(2)空集是任何非空集合的真子集.即$\varnothing\subsetneqq A$,且 $A\neq\varnothing$.

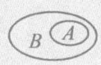

图 2-3

3. 常见性质

(1)$\varnothing\subseteq A$;(2)$\varnothing\subsetneqq A$,且 $A\neq\varnothing$;(3)$A\subseteq A$;(4)$A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.

考题 2　(1)集合 $M=\{0,1\}$,$N=\{y\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{N}\}$,则 M、N 的关系是(　　).

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $N\subsetneqq M$　　D. 不确定

(2)下列说法:①空集没有子集;②任何集合至少有两个子集;③空集是任何集合的真子集;④$\varnothing\subsetneqq A$,则 $A\neq\varnothing$,其中正确的有(　　).

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个