高考成功宝典丛书

高考考点精析

数学

徐涛萍 主编
家庭教育时报社 策划

一线专家权威指点◎
热点考点精辟解析◎
一册在手轻松应考◎
宝典助你走向成功◎

文匯出版社

《家庭教育时报》是一份以中、小学生和家长为主要读者对象的彩色周报，是上海地区唯一一张为优化家庭教育服务的报纸。

旗下的《家庭教育时报·高招周刊》是上海市教育考试院与上海教育报刊总社《家庭教育时报》联合主编，上海唯一、及时、全面发布高考招生资讯，为中学和高三学生提供相关系统服务的权威性、专业性周报。

本套书由家庭教育时报社与文汇出版社联袂策划，约请沪上资深专业教师精心撰写，权威性，专业性和实用服务性兼具，是上海考生高考复习的捷径、家长和学校老师及时了解高招政策信息的必备读物。

ISBN 978-7-80741-476-6

9 787807 414766 >

定价:25.00元

高考成功宝典丛书

高考考点精析

数学

徐涛萍 主编

家庭教育时报社 策划

一线专家权威指点

热点考点精辟解析

一册在手轻松应考

宝典助你走向成功

图书在版编目(CIP)数据

高考考点精析·数学 / 徐涛萍主编. —上海：文汇出版社，1905.7

(高考成功宝典丛书)

ISBN 978-7-80741-476-6

Ⅰ.高… Ⅱ.徐… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 004540 号

·高考成功宝典丛书·

高考考点精析·数学

主　　编 / 徐涛萍
副 主 编 / 周肖军
编　　写 / 汪祖亨　张林森　徐颖倩　陆美萍
　　　　　王文颐　曾　盛　徐正旺

责任编辑 / 张　衍
特约编辑 / 赵晓军　周俊峰
封面装帧 / 张　晋

出版发行 / 文汇出版社
　　　　　上海市威海路 755 号
　　　　　(邮政编码 200041)
经　　销 / 全国新华书店
照　　排 / 南京展望文化发展有限公司
印刷装订 / 上海建工印刷厂
版　　次 / 2009 年 1 月第 1 版
印　　次 / 2009 年 1 月第 1 次印刷
开　　本 / 787 × 1092　1/16
字　　数 / 280 千
印　　张 / 12.5

ISBN 978-7-80741-476-6
定　　价 / 25.00 元

序

学生十年寒窗，家长含辛茹苦，这样的言语足以形容“家有高考生”的家庭. 如果你是一位即将参加高考的考生，如何提高自己的成绩？如何填报志愿？选择哪些学校？选择哪些专业？这一定是你迫切考虑的问题.

如果你是考生家长，除了牵挂孩子的前途，一定也在心疼他，担心他的身体. 同时，希望能给孩子一些好的帮助和建议.

作为编者，我们中大部分人对此也是深有体会. 从1977年恢复高考至今，高考就是社会常年关注的一件大事. 每年，上海都有数万名，乃是十多万考生参加高考，更有无数家庭和家长在背后支持着他们. 无论是复习、志愿填报，还是心理调适、营养健康，对考生而言都很重要，也是家长们关心的四个主要方面.

对于大家的关注点，市场上也出现了大量的书籍和资料. 从质量上来看，不乏好的作品. 但也有很多书籍属于鱼目混珠，只在意包装和宣传，内容上存在很多错误和偏差，误导了读者.

本着对读者高度负责的态度，我们潜心组织了在教学第一线的权威教师，撰写了这套“高考成功宝典”系列丛书. 他们都是常年从事高中教学的优秀教师，根据他们多年的教学经验，剖析了近年高考的考点与走势，不搞题海战术，抓住高考的重点、难点、热点，细致深入地加以解析，让考生能节约时间并充分掌握教学要求. 另外，我们还特别邀请了多年从事高招宣传的资深媒体人，撰写如何填报高考平行志愿的分册，让考生不要因为填报志愿的失误，错失进入自己心仪大学的机会.

质量是我们所追求的目标. 只有高质量、专业的书籍，才能为考生复习、填报志愿等提供准确、详实的信息. 限于目前的条件，我们先出版了关于志愿填报、语文、数学和英语复习的四册图书，供考生和家长参考.

一切为了考生，希望我们倾力打造的这套丛书，能真正帮助考生和家长们理清思路，并在日后的复习和高考中稳定发挥，在填报志愿时目标明确、心中有底. 最后，我们衷心祝愿广大考生都能在高考中获得满意的成绩，走进理想的大学！

主编　徐涛萍

编 者 的 话

从酷暑到寒冬，高三学子系统地经历了近半年的数学知识的系统复习. 由于高中数学面广量大，能力要求高，形式复杂多变，因此对众多基础中等的学生来说，不但心理上有畏惧的阴影，而且面临着还有哪些缺陷有待及时诊断；还有哪些基本技能有待及时梳理；还有哪些考纲要求有待及时显化；还有哪些创新能力有待及时激活；还有哪些课本"冷角"有待及时巩固的悬念. 这些疑团都挤压着我们的考生、家长和教师，当时间之钟跨入2009年时，急迫之情更为凸现. 疑团能否取得迅速的突破；能否尽快通过精确的诊断，有效地调节复习方案；能否准确定位，在尽快提高成绩的同时，心理上亦能平和的梳理，成为莘莘学子接下来几个月复习中的关键要点.

我们正是基于以上想法，立足于帮助广大基础中等的同学在数学知识与技能的提升中尽快有一个突破，编写了本书，并具体考虑到：

(1) 仔细研究上海市近年来高考命题的规律，求解通法和创新问题的发展趋势，设计与之呼应的重点知识专题和重要数学方法专题，力求通过讲、练，有序的激活相关能力.

(2) 每一专题既可适合课堂讲解的形式，也可通过自学的形式来实施，具体的设计都估计到课时容量，配套训练和分层要求. 选材上追求新颖、典型、实用和举一反三.

(3) 每一专题首先都归纳知识要点，方法规律和高考热点的表现. 在随后的范例介绍中，重视展现思维过程、揭示常见陷阱、凸现变式规律、渗透数学方法、指导解题策略. 在系统训练中让学生(尤其是中等基础的学生)学会思考，掌握方法，发展潜能.

(4) 落实课改精神，关注新增内容，八个重点知识专题和六个数学思想方法专题都与新课标的重点要求密切相关，十六套高中数学知识点再现的训练题充分考虑到跨度、覆盖、新颖的因素，为学生自查和填漏补缺搭建了良好的平台.

(5) 考虑到五月下旬各校完成复习后的一段时间的针对性实战模拟的需要，我们编了两套高考模拟卷.

本书编者都是上海市各重点中学的资深教师，有的是教研组长，有的是区学科带头人且都有多年指导高考复习的经验.

我们期待本书在帮助高三学生的后半段复习中能尽快地充实应试经验，高效地提升能力，取得良好的效果.

此外，限于时间仓促和作者的水平，书中的差错和不足之处在所难免，我们诚恳地期待广大师生在用书过程中给予指教、帮助，以便在改编中进一步完善.

目　　录

第一篇

重点知识专题讲练

第一讲　函数的概念与性质

函数是高中数学中有引领作用的一个重点内容，它所涉及的概念与性质贯穿于中学数学的各个单元，它从数量关系上反映了现实世界中变量之间的相互依赖、相互制约的变化规律．用函数的观点和方法去分析、解决问题就是用运动变化的观点去审视问题中的数量关系，它寓配方、换元、待定系数法、一元二次方程的判别式和韦达定理、反证法等常用的解题方法为一体，贯穿了函数与方程、分类讨论、数形结合和转化等重要数学思想．由于它与数列、解析几何、向量、图形等问题关系密切，因此也是构造高中数学能力题的一个重要选择点．

【高考热点】

函数的定义域；函数关系的建立；函数的奇偶性、单调性和周期性；函数的最大值与最小值；简单的代数函数性质研究；函数的和与积；反函数的概念；函数图象的平移．

【范例精讲】

例 1　(1) 已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，若函数 $y=f(1+x)$ 的图象经过点$(3,\ 1)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必经过点________．

(2) 若函数 $y=f(x-1)$ 的图像与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $f(x)=$ ________．

解：(1) 由于函数 $y=f(1+x)$ 的图象经过点$(3,\ 1)$，所以 $f(4)=1$，即函数 $y=f(x)$ 的图象经过点$(4,\ 1)$，所以函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象经过点$(1,\ 4)$．

(2) 因为函数 $y=f(x-1)$ 的图像与函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，所以 $y=f(x-1)$ 是函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的反函数，由 $y=\ln\sqrt{x}+1$，得函数 $y=\ln\sqrt{x}+1$ 的反函数为 $y=e^{2(x-1)}(x\in\mathbf{R})$，于是 $f(x-1)=e^{2(x-1)}$，所以 $f(x)=e^{2x}$．

例 2　已知函数 $f(x)$是定义在$[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]$上的奇函数，当 $x\in[-1,\ 0)$ 时，$f(x)=ax+\dfrac{1}{x^2}$．

(1) 求函数 $y=f(x)$在$(0,\ 1]$上的函数解析式；

(2) 当 $a>-2$ 时,判断函数 $y=f(x)$ 在$(0, 1]$上的单调性,并给出证明.

解: (1) 任取 $x\in(0, 1]$,则 $-x\in[-1, 0)$,因为函数 $f(x)$是定义在$[-1, 0)\cup(0, 1]$上的奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)=ax-\dfrac{1}{x^2}$.

(2) 函数 $f(x)$在$(0, 1]$上为单调递增函数.

证明: 任取 $x_1, x_2\in(0, 1]$,$x_1<x_2$,$f(x_2)-f(x_1)=ax_2-\dfrac{1}{x_2^2}-ax_1+\dfrac{1}{x_1^2}=(x_2-x_1)\left(a+\dfrac{1}{x_1x_2^2}+\dfrac{1}{x_1^2x_2}\right)$,由于 $x_1, x_2\in(0, 1]$,$x_1<x_2$,所以 $x_2-x_1>0$,$\dfrac{1}{x_1x_2^2}>1$,$\dfrac{1}{x_2x_1^2}>1$,当 $a>-2$ 时,$a+\dfrac{1}{x_1x_2^2}+\dfrac{1}{x_1^2x_2}>0$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$,即函数 $f(x)$在$(0, 1]$上为单调递增函数.

思考: 如果把问题(2)改为已知函数 $y=f(x)$ 在$(0, 1]$上的单调递增,求 a 的取值范围.如何解答?

例 3 设函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{|x+a|+a}$.($a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$)

(1) 分别判断当 $a=1$ 及 $a=-2$ 时函数的奇偶性.

(2) 在 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$ 的条件下,将(1)的结论加以推广,使命题(1)成为推广后命题的特例,并对推广的结论加以证明.

解: (1) 当 $a=1$时,$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+1|+1}$,由 $1-x^2\geqslant0$,得$-1\leqslant x\leqslant1$,所以$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$,又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\neq-f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(x)$为非奇非偶函数;

当 $a=-2$ 时,$f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{|x-2|-2}$,由 $4-x^2\geqslant0$, 得 $-2\leqslant x\leqslant2$,所以 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{-x}$,$x\in[-2, 0)\cup(0, 2]$, 且 $f(-x)=-f(x)$, $f(x)$ 为奇函数.

(2) 当 $a>0$ 时,$f(x)$ 为非奇非偶函数;当 $a<0$ 时, $f(x)$为奇函数.

$a>0$ 时,由 $a^2-x^2\geqslant0$, 得 $-a\leqslant x\leqslant a$, 所以 $f(x)=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x+2a}$,

可以验证: 对任意的 $a>0$, $f\left(\dfrac{a}{2}\right)\neq f\left(-\dfrac{a}{2}\right)$, $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)\neq-f\left(\dfrac{a}{2}\right)$, $f(x)$为非奇非偶函数.

$a<0$ 时,由 $a^2-x^2\geqslant0$, 得 $a\leqslant x\leqslant-a$, 所以 $f(x)=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{-x}$, $x\in[a, 0)\cup(0, -a]$, 并且对定义域中任意的 x,$f(-x)=-f(x)$ 成立, $f(x)$为奇函数.

例 4 已知函数 $f(x)=\log_3(3^x-1)$,

(1) 求函数 $f(x)$的定义域；

(2) 求证函数 $f(x)$在$(0, +\infty)$内单调递增.

(3) 若 $f^{-1}(x)$是函数 $f(x)$的反函数，设 $F(x)=f^{-1}(2x)-f(x)$，求函数 $F(x)$的最小值及对应的 x 值.

解：(1) 由 $3^x-1>0$,得 $x>0$，所以函数 $f(x)$的定义域为$(0, +\infty)$；

(2) 设 x_1，x_2 是$(0, +\infty)$内的两个任意实数，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\log_3(3^{x_1}-1)-\log_3(3^{x_2}-1)$$

又$(3^{x_1}-1)-(3^{x_2}-1)=3^{x_1}-3^{x_2}<0$,所以 $3^{x_1}-1<3^{x_2}-1$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,所以 $f(x_1)<f(x_2)$，函数 $f(x)$在$(0, +\infty)$内单调递增.

(3) 由 $y=\log_3(3^x-1)$，得 $f^{-1}(x)=\log_3(3^x+1)$，

$$F(x)=f^{-1}(2x)-f(x)=\log_3\frac{3^{2x}+1}{3^x-1}=\log_3\left[(3^x-1)+\frac{2}{3^x-1}+2\right]$$

$(3^x-1)+\dfrac{2}{3^x-1}\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $3^x-1=\dfrac{2}{3^x-1}$,即 $x=\log_3(\sqrt{2}+1)$

所以当 $x=\log_3(\sqrt{2}+1)$ 时,$F(x)$ 最小值为 $\log_3(2\sqrt{2}+2)$.

例 5 设函数 $g(x)=\sqrt{x}+1$,函数 $h(x)=\dfrac{1}{x+3}$，$x\in(-3, a]$,其中 a 为常数且$a>0$，令函数 $f(x)$为函数 $g(x)$和 $h(x)$的积函数.

(1) 求函数 $f(x)$的表达式,并求其定义域;

(2) 当 $a=\dfrac{1}{4}$ 时,求函数 $f(x)$的值域;

(3) 是否存在自然数 a,使得函数 $f(x)$的值域恰为$\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$? 若存在,试写出所有满足条件的自然数 a 所构成的集合;若不存在,试说明理由.

解：(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$,$x\in[0, a](a>0)$.

(2) 因为 $a=\dfrac{1}{4}$，所以函数 $f(x)$的定义域为$\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$，令$\sqrt{x}+1=t$,则 $x=(t-1)^2$，$t\in\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$,则 $f(x)=F(t)=\dfrac{t}{t^2-2t+4}=\dfrac{1}{t+\dfrac{4}{t}-2}$，

因为$t=\dfrac{4}{t}$ 时,$t=\pm2\notin\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$,又 $t\in\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$时,$t+\dfrac{4}{t}$ 递减，所以 $F(t)$单调递增，

所以 $F(t)\in\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{6}{13}\right]$,即函数 $f(x)$的值域为$\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{6}{13}\right]$.

(3) 假设存在这样的自然数 a 满足条件，令$\sqrt{x}+1=t$，

则 $f(x)=F(t)=\dfrac{t}{t^2-2t+4}=\dfrac{1}{t+\dfrac{4}{t}-2}$,因为$x\in[0, a](a>0)$,则$t\in[1, \sqrt{a}+1]$，要

满足值域为$\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$，只要满足$F(t)_{\max} = \frac{1}{2}$，由于当且仅当$t = \frac{4}{t} \Rightarrow t = 2$时，有$t + \frac{4}{t} \geqslant 4$中的等号成立，且此时$F(t) = \frac{1}{2}$恰为最大值，所以$2 \in [1, \sqrt{a}+1] \Rightarrow a \geqslant 1$，

又$F(t)$在$[1, 2]$上是增函数，在$[2, \sqrt{a}+1]$上是减函数，

所以$F(\sqrt{a}+1) = \frac{\sqrt{a}+1}{a+3} \geqslant \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < a \leqslant 9$，综上，得$1 \leqslant a \leqslant 9$，$a \in \mathbf{N}$.

【巩固提高】

一、填空题：

1. 函数$f(x) = \frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$的定义域为________.

2. 函数$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$，$x \in \left\{x \left| \frac{x+1}{x-1} \geqslant 0\right.\right\}$，则$f(x)$的奇偶性为________.

3. 若$\alpha \in \left\{-1, -3, \frac{1}{3}, 2\right\}$，则使函数$y = x^{\alpha}$的定义域为$\mathbf{R}$且在$(-\infty, 0)$上单调递增的$\alpha$值为________.

4. 设$f(x) = \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right)$是奇函数，则使$f(x) < 0$的$x$的取值范围是________.

5. 设函数$y = f(x)$存在反函数$y = f^{-1}(x)$，且函数$y = x - f(x)$的图象过点$(1, 2)$，则函数$y = f^{-1}(x) - x$的图象一定过点________.

6. 函数$y = \begin{cases} x+1, x < 0, \\ e^x, \quad x \geqslant 0 \end{cases}$的反函数是________.

7. 设奇函数$f(x)$在$(0, +\infty)$上为增函数，且$f(1) = 0$，则不等式$\frac{f(x) - f(-x)}{x} < 0$的解集为________.

8. 设定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x) \cdot f(x+2) = 13$，若$f(1) = 2$，则$f(99) =$________.

二、选择题：

9. 函数$f(x) = \frac{1}{x} - x$的图像关于 (　　)

(A) y轴对称　　(B) 直线$y = -x$对称

(C) 坐标原点对称　　(D) 直线$y = x$对称

10. “函数$f(x)(x \in \mathbf{R})$存在反函数”是“函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数”的 (　　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

11. 若函数$f(x)$，$g(x)$分别是$\mathbf{R}$上的奇函数、偶函数，且满足$f(x) - g(x) = e^x$，则有 (　　)

(A) $f(2) < f(3) < g(0)$　　(B) $g(0) < f(3) < f(2)$

(C) $f(2) < g(0) < f(3)$　　(D) $g(0) < f(2) < f(3)$

12. 已知函数 $f(x) = 2^{x+3}$，$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $mn = 16(m, n \in \mathbf{R}^{+})$，则 $f^{-1}(m) + f^{-1}(n)$ 的值为　（　　）

(A) -2　　(B) 1　　(C) 4　　(D) 10

三、解答题：

13. 已知二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$，若 $f(x)$ 在 y 轴上的截距为 2，且对任意的 x 满足 $f(1+x) = f(1-x)$.

(1) 求函数 $f(x)$的解析式；(2) 当 $x \in [t, 5]$时，求函数 $f(x)$的最大值.

14. 设 $f(x) = a^x + b$ 同时满足条件 $f(0) = 2$ 和对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+1) = 2f(x) - 1$ 成立.

(Ⅰ) 求 $f(x)$的解析表达式；

(Ⅱ) 设函数 $g(x)$的定义域为$[-2, 2]$，且在定义域内，$g(x) = f(x)$. 求 $g^{-1}(x)$；

(Ⅲ) 求函数 $y = g(x) + g^{-1}(x)$ 的值域.

15. 已知函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+m}+x)$，$(a>0, a\neq 1)$ 为奇函数，

(1) 求实数 m 的值；(2) 求 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$；

(3) 若两个函数 $F(x)$与 $G(x)$在$[p, q]$上恒满足 $|F(x)-G(x)|>2$，则称函数 $F(x)$与 $G(x)$在$[p, q]$上是分离的. 试判断函数 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$ 与 $g(x)=a^x$ 在$[1, 2]$上是否分离？若分离，求出 a 的取值范围；若不分离，请说明理由.

16. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足：对任意实数 m，n，总有 $f(m+n)=f(m)f(n)$，且当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$.

(1) 试求 $f(0)$的值；

(2) 判断 $f(x)$的单调性并证明你的结论；

(3) 设 $A=\{(x, y) \mid f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)\}$，$B=\{(x, y) \mid f(ax-y+\sqrt{2})=1, a\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，试确定 a 的取值范围.

(4) 试举出一个满足条件的函数 $f(x)$.

第二讲　函数与方程

在理解和掌握函数概念、性质、图象的基础上，能以函数为载体，观察、审视有关问题. 通过构建函数模型揭示问题的本质，揭示问题的内在联系，将函数、方程、不等式等思想方法互相交融，经过组合，在更高层次上得到再现.

函数思想与方程思想的联系十分密切，方程问题往往可以转化为函数问题来处理，函数知识类的问题也可借助方程来解决，充分体现了等价转换的数学思想.

【高考热点】

指数方程、对数方程；方程的解的个数问题、二次方程零根分布；二分法求方程的近似解；代数方程与函数图象之间的关系等.

【范例精讲】

例 1　如果对数方程 $\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{x^2-1})=a$ 有解，求实数 a 的取值范围.

解： 设 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{x^2-1})$，则原方程有解的充要条件是 a 在函数 $f(x)$ 的值域内取值，下面求函数 $f(x)$ 的值域.

由 $x+\sqrt{x^2-1}>0$ 得，$\sqrt{x^2-1}>-x \Leftrightarrow x\geqslant 1$，所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $[1, +\infty)$，而函数 $u=x+\sqrt{x^2-1}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增，所以函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{x^2-1})$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)\leqslant \log_{\frac{1}{2}}1=0$，即 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0]$，所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

说明： 构造函数，将方程问题转化为对函数性质（值域、最大值与最小值等）的研究，是解决方程有解、无解问题及不等式恒成立等问题的有效方法.

例 2　(1) 已知函数 $f(x)=\log_3\left(\frac{4}{x}+2\right)$，则方程 $f^{-1}(x)=4$ 的解 $x=$ ________.

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (0\leqslant x\leqslant 1) \\ 2^x & (-1\leqslant x<0) \end{cases}$，则 $f^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)=$ ________.

解： (1) 根据反函数的定义，在原函数中 $f(4)=1$ 即为方程 $f^{-1}(x)=4$ 的解，所以方程 $f^{-1}(x)=4$ 的解为 1.