现代远程教育教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编　冯海亮

副主编　王仁健

重庆大学出版社

http://www.cqup.com.cn

高等数学

GAODENG SHUXUE

高等数学

主　编　冯海亮
副主编　王仁健
参　编　毛　琪　姚　云

重庆大学出版社

内容提要

本书是为网络本科层次学历教育编写的高等数学教材，内容紧扣全国网络教育统考“高等数学考试大纲”的最新要求，在尽量保持教材内容的系统性和完整性的前提下，适当降低了某些内容的理论深度，更加突出对微积分中有重要应用背景的概念、理论、方法和实例的介绍. 所选的习题突出能力的基本训练而不过分追求技巧，使教材易教易学，方便自学. 全书内容共分 8 章，分别为函数与极限、一元函数微分学、不定积分学、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数和常微分方程.

本书也可作为应用本科、高职专科和成人教育相关专业的高等数学教材或学生的学习参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/冯海亮主编. —重庆：重庆大学出版社，2008.7
（现代远程教育系列教材）
ISBN 978-7-5624-4521-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.高等数学—远距离教育—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 076619 号

高等数学

主　编　冯海亮
副主编　王仁健
责任编辑：曾显跃　谢　芳　　版式设计：曾显跃
责任校对：文　鹏　　责任印制：赵　晟

*

重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学（A 区）内
邮编：400030
电话：（023）65102378　65105781
传真：（023）65103686　65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（市场营销部）
全国新华书店经销
重庆升光电力印务有限公司印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：18.25　字数：456千
2008年7月第1版　2008年7月第1次印刷
印数：1—5 000
ISBN 978-7-5624-4521-0　定价：29.50元

前言

本书是重庆大学网络教育学院组织编写的现代远程教育高等数学全国统一考试用书，使用对象为教育部批准的现代远程教育试点高校网络教育学院和中央广播电视大学“人才培养模式改革和开放试点”项目中自2004年3月1日（含3月1日）以后入学的本科学历教育的学生。

本书是为适应全国网络教育统考高等数学的教学需要而编写的．在编写时紧扣全国网络教育统考“高等数学考试大纲”的基本要求，遵循网络教育应用型人才的培养目标，针对从业人员继续教育的特点，坚持以“应用”为目的，以“掌握概念、强化应用、培养能力”为重点，以“必需、够用”为度的原则．书中加“*”号的内容仅为高等数学A考试大纲要求内容，加“**”号的内容仅为高等数学B考试大纲要求内容，未作标注部分为高等数学A与高等数学B大纲共同要求的内容．为了便于教学和自学，在概念的介绍过程中力求由实际问题出发，在文字表述上努力做到详尽通畅、浅显易懂，在习题配置上降低技巧难度而进一步突出大纲要求的基本题．

全书包括函数与极限、一元函数微分学、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数和常微分方程等8章内容，各节均配有较为丰富的例题和习题，书末附有习题参考答案，以方便学生自学．

本书第1章、第3章、第4章、第5章由冯海亮编写，第7章、第8章由王仁健编写，第6章由毛琪编写，第2章由姚云编写．全书由冯海亮担任主编，王仁健担任副主编．

本书由重庆大学叶仲全教授和重庆师范大学高世泽教授审阅，并提出许多中肯有益的修改意见．编写过程中得到重庆大学城市学院毛琪副教授、重庆大学网络教育学院符云清教授的大力支持与帮助，作者在此向他们谨致谢意．

由于经验和水平所限，书中难免存在不足之处，希望得到读者的批评指正．

编　者

2008年5月

目录

第 1 章

函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象. 所谓函数关系就是变量之间的对应关系. 极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章介绍函数、函数的极限和函数的连续性等概念.

1.1 函数的基本概念

1.1.1 集合与区间

(1)集合

在数学中,把任意指定的有限多个或无限多个事物所组成的总体称为一个集合,通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示,组成集合的事物称为该集合的元素. 若事物 a 是集合 M 的一个元素,就记 $a\in M$(读作 a 属于 M);若事物 a 不是集合 M 的一个元素,就记 $a\notin M$(读作 a 不属于 M);集合有时也简称为集.

注意

①对于一个给定的集合,要具有确定性的特征,即对于任何一个事物或元素,能够判断它属于或不属于给定的集合,二者必居其一.

②对于一个给定的集合,其中的元素应是互异的,完全相同的元素,不论数量多少,在一个集合里只算作一个元素,就是说,同一个元素在同一个集合里不能重复出现.

③若一集合只有有限个元素,就称为**有限集**;否则称为**无限集**;不含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$,空集是任何集合的子集.

(2)集合的表示法

表示集合的方法,常见的有列举法和描述法两种.

列举法:按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号{ }括起来,这种方法称为列举法.

例如,方程 $x^2+2x-3=0$ 根的集合 A,可表示为 $A=\{-3,1\}$.

描述法:设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则,把满足 $P(a)$ 的所有元素 a 构成的集合 A 表示为 $A=\{a\mid P(a)\}$,这种方法称为描述法.

例如,由不等式 $x-3>2$ 的解构成的集合可表示为 $A=\{x\mid x>5\}$,由抛物线 $y=x^2+3$ 上

的点(x,y)构成的集合可表示为$A=\{(x,y)\mid y=x^2+3\}$.

全体自然数的集合记为$\mathbf{N}$,全体整数的集合记为$\mathbf{Z}$,全体有理数的集合记为$\mathbf{Q}$,全体实数的集合记为$\mathbf{R}$.以后在不特别说明的情况下考虑的集合均为实数集.

(3)**集合间的基本关系**

若集合A的元素都是集合B的元素,即若有$x\in A$,必有$x\in B$,就称A为B的子集,记为$A\subset B$或$B\supset A$(读作B包含A).显然,$N\subset Z\subset Q\subset R$.若$A\subset B$,同时$B\subset A$,就称$A,B$相等,记为$A=B$.

(4)**区间**

设a和b都是实数,且$a<b$,则数集$\{x\mid a<x<b\}$称为**开区间**,记作(a,b),即$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.a和b称为开区间(a,b)的端点,这里$a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.

数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**,记作$[a,b]$,即$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.$a$和$b$称为闭区间$[a,b]$的端点,这里$a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

类似地还有:

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

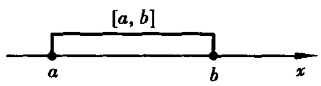
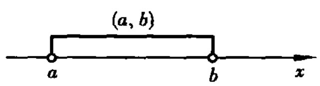
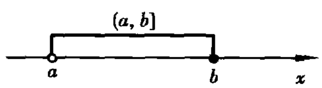
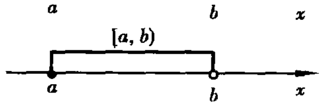
$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间,数$b-a$称为这些区间的长度.从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段.此外还有无限区间,引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),则可类似地给出下面的无限区间:

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$$

区间可以在数轴上直观地表示出来,如表1.1所示.

表1.1

区间的名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或$a\leqslant x<b$	$(a,b]$或 $[a,b)$	

(5)**邻域**

设δ是任一正数,a为某一实数,把数集$\{x\mid |x-a|<\delta\}$称为点a的δ邻域,记作$U(a,$

$\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此，$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$，也就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的集合.

例如：$|x-2|<1$，即为以点 $a=2$ 为中心，以 1 为半径的邻域，也就是开区间 $(1,3)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$. 这里，$0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

例如：$0<|x-2|<1$，即为以点 $a=2$ 为中心，半径为 1 的去心邻域 $(1,2)\cup(2,3)$.

1.1.2　函数概念

在观察自然现象、经济或工程技术活动中，常常会遇到各种不同的量，它们之间往往不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的. 相互依赖的变量之间的确定关系，在数学上就称为变量之间的函数关系.

引例 1　圆的面积 A 与其半径 r 之间的相互关系为 $A=\pi r^2$，当 r 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，就可以由上式确定圆面积 A 的对应数值.

引例 2　某气象站用自动记录仪记录下某地一昼夜气温的变化情况，图 1.1 是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图，其中横坐标表示时间 t，纵坐标表示温度 T，它形象地表示出温度 T 随时间 t 变化而变化的规律，对于某一确定的时间 $t(0\leqslant t\leqslant 24)$，就有一个确定的 T 值与之对应.

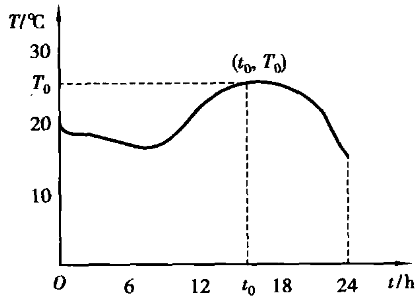


图 1.1

引例 3　某商店记录了毛线历年来的月销售量（单位：kg），并将近 10 年来的平均月销售量列成表，如表 1.2 所示。

表 1.2

月　份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 S	81	84	45	49	9	5	6	17	94	161	144	123

表 1.2 表示了该商店毛线的销售量 S 与月份 t 之间的相互关系，且当 t 在 $1,2,3,\cdots$ 中任意取定一个数值时，从表中就可以确定一个平均月销售量 S 的对应值.

以上引例，其具体意义虽各不相同，但它们有一个共同的特点，就是它们都表达了两个变量之间的相互关系，并为这种关系给出了一种对应规则，根据这一规则，当其中一个变量在其变化范围内任取一个数值时，另一变量就有确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的本质. 于是抽象成如下函数定义.

(1) 函数定义

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于任意给定的 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f，总有确定数值与 x 对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

其中数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量，y 的取值范围称为函数

的值域. $y=f(x)$在几何上通常表示二维空间 xOy 平面上的一条曲线. 对于任意 $x\in D$,若 y 只有唯一数值与之对应,则称 $y=f(x)$为单值函数,否则称为多值函数,这里主要讨论单值函数. 函数通常用解析式(如引例1)、图形(如引例2)或表格(如引例3)来表示.

由函数的定义可知,两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应法则完全相同. 如 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,而且对应法则也相同,故$f(x)=g(x)$,而函数$f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$由于定义域不同,故$f(x)\neq g(x)$.

对任意实数 x,记$[x]$为不超过 x 的最大整数,称$f(x)=[x]$为取整函数. 例如,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$,$[-\pi]=-4$,函数$[x]$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为整数集.

(2)函数定义域的求法

关于函数定义域 D 的确定,一般原则是:

①对于反映实际问题的函数关系,其 D 由所研究的实际问题确定.

②对于纯数学上的函数关系,其 D 规定为使函数表达式保持有意义的一切自变量的全体. 常见的规律有:分数的分母不能为零;负数不能开偶次方;零和负数不能取对数;$\arcsin x$,$\arccos x$ 要求 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 等,同时含有上述式子时,要求是使各部分都成立的交集.

例 1.1 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$　　(2)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(3)$y=\dfrac{\arcsin(x-1)}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$

解 (1)当 $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$ 时,函数 y 才能取得确定的函数值,故 y 的定义域为 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x<-1$ 或 $x>1$,取其交集得$[-2,-1)\cup(1,2]$.

(2)当 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$ 时,函数 y 才能取得确定的函数值,故 y 的定义域为 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$,取其交集得$[-1,0)\cup(0,1]$.

(3)当 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $25-x^2>0$ 时,函数 y 才能取得确定的函数值,故 y 的定义域为 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $25-x^2>0$,即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|<5$;亦即 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$,取其交集得$[-4,5)$.

例 1.2 设$f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 1)$,求

(1)$f(f(x))$　　(2)$f(f(f(x)))$　　(3)$f(f(f(0)))$

解 (1)$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{x}{x-1}\div\left(\dfrac{x}{x-1}-1\right)=\dfrac{x}{x-1}\div\dfrac{1}{x-1}=x$.

(2)由(1)可知$f(f(f(x)))=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

(3)由(2)可知$f(f(f(0)))=\dfrac{0}{0-1}=0$.

例 1.3 设$f(x-1)=\dfrac{1}{x}$,求$f(x)$.

解　令 $x-1=t$,则 $x=t+1$,于是得 $f(t)=\frac{1}{t+1}$,所以 $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

(3)**分段函数**

用公式法表示两个变量间的函数关系,简明、准确、完整,同时还便于理论推导,微积分学中常采用这种表示函数的方法.但在用公式法表示函数时,有时会遇到必须用两个或两个以上的式子来分段给出,才能完整而准确地将两个变量间的函数关系表示出来,这就是所谓的分段函数.

例 1.4　求函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\geqslant 1\\ x-1, x<1\end{cases}$ 的定义域和值域.

解　该函数是一个分段函数,$x=1$ 为分段点,其定义域 D 为 $(-\infty,+\infty)$,值域 W 为 $(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$.

例 1.5　求函数 $y=f(x)=|x|$ 的定义域和值域.

解　该函数是一个分段函数,也称为绝对值函数,分段点为 $x=0$,其定义域为所有实数,值域为非负实数.

例 1.6　设函数 $y=f(x)=\begin{cases}-1+x^2, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1+x^2, & x>0\end{cases}$,试求 $f(-1)$、$f(0)$、$f(1)$.

解　该函数是一个分段函数,当 $x<0$ 时,$f(x)=-1+x^2$,故 $f(-1)=0$,$f(0)=0$;当 $x>0$ 时,$f(x)=1+x^2$,故 $f(1)=2$.

需要特别说明的是:分段函数是一个函数,不要把分段函数误认为有几个表达式就看成几个函数,而且分段函数的函数值是用自变量所在区间相对应的那个式子去计算.

1.1.3　复合函数

若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 E,$u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,若 $W\cap E\neq\varnothing$($\varphi(x)$ 的值域是 $f(u)$ 的定义域的子集),则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由中间变量 u 复合成的复合函数.

例 1.7　函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=2+\sin x$ 能否构成复合函数?

解　函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域为 $E=[0,+\infty)$,函数 $u=2+\sin x$ 的值域 $W=[1,3]$,后一函数的值域和前一函数的定义域交集非空,所以,这两个函数可以构成复合函数,即 $y=\sqrt{2+\sin x}$,其定义域为所有实数.

注意:并非任意两个函数都能复合成一个复合函数. 例如 $y=\sqrt{u}$,$u=\sin x-2$ 就不能构成复合函数,请读者思考一下为什么.

例 1.8　函数 $y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$ 可以看作是 $y=\arctan u$,$u=2^v$,$v=\sqrt{x}$ 复合而成的复合函数.

例 1.9　设 $f(x)=x^2$,$g(x)=3x$,试求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解　分析两个函数的定义域和值域,可知两个函数可以构成复合函数,故 $f[g(x)]=f(3x)=9x^2$,$g[f(x)]=g(x^2)=3x^2$.

例 1.10　设 $f(\sin t)=1+\cos 2t$,试求 $f(x)$,$|x|\leqslant 1$.

解　因为 $f(\sin t)=1+\cos 2t=1+1-2\sin^2 t=2(1-\sin^2 t)$,故 $f(\sin t)=2(1-\sin^2 t)$,此函数可以看作是 $f(x)=2(1-x^2)$ 和 $x=\sin t$ 复合而成,从而 $f(x)=2(1-x^2)$.