理工数学系列教材

GaoDeng ShuXue FuXi ZhiDao

高等数学复习指导

（第二版）

龚灏 主编

电子科技大学出版社

013
245
2003

高等数学复习指导

（第二版）

龚　灏　主编

电子科技大学出版社

内容摘要

本书(第二版)由编者参照国家教育部高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》,在第一版的基础上重新编写而成. 第二版对第一版作了较大的修改和补充,汲取了广大教师在微积分教学中特别是使用本书第一版以来总结的经验,旨在帮助学习者更好地掌握教材内容,提高他们应用数学知识解决实际问题的能力。

全书根据高等数学的结构特征,分为八个单元,每一单元包括目标要求、基本内容与结构、典型例题、练习和单元检测及参考解答四个部分。本书结构简洁,针对性强,例题类型多样,注重知识的系统性和解题过程的方法分析。

本书可作为高等工科院校专科、本科学生学习高等数学的辅导教材;也可作为研究生应试的复习资料,还可为工科高等数学课程教学的教师提供参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学复习指导/龚灏主编.—2版.—成都:电子科技大学出版社,2003

ISBN 7-81065-545-0

Ⅰ.高...　Ⅱ.龚...　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 078482 号

高等数学复习指导

(第二版)

龚　灏　主编

安徽理工大学 藏书 图書馆

出　　版:电子科技大学出版社　(成都建设北路二段四号,邮编:610054)

责任编辑:许宜伟

发　　行:新华书店经销

印　　刷:电子科技大学出版社印刷厂

开　　本:787×1092　1/16　**印张** 17.25　**字数** 468 千字

版　　次:2003 年 9 月第二版

印　　次:2003 年 9 月第二次印刷

书　　号:ISBN7-81065-545-0/O・20

印　　数:5001～10000

定　　价:19.00 元

前　言

伴随着人类社会的发展，新世纪的来临，面对新的挑战，高等教育改革方兴未艾．围绕全面的素质教育，培养学生的创新思维，进一步提高解决问题的能力，已成为面向21世纪课程体系和教学内容改革的关键，而编写既适合于未来发展需要，又适应于学习者学习的各学科教材和教学指导书，便成了当务之急．本书是普通高等工科院校数学课程改革系列教材之一，是在众多教师多年来从事高等数学教学所积累经验的基础上，广泛吸收国内外有关同类书籍的先进之处，按照高等数学教学改革的基本思路，针对当前普通工科院校高等数学教学中存在的掌握知识难、做题难、解决实际问题更难等方面的现状编写而成，旨在帮助学习者较好地掌握教材内容，形成良好的知识体系，解决好高等数学做题难的问题，进一步提高学习者应用数学知识解决实际问题的能力．

全书根据高等数学内容的结构特征，分作八个单元，每一单元由目标要求、基本内容及结构、典型例题、练习与单元检测及参考答案四个部分构成．在目标要求中，通过“掌握、熟练掌握；明确、理解、逐步理解、深刻理解；初步了解、了解”等不同层次要求，使学习者不仅能明确本单元的学习目标要求，同时也从中认识到该单元的重点内容．目标要求力求做到层次分明，重、难点突出，要求具体，针对性强．在基本内容及结构中，概括性地给出了各单元的基本内容，并根据各个不同部分的内容特征，给出了结构框图，力求做到简洁、明了、清晰，同时强调各知识间的相互联系，知识的产生发展过程，注重知识内容结构上的共性特征．在典型例题中，注重选择有代表性的、有共性的、能体现重、难点内容的例题，包括学习者易犯的常见错误分析等等．在练习与单元测试中，将练习分作三类：一是基础练习，这是最基本的训练要求，主要针对专科层次学习者的需求；二是提高练习，是在基础练习基础上的提高，主要针对本科层次学习者的需求；三是综合练习，是针对少部分学有余力，对数学有特别爱好的学习者的需求，也是针对部分学习者考研的需要．练习的不同类型反映由易到难的思维训练过程，同时也满足了不同层次的学习者的需要．而单元测试分作A、B两套，其用意在于通过A套测试，寻找到本单元的薄弱环节之后，通过重新学习、巩固，再进行B套测试，不断强化，测试要求主要以一般工科院校本科水平为准．

本复习指导书结构简洁，内容翔实，有较强的针对性，注重数学知识的结构，注重不同层次学习者的需求，习题和单元测试的选排较有新意，特别注重了重点内容的强化，难点内容的突破，除此之外，还具有以下几方面的特色：

1．注重数学思想、方法的归纳总结．随着科学技术的发展，数学科学成为与自然科学和社会科学并列的人类发展进步的三大基础学科，数学知识水平的高低已成为衡量创新人才综合素质水平程度的重要因素之一．对工科学习者而言，数学的作用，已不仅是工具性的，而是培养思维能力，提高思维素质的重要途径．作为土科院校重要基础理论课的高等数学，围绕全面素质教育这一教学改革的核心问题，进一步提高教学质量，培养创新人才，已成为高等数学课程改革的关键，教学中注重数学思想、方法的教学已成为必然．为此，本书在具体内

容和例题分析中，十分注重数学思想方法的体现，对一些重要的概念，如函数、极限、连续、积分、微元分析法等等，专门单列出来，进行了数学思想方法的归纳、总结，学习者应仔细研读这些内容，并认真加以体会.

2. 进一步加强了数学知识结构体系. 全书不仅每一单元给出了整体的结构框图，而且对各个单元具体的相对独立的内容也给出了结构框图，这一方面有利于学习者进一步了解知识间的相互联系和产生发展过程；另一方面从认知心理学理论的角度看，把学习过程放入知识系统中来进行，也有利于意义学习的实现；同时，作为复习指导书，也有利于学习者形成良好的数学知识系统. 数学不仅仅是解题，更重要的是在形成了良好数学知识系统的基础上，通过解题来发展思维，提高分析问题、解决问题的能力，只有这样才能突破数学解题难，解决实际问题困难的状况.

3. 注重解题过程的分析、归纳. 大多数例题后都给出了解题的分析、思考过程，并对例题进行了归纳、总结和推广，特别强调一题多解，多题一解，对不同解法进行了对比，力求使学习者通过例题的学习，较好地掌握解题的分析、思考方法，提高解题的技能、技巧. 例题选排按知识产生发展过程进行，对一些典型问题，则进行了系统的分类总结，如求极限的不同类型，不定积分、定积分的计算等等，特别是对应用定义（概念）解题这一学习者感到较为困难的问题，作了较好的分析、总结，如极限定义证明，导数定义的应用，积分上限函数的应用等.

本书是众多教师多年在教学第一线辛勤工作的成果，龚灏同志任主编，提出了本书的编写提纲并负责组稿. 分工执笔编写的是：第一单元龚灏；第二单元季光明；第三单元周卓儒；第四单元邹锡苏；第五单元陈聆；第六单元胡灿；第七单元楚道玉；第八单元周仲礼. 袁勇老师承担了本书大量的校对和部分习题的选编工作. 本书是在魏贵民教授、胥泽银教授、郭科教授的悉心指导下完成的，魏贵民教授确定了本书基本编写思想，并为本书编写提纲提出了许多宝贵的意见；胥泽银教授担任本书主审，多次反复审阅了全部书稿，对编写内容和本书的整体结构体系提出了重要的修改意见；郭科教授参乎了本书编写的讨论工作，并对本书风格体系的形成，提出了许多建设性的意见，谨此表示深深的谢意！此外，本书编写过程中还得益于王元君老师、梁莉老师、刘锐老师及应用数学系其他老师的帮助，在此一并向他们表示感谢.

由于水平有限，疏漏之处在所难免，恳请不吝指正.

编　者

二〇〇〇年六月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二版前言

本书是我们根据国家教育部高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》，在第一版的基础上重新编写而成的．与第一版比较，主要有以下几个方面的变化：

1．对于全书的基本内容部分，我们在汲取了我校教师在微积分教学中，特别是使用本书第一版以来总结的经验的基础上，认真进行了编写，对于基本概念的叙述力求深入浅出、清晰准确；对于例题的选编力求典型、充实；对于各章练习及单元检测题的选择力求体现教学中的不同层次的要求，使学习者根据自己的学习目标有针对地选择练习．

2．调整了无穷级数部分在全篇中的位置，将它安排在一元积分学之后；场论的相关内容也从常微分方程部分调到了多元积分学部分，便于学习者更好地理解和学习第二类曲线积分和第二类曲面积分．

3．改变了一元积分学部分的编写方式，从内容的本质联系入手，将不定积分和定积分的叙述总结融合起来，使读者更清楚地把握二者的内在联系．4．练习与单元检测部分，在保持三个不同层次的练习的同时，将单元检测 A、B 改编、综合成了一套检测题，题目的选编适于学习者完成练习之后自行定时检测，测试要求以一般工科院校本科水平为准．

本书由龚灏主编，第二版参与编写的有：龚灏、袁勇、季光明、周卓儒、楚道玉、陈聆、胡灿、周仲礼．龚灏和袁勇承担了本书从组稿、修订到校对等工作．魏贵民教授审阅了全书，提出了不少宝贵意见．郭科教授参与本书的编写讨论工作，提出了许多建设性的意见，谨此表示感谢！

由于我们水平有限，不妥和谬误之处一定难免，恳请读者和使用本书的教师批评指正．

编　者

2003 年 6 月

目　录

第一单元　函数、极限与连续

本单元涉及内容是整个《高等数学》的基础，其中，函数及其相关内容是我们研究讨论的基本对象，极限及其相关内容是我们研究讨论的基本工具，而连续则是应用这一基本工具（极限）对基本对象（函数）的一种基本特性的深刻描述．同时，本单元知识内容中隐含了许多重要的数学思想和方法，这些思想和方法是整个《高等数学》讨论解决问题的重要的基本思想和方法，领会和掌握好这些思想方法，也是学好《高等数学》的关键所在．不言而喻，本单元的学习，对后续学习具有十分重要的基础意义．

一、目标要求

1．深刻理解函数的概念及其基本思想．

2．明确函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性及其相应的几何形态．

3．理解复合函数的概念，了解反函数的概念．

4．掌握基本初等函数的性质及图形．

5．会从简单的实际问题中，概括抽象出函数关系式．

6．深刻理解极限的概念及其基本思想（对极限概念的分析定义在学习过程中逐步加深，对用分析定义证明极限不作过高要求）．

7．掌握极限的四则运算法则，并在极限运算中熟练应用．

8．明确极限存在的两个重要准则（夹逼准则和单调有界准则），会用两个重要极限求极限．

9．明确无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限．

10．深刻理解函数连续的概念，明确间断点的概念，会判别间断点的类型．

11．明确闭区间上连续函数的性质（介值定理和最大、最小值定理），了解初等函数的连续性．

12．初步了解高等数学的重要的思想方法（如：数学模型化的思想方法，函数的思想方法，极限的思想方法，数形结合的思想方法等），并在学习过程中，逐步领会和掌握．

二、基本内容及结构

（一）函数的基本内容及其结构

1．函数的概念

（1）函数的定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是变量 x 取值的数集，如果对 D 中每个数 x，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$．数集 D 称为这个函数的定义域，数集 $R=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为这个函数的值域，x 称为自变量，y 称为因变量．

若对每个 $x\in D$，对应的 y 值仅有一个，则这种函数称为单值函数，否则称为多值函数，未作特别说明时，函数都是指单值函数.

(2)反函数　设 $w=\{y|y=f(x),x\in D\}$，若对每个 $y\in w$，都有 $x\in D$，使 $f(x)=y$，则 x 是 y 的函数. 记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$. 按照习惯，将自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，则可记为 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$，并称之为 $y=f(x)$ 的反函数.

(3)函数的对应法则

①若函数的对应法则是解析表达式 $y=f(x)$，则称为函数的显式表达.

②若函数的对应法则是由方程 $F(x,y)=0$ 确定，则称 y 为 x 的隐函数.

③若函数的对应法则是由几个解析表达式分段组合表示，则称 y 为 x 的分段函数.

④若变量 x 与 y 之间的对应法则是通过第三个变量联系起来，如：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 则称为参数方程表示的函数.

⑤若变量 x 与 y 的对应法则通过中间变量 u 联系起来，即 $y=f(u)$，$u=g(x)$，且 $g(x)$ 的值域包含于 $f(x)$ 的定义域. 则可确定函数 $y=f[g(x)]$ 称为复合函数. 记为 $y=f[g(x)]$ 或 $y=(f\circ g)(x)$.

(4)基本思想　①函数概念揭示的是变量与变量间的一种相互依存关系，定义的对象是这种依存关系本身，这与用什么符号去表示两个变量，用什么方式去刻划这一关系无关. 一般来讲，函数的表示法有解析式(包括按定义域分段给出的不同表达式，称为分段函数)、几何图示法、列表对映法、关系描述法等；②决定函数关系式的基本要素是定义域和对应法则(关系)，前者决定了函数的变化范围，后者刻划的是变量与变量间以怎样的方式相互依存；③对单值一元函数 $y=f(x)$ 而言：给出任一 x，惟一确定 y，从而惟一确定数对 (x,y)，而 (x,y) 与平面直角坐标系中的一个点一一对应，故一元函数 $y=f(x)$ 与平面曲线一一对应，这是"数(代数)形(几何图形)结合"的数学思想方法的重要基础，而这一思想方法是《高等数学》研究解决问题的一种常用的重要的思想方法.

2. 函数的几种简单的几何形态

(1)有界性　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 M，对 $\forall\ x\in X\subset D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 反之，如果这样的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

(2)单调性　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 若 $\forall\ x_1,x_2\in I\subset D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

(3)奇偶性　设 $y=f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的集合. 若 $\forall\ x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$ 则称 $y=f(x)$ 为奇函数，奇函数图形关于原点对称；若 $\forall\ x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数，偶函数图形关于 y 轴对称.

(4)周期性　设 $y=f(x)$ 定义域为 D，若存在非零常数 T，使对 $\forall\ x\in D$ 都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期，通常所说的周期都是指函数的最小正周期.

3. 函数内容的基本结构(见图 1.1)

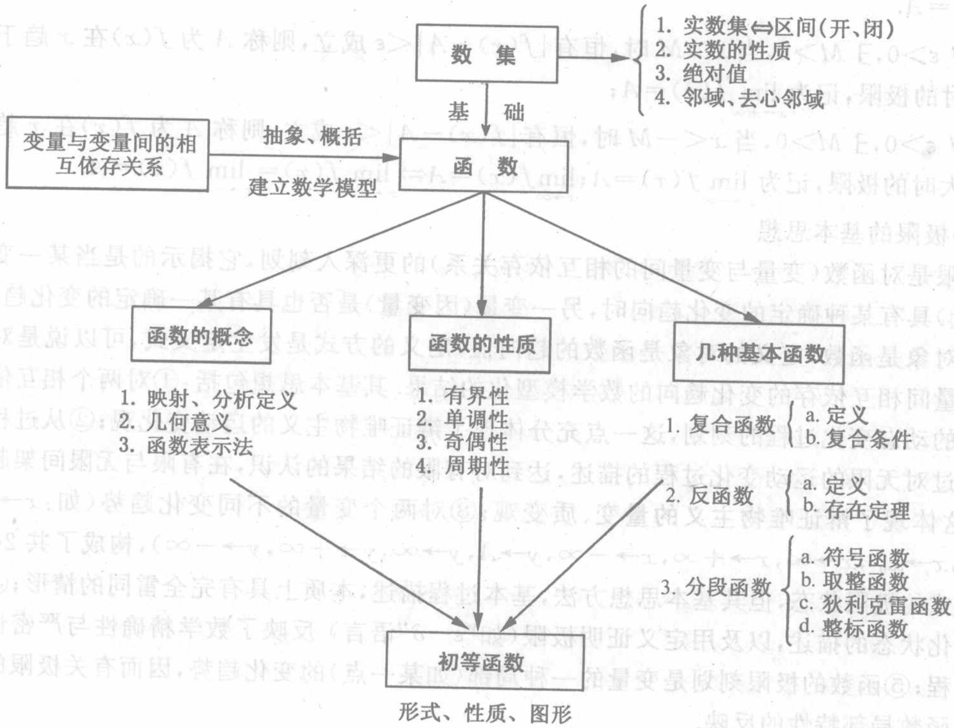

图 1.1

(二)极限的基本内容及其结构

1. 极限的概念

(1)数列的极限　设有数列 $\{u_n\}$ 及常数 A,若 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N > 0$,当 $n > N$ 时,恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$,则称数 A 是数列 $\{u_n\}$ 在 n 趋于无穷大时的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$,这时,也称 $\{u_n\}$ 收敛于 A. 如果 $\{u_n\}$ 没有极限,则称 $\{u_n\}$ 是发散的.

(2) 函数的极限　设有函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域(记为 $N(\hat{x}_0, \delta)$)有定义,A 为常数.

若 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立,则称 A 为 $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

若 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立,则称 A 为 $f(x)$ 的右极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

若 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$,当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立,则称 A 为 $f(x)$ 的左极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

设函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 或 $(-\infty, -a)$ $(a > 0)$ 内有定义,A 为常数,若 $\forall\ \varepsilon > 0$,存在正数 M,当 $|x| > M$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立,则称 A 为 $f(x)$ 在 x 趋于无穷大时的极限,记为

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

若$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ M>0$,当$x>M$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立,则称$A$为$f(x)$在$x$趋于正无穷大时的极限,记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$;

若$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ M>0$,当$x<-M$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立,则称$A$为$f(x)$在$x$趋于负无穷大时的极限,记为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$;$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(3)极限的基本思想

极限是对函数(变量与变量间的相互依存关系)的更深入刻划,它揭示的是当某一变量(自变量)具有某种确定的变化趋向时,另一变量(因变量)是否也具有某一确定的变化趋向.讨论的对象是函数,定义的对象是函数的趋向值,定义的方式是发生定义式,可以说是对变量与变量间相互依存的变化趋向的数学模型化的结果.其基本思想包括:①对两个相互依存的变量的动态变化过程的刻划,这一点充分体现了辩证唯物主义的运动变化观;②从过程上看是通过对无限的运动变化过程的描述,达到对有限的结果的认识,在有限与无限间架起了桥梁,这体现了辩证唯物主义的量变、质变观;③对两个变量的不同变化趋势(如:$x\to x_0$,$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$,$y\to A$,$y\to\infty$,$y\to+\infty$,$y\to-\infty$),构成了共24种不同形式的极限状态,但其基本思想方法,基本过程描述,本质上具有完全雷同的情形;④对变量变化状态的描述,以及用定义证明极限(如"$\varepsilon-\delta$"语言)反映了数学精确性与严密性的思想过程;⑤函数的极限刻划是变量的一种局部(如某一点)的变化趋势,因而有关极限的性质都是函数局部特性的反映.

2. 无穷小量

如果$\lim f(x)=0$,则称$f(x)$为自变量x在某种趋向下($x\to x_0$,$x\to\infty$等)的无穷小量,简称无穷小.

注 *无穷小(量)是极限值为零的一类函数.*

(1)无穷小的运算:

①有限个无穷小的代数和为无穷小;

②有界函数与无穷小的乘积为无穷小;

③有限个无穷小的乘积为无穷小;

④无穷小除以非零常数为极限的函数之商为无穷小.

(2)无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,若$f(x)$是无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小;若$f(x)$是无穷小,且$f(x)\neq0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

(3)无穷小与函数极限的关系

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$,则$\lim\alpha=0$,即$\alpha$为无穷小量.

3. 极限的四则运算

若$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则 ①$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;②$\lim[f(x)g(x)]=A\cdot B$;③若$B\neq0$,$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A/B$.

4. 极限的性质

(1)惟一性 若$\lim f(x)=A$,$\lim f(x)=B$,则$A=B$.

(2) 有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 及 $M>0$，$\forall\ x\in N(\hat{x}_0,\delta)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

注　这是 $f(x)$ 在 x 附近的局部有界性.

(3) 保号性　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N(\hat{x}_0,\delta)$，$\forall\ x\in N(\hat{x}_0,\delta)$ 恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）；逆命题：若存在 $N(\hat{x}_0,\delta)$，$\forall\ x\in N(\hat{x}_0,\delta)$ 有 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$）且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

5. 极限存在准则、两个重要极限

(1) 夹逼准则　若存在 $N(\hat{x}_0,\delta)$，$\forall\ x\in N(\hat{x}_0,\delta)$ 恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 特别地，若有数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足：$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

(2) 单调有界准则　单调有界数列必有极限.

①若数列 $\{x_n\}$ 单调递增有上界，则 $\{x_n\}$ 有极限，且极限为上界中最小的界；

②若数列 $\{x_n\}$ 单调递减有下界，则 $\{x_n\}$ 有极限，且极限为下界中最大的界.

(3) 两个重要极限：

①　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，或 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to\infty} t\cdot\sin\dfrac{1}{t}=1$；

推广：$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$，其中 $\alpha(x)\neq 0$；

②　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，或 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$，特别：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；

推广：$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$，其中 $\alpha(x)\neq 0$.

6. 无穷小的比较及其等价代换定理

(1) 无穷小的比较　设 $\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$，$(\beta(x)\neq 0)$ 则定义：

①若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，称 α 是 β 的高阶无穷小，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；

②若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，称 α 是 β 的低阶无穷小；

③若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$，称 α 与 β 是同阶无穷小，特别当 $A=1$ 时，称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

④若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=A\neq 0\ (k>0)$，称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

(2) 等价代换定理　设 α、β、α'、β' 是非零无穷小量，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则当 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在时，$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$ 也存在，且 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

常用的等价代换式：当 $x\to 0$ 时，

$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$\mathrm{e}^x-1\sim x$；$a^x-1\sim x\ln a$

$(a>0)$；$\log_a(1+x)\sim\dfrac{1}{\ln a}x(a>0)$；$(1+x)^a-1\sim ax$；$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$.

7. **极限内容的基本结构(见图 1.2)**

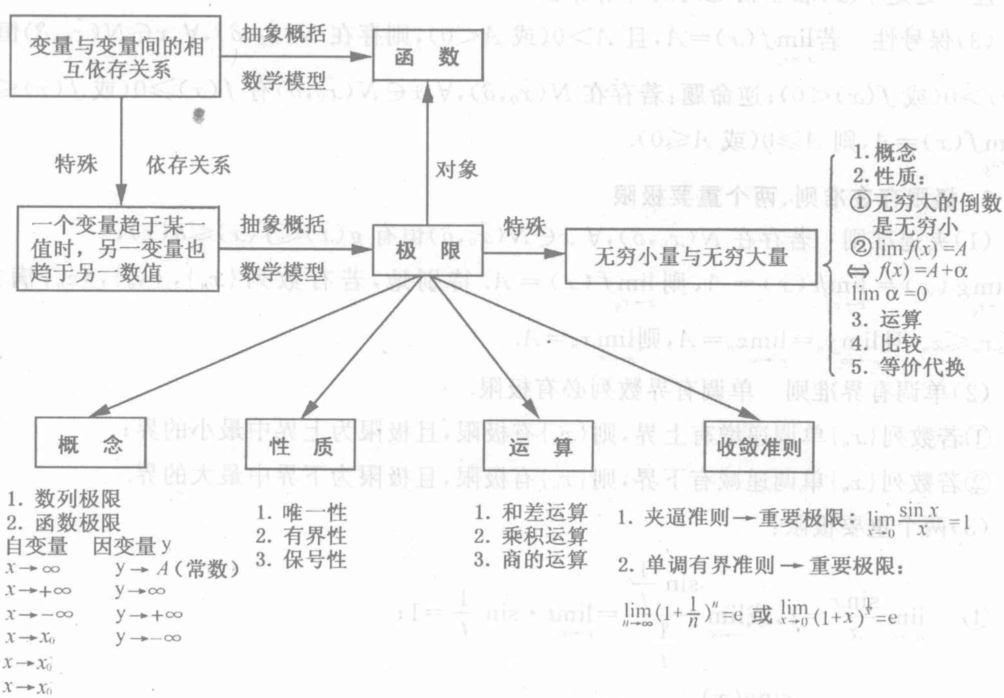

图 1.2

(三)连续的基本内容及其结构

1. 连续的基本概念

(1)在某点的连续性

设 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内有定义，Δx 为自变量 x 在 x_0 点的改变量，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为因变量 y(函数值)的改变量，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，即：$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N(x_0,\delta)$，当 $x\in N(x_0,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\Delta y=0$ 成立，则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\Delta y=0$ 成立，则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续.

(2)在区间上的连续性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，当 D 为开区间时，若 $f(x)$ 在 D 内每一点连续，则称 $f(x)$ 在 D 上连续；当 D 为闭区间时，若 $f(x)$ 在区间 D 内每一点连续且在区间 D 的左端点右连续，右端点左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 D 上连续.

(3)连续的基本思想

①连续是对函数极限的更深刻描述，一般来讲函数在 x_0 点的极限值与 x_0 无关，而连续不仅有关且极限值就是函数值，因而连续是极限值为函数值的特殊极限，进而可以用连续这一概念将函数分为连续与不连续两大类.

②从几何形态看，连续函数表示的是一段没有间断的连续曲线，它表明随着自变量 x 的变化，函数值 $f(x)$ 的变化是一个连续的没有跳跃的变化过程，从而我们将更加容易地把握 $f(x)$ 的变化状况.

③函数的极限刻划的是变量间的一种局部（如某一点）的变化趋势，而连续通过点到区间的连续性，将这种局部属性发展为一种整体属性，这从闭区间上连续函数的性质中不难体现.

2. 函数的间断点及分类

函数 $y=f(x)$ 的所有不连续点，均称为 $f(x)$ 的间断点. 间断点产生于以下情形之中：① $f(x)$ 没有定义的点；② $f(x)$ 有定义但极限不存在的点；③ $f(x)$ 有定义、有极限但极限值不等于函数值的点.

间断点一般分为两类：

第一类间断点　$f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限都存在，

当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 时，称 x_0 为第一类中的跳跃间断点；

当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$ 时，称 x_0 为第一类中的可去间断点.

第二类间断点　凡不属于第一类中的间断点，称为第二类间断点. 常见的有无穷间断点（$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 至少有一个是无穷大）和振荡间断点（$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 至少有一个无穷次振荡而不趋于某一确定数值）.

3. 连续函数的运算

(1)连续函数的四则运算

①有限个连续函数的代数和是连续函数：即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\pm g(x_0).$$

②有限个连续函数的乘积是连续函数：即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0).$$

③两个连续函数的商，在分母不为零的点为连续函数，即当 $g(x_0)\neq 0$ 时，有

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)/\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)/g(x_0).$$

(2)连续函数的反函数　严格单调连续函数的反函数是严格单调的连续函数.

(3)连续函数的复合函数　设函数 $y=f(u)=f(\varphi(x))$，而 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，$f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 点连续，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在 x_0 点连续，即

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\varphi(x_0))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))=\lim_{u\to u_0}f(u).$$

(4)初等函数的连续性　基本初等函数在定义域内连续，初等函数在定义域内连续.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1)最大、最小值定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在 ξ_1、$\xi_2\in[a,b]$ 使得：

$\forall\ x\in[a,b]$，有 $f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2)$. $f(\xi_1)$ 和 $f(\xi_2)$ 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小、最大值.

(2)有界定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在 $M>0$，使得：$\forall\ x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3)介值定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，M、m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大、最小值 $(m<M)$，任给 μ 使 $m<\mu<M$，则在 $[a,b]$ 上至少存在一上点 ξ，使 $f(\xi)=\mu$.

推论 1　零点存在定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得：$f(\xi)=0$，ξ 点称为 $f(x)$ 的零点.

推论 2　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调连续且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的零点有且仅有一个.

5. 连续函数的基本结构(见图 1.3)

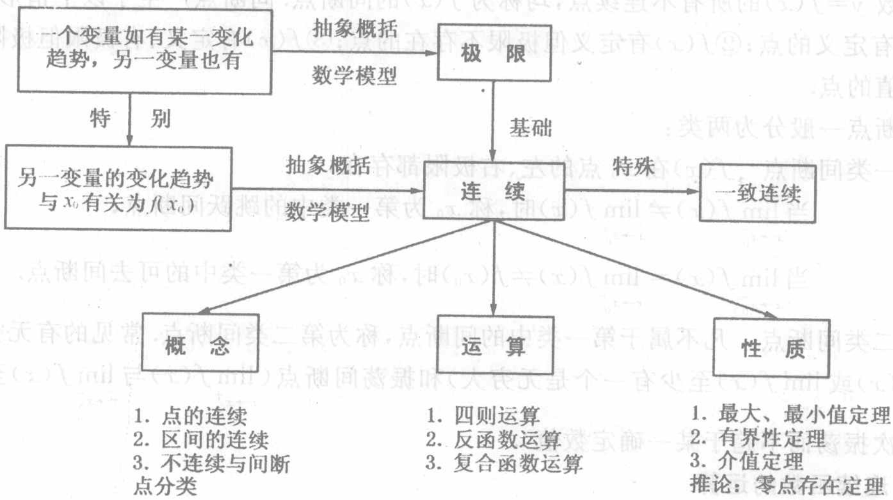

图 1.3

(四)函数、极限、连续的基本结构(见图 1.4)

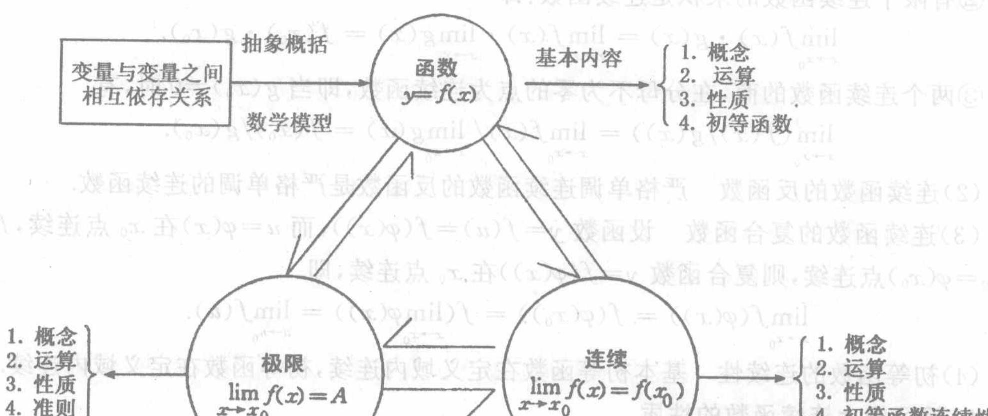

图 1.4

三、典型例题

(一)函数及其性质

1. 关于函数定义域的例子

例 1 下列各组函数中,表示同一个函数的是( ).

A. $y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}$　　B. $y_1=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 与 $y_2=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

C. $y_1=\sqrt{x(x+1)}$ 与 $y_2=\sqrt{x+1}\sqrt{x}$　　D. $y_1=\lg(x^2-1)$ 与 $y_2=\lg(x-1)+\lg(x+1)$

解:判断的依据是函数定义的两个基本要素:定义域与对应法则,若两个函数的定义域与对应法则都相同,则它们表示同一函数;否则它们表示不同的函数.

对于 A:$y_1=\cos x$,$y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|$ 对应法则不同,所以不是同一函数.

对于 B:y_1、y_2 的定义域同为:$\begin{cases}x<1\\x\neq 0\end{cases}$ 在定义域内,$y_1=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}=\dfrac{\ln(1-x)}{x}=y_2$

$\therefore y_1$ 与 y_2 是同一函数.

对于 C:y_1 的定义域为 $x(x+1)\geqslant 0$ 即$(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

y_2 的定义域为:$\begin{cases}x\geqslant 0\\x+1\geqslant 0\end{cases}$ 即$[0,+\infty)$,所以 y_1 与 y_2 定义域不同,故不是同一函数.

对于 D:y_1 的定义域为:$x^2-1>0$ 即$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

y_2 的定义域为:$\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases}$ 即$(1,+\infty)$　$\therefore y_1$ 与 y_2 不是同一函数.

例 2 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(x+4)}+\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解 $\because$ 函数$\dfrac{1}{\lg(x+4)}$的定义域为 $x+4>0$ 且 $x+4\neq 1$;$\sqrt{x^2-x-6}$的定义域为 $x^2-x-6\geqslant 0$;$\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域为$\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$.

其公共解集为

$$\begin{cases}x+4>0\\x+4\neq 1\\x^2-x-6\geqslant 0\\\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-4\\x\neq -3\\x\geqslant 3\text{ 或 }x\leqslant -2\\-3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\Rightarrow\quad 3\leqslant x\leqslant 4\text{ 或 }-3<x\leqslant -2$$

$\therefore$ 原函数的定义域为 $D=(-3,-2]\cup[3,4]$.

注 关于函数定义域的问题,如果函数由实际问题给出,则根据实际背景确定其定义域;如果函数由解析式给出,则只需使解析式有意义.通常考虑:①分母不能为零;②负数不能开偶次方根;③对数的真数大于零;④$\arcsin x$,$\arccos x$ 的定义域为$[-1,1]$.由解析式确定的不等式组,求解即得函数的定义域.

例 3 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,试求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域$(a>0)$.

解 $\because f(x)$的定义域为$[0,1]$,$\therefore f(x+a)+f(x-a)$的定义域为不等式组

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com