



配北师大版
普通高中课程标准实验教科书

Jiaoxue Yu Ceshi



高中

数学与测试

数学

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

- 新课标
- 选修 系列2
- 教师用书

◆ 苏州大学出版社

配北师大版
普通高中课程标准实验教科书

高中数学

教学与测试

选修系列 2

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

· 教师用书 ·



苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学教学与测试:选修. 2/苏州大学《中学数学月刊》编辑部编. —苏州:苏州大学出版社,2008.10
教师用书. 配北师大版普通高中课程标准实验教科书
ISBN 978-7-81137-163-5

I. 高… II. 苏… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 161231 号

Warning

敬告读者

“中学新课标系列‘中学教学与测试’丛书”,封面贴有“非常数码产品身份码标贴”,正版图书刮开标贴,即可通过拨打标贴上提供的免费电话、手机短信(13912993315)或登入 www.bcm.cn 网查证。

如有读者发现有盗印或销售盗版图书的线索,请及时向当地新闻出版和工商行政管理部门举报,或向本社反映。

本社举报电话:0512-67258810

本社邮购联系电话:0512-67258835

网址:www.sudapress.com

电子邮箱:sdcbs@suda.edu.cn

高中数学教学与测试

教师用书

(选修系列 2)

苏州大学《中学数学月刊》编辑部 编

责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)

丹阳市教育印刷厂印装

(地址:丹阳市西门外 邮编:212300)

开本 787×1092 1/16 印张 22.5 字数 561 千

2008 年 10 月第 1 版 2008 年 10 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81137-163-5 定价:36.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835



《高中数学教学与测试》

编委会

(北师大版·选修系列2)

主 任：曹永罗

编 委：仇炳生 丰世富 王广余 王金才

王振羽 石志群 牟鸿君 李平龙

李 生 李 挺 刘卫东 庄 梅

陈兆华 杨浩清 杨建明 吴 铨

张必华 张志朝 张松年 张 健

何学兰 邱尔依 沈琦珉 陆云泉

罗 强 周 超 姜学勤 姚亚军

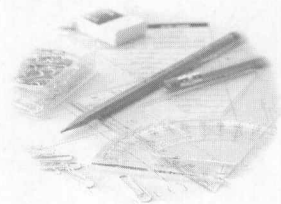
袁长江 顾云良 倪振东 徐稼红

高志雄 陶 冶 嵇国平 蒋建华

蔡玉书 滕冬梅 樊亚东 潘振嵘

潘洪亮 戴中寅

责任编辑：邱尔依



前言

PREFACE

普

通高中课程标准实验教科书(数学)已在多个省市开始实验并在全国部分省市进一步扩大使用.为了及时向广大高中学生和数学教师提供一套与新教材配套的高质量的教辅用书,我部聘请了部分参加教材编写的中学特级教师和高级教师,经过精心策划,编写了与北师大版教材配套的“高中数学教学与测试”系列用书.它既可作为学生的练习用书,也可作为教师的教学参考用书.本书是选修系列2(包括2-1、2-2、2-3).

选修系列2分为学生用书和教师用书两册.学生用书选修2-1包括常用逻辑用语、空间向量与立体几何、圆锥曲线与方程三章;选修2-2包括推理与证明、变化率与导数、导数的应用、定积分、数系的扩充与复数的引入五章;选修2-3包括计数原理、概率、统计案例三章.全书的编写依据课标,紧扣课本,配合课堂教学进行同步训练.原则上每节1课时,共87节.体例结构每节按《知识梳理》、《双基演练》、《例题精讲》、《测试反馈》编排.为方便使用,学生用书采用1+1模式:《知识梳理》、《双基演练》、《例题精讲》自成一册,《测试反馈》单独成册,供课后练习使用.教师用书包括相应学生用书的全部题目及详细的例题、习题解答.

本书由责任编辑策划,全体编委会集体讨论编写大纲,最后由江苏省苏州中学的六位教师执笔:朱威,选修2-1第一、二章;杨利刚,选修2-1第三章;吴芳,选修2-2第一、五章;王思俭,选修2-2第二、三、四章;张默,选修2-3第一、三章;顾燕声,选修2-3第二章.

各章由责任编辑把关,苏州大学数学科学学院五位教师负责审校:沈琦珉(选修2-1第一、三章),周超(选修2-1第二章),邱尔依(选修2-2第二、三、四章),王金才(选修2-2第一、五章),王振羽(选修2-3第一、二、三章).

多年来,全国各地的中学教师、学生以及社会各界对我们编写的中学数学方面的书籍给予了热情的关怀和支持,对于这次根据普通高中课程标准实验教材编写的“高中数学教学与测试”提出了许多有益的建议,在此一并表示感谢.

我们真诚地希望使用本书的老师、学生和家長能及时地将使用的情况和意见反馈给我们,以便我们作进一步的修改和完善.

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

目 录

CONTENTS

选修 2-1

第一章 常用逻辑用语

- 1. 命题及其关系 (1)
- 2. 充分条件和必要条件 (5)
- 3. 全称量词和存在量词 (9)
- 4. 逻辑联结词“且”“或”“非” (12)
- 5. 复习课 (16)

第二章 空间向量与立体几何

- 6. 空间向量及其线性运算 (20)
- 7. 空间向量的数量积 (23)
- 8. 空间向量的正交分解 (27)
- 9. 空间向量的坐标表示和基本定理 (30)
- 10. 习题课 (34)
- 11. 直线的方向向量与平面的法向量 (38)
- 12. 用向量讨论垂直与平行 (41)
- 13. 空间角的计算(1) (45)
- 14. 空间角的计算(2) (50)
- 15. 距离的计算 (54)
- 16. 习题课 (59)
- 17. 复习课 (64)

第三章 圆锥曲线与方程

- 18. 椭圆的标准方程 (69)



19. 椭圆的几何性质	(72)
20. 习题课	(75)
21. 抛物线的标准方程	(79)
22. 抛物线的几何性质	(83)
23. 双曲线的标准方程	(86)
24. 双曲线的几何性质	(90)
25. 习题课	(93)
26. 直线与圆锥曲线的综合问题	(97)
27. 圆锥曲线的统一定义	(102)
28. 曲线与方程	(106)
29. 求曲线的方程	(110)
30. 曲线的交点	(114)
31. 习题课	(118)
32. 复习课	(123)

选修 2-2

第一章 推理与证明

1. 归纳推理	(128)
2. 类比推理	(132)
3. 综合法	(135)
4. 分析法	(138)
5. 反证法	(141)
6. 数学归纳法(1)	(144)
7. 数学归纳法(2)	(148)
8. 复习课	(152)

第二章 变化率与导数

9. 变化的快慢与变化率	(157)
10. 导数的概念	(160)
11. 导数的几何意义	(164)



12. 习题课	(167)
13. 计算导数	(171)
14. 导数的四则运算法则	(174)
15. 简单复合函数的导数	(177)
16. 习题课	(180)
17. 复习课	(183)

第三章 导数的应用

18. 导数与函数的单调性	(187)
19. 函数的极值	(190)
20. 习题课	(194)
21. 实际问题中导数的意义(1)	(197)
22. 实际问题中导数的意义(2)	(201)
23. 函数的最大、最小值	(207)
24. 复习课	(210)

第四章 定积分

25. 定积分背景——面积和路程问题	(215)
26. 定积分的概念	(220)
27. 微积分基本定理	(223)
28. 定积分的简单应用	(227)

第五章 数系的扩充与复数的引入

29. 数系的扩充	(231)
30. 复数的几何意义	(234)
31. 复数的四则运算(1)	(238)
32. 复数的四则运算(2)	(241)
33. 习题课	(244)
34. 复习课	(249)



第一章 计数原理

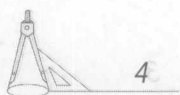
1. 两个基本计数原理	(254)
2. 排列	(257)
3. 组合	(261)
4. 简单计数问题	(265)
5. 二项式定理	(269)
6. 二项式系数的性质及应用	(272)
7. 复习课	(275)

第二章 概 率

8. 随机变量及其概率分布	(279)
9. 超几何分布	(283)
10. 条件概率	(287)
11. 事件的独立性	(291)
12. 二项分布	(296)
13. 习题课	(301)
14. 离散型随机变量的均值	(306)
15. 离散型随机变量的方差与标准差	(312)
16. 正态分布	(317)
17. 习题课	(322)
18. 复习课	(327)

第三章 统计案例

19. 回归分析	(333)
20. 独立性检验	(339)
21. 复习课	(345)



第一章 常用逻辑用语

1. 命题及其关系

知识梳理

本节要求理解四种命题的概念,掌握命题形式的表示;了解命题的逆命题、否命题与逆否命题,会分析四种命题的相互关系,能写出一个简单的命题(原命题)的逆命题、否命题、逆否命题;理解互为逆否命题的两个命题同真或同假,即等价,因此,四种命题中真命题的个数只能是偶数个.

双基演练

1. 下列语句中是命题的为

- ① 空集是任何集合的子集; ② 若 $x > 1$, 则 $x > 2$;
③ 3 比 1 大吗? ④ 若平面上两条直线不相交, 则它们平行;
⑤ $\sqrt{(-2)^2} = -2$; ⑥ $x > 15$.

- A. ①②⑥ B. ①②④ C. ①④⑤ D. ①②④⑤

提示 对命题概念的理解:一般地,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题.判断命题的两个基本条件:必须是一个陈述句;可以判断真假.③是疑问句,故③不是命题;对于⑥,由于 x 是未知数,不能判断“ $x > 15$ ”是否成立,因此,不能判断语句⑥的真假,故选 D.

2. 若命题 p 的逆命题是 q , 命题 p 的否命题是 r , 则命题 q 是命题 r 的

- A. 逆命题 B. 否命题 C. 逆否命题 D. 本身

提示 设命题 p 为“若 m 则 n ”, 则命题 q 为“若 n 则 m ”, 命题 r 为“若非 m 则非 n ”, 故命题 q 是命题 r 的逆否命题, 选 C.

3. 指出下列命题的条件 p 和结论 q :

(1) 若整数 a 能被 2 整除, 则 a 是偶数;

条件 p 为 整数 a 能被 2 整除, 结论 q 为 a 是偶数.

(2) 若四边形是菱形, 则它的对角线互相垂直且平分.

条件 p 为 四边形是菱形, 结论 q 为 它的对角线互相垂直且平分.



4. 将下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式,并判断真假:

(1) 面积相等的两个三角形全等;

若两个三角形的面积相等,则这两个三角形全等. 是假命题.

(2) 负数的立方是负数; 若一个数是负数的立方,则这个数是负数. 是真命题.

(3) 任何一个命题和它的逆否命题等价.

若两个命题互为逆否命题,则它们等价. 是真命题.

说明 要学会区分条件 p 和结论 q , 数学中有一些命题虽然表面上不是“若 p 则 q ”的形式,如“垂直于同一条直线的两个平面平行”,但是把它的形式作适当变化,就可以写成“若 p 则 q ”的形式:“若两个平面垂直于同一条直线,则这两个平面平行”. 这样,它的条件和结论就很清楚了.

5. 在空间中

(1) 若四点不共面,则这四点中任何三点都不共线;

(2) 若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线.

以上两个命题中,逆命题为真命题的是 (2).

解 (1)的逆命题是:在空间中,若四点中任何三点都不共线,则这四点不共面.

我们用正方体 AC_1 作模型来观察:上底面上的 A_1, B_1, C_1, D_1 四点中任何三点都不共线,但 A_1, B_1, C_1, D_1 四点共面,所以(1)的逆命题不真.

(2)的逆命题是:在空间中,若两条直线是异面直线,则这两条直线没有公共点.

由异面直线的定义可知,成异面直线的两条直线不会有公共点.

所以(2)的逆命题是真命题.

说明 本题考查点共线、点共面和异面直线的基本知识,考查命题的有关概念. 一般地,写出一个命题的逆命题、否命题及逆否命题的关键是分清原命题的条件和结论,然后按定义来写;在判断原命题及其逆命题、否命题以及逆否命题的真假时,要借助原命题与其逆否命题同真或同假,逆命题与否命题同真或同假.

例題精讲

例1 下列四个命题中,命题(1)与命题(2),(3),(4)的条件和结论之间分别是什么关系? 命题(2),(3),(4)分别是命题(1)的什么命题? 它们是真命题还是假命题?

(1) 若 $f(x)$ 是正弦函数,则 $f(x)$ 是周期函数;

(2) 若 $f(x)$ 是周期函数,则 $f(x)$ 是正弦函数;

(3) 若 $f(x)$ 不是正弦函数,则 $f(x)$ 不是周期函数;

(4) 若 $f(x)$ 不是周期函数,则 $f(x)$ 不是正弦函数.

解 命题(1)条件 p : $f(x)$ 是正弦函数,结论 q : $f(x)$ 是周期函数,命题(1)是真命题;

命题(2)的条件是命题(1)的结论 q ,而命题(2)的结论是命题(1)的条件 p ,因此命题(2)是命题(1)的逆命题,命题(2)是假命题;

命题(3)为“若非 p 则非 q ”,故命题(3)为命题(1)的否命题,命题(3)为假命题;

命题(4)为“若非 q 则非 p ”,故命题(4)为命题(1)的逆否命题,命题(4)是真命题.



例 2 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题并判断其真假:

- (1) 周长相等的两个三角形全等; (2) 对角线相等的平行四边形是矩形.

解 (1) 原命题:周长相等的两个三角形全等.是假命题.

逆命题:若两个三角形全等,则它们的周长相等.是真命题.

否命题:周长不相等的两个三角形不全等.是真命题.

逆否命题:若两个三角形不全等,则它们的周长不相等.是假命题.

(2) 原命题:对角线相等的平行四边形是矩形.是真命题.

逆命题:如果一个平行四边形是矩形,则这个平行四边形的对角线相等.是真命题.

否命题:对角线不相等的平行四边形不是矩形.是真命题.

逆否命题:如果一个平行四边形不是矩形,则这个平行四边形的对角线不相等.是真命题.

说明 四种命题之间的相互关系(如右图).

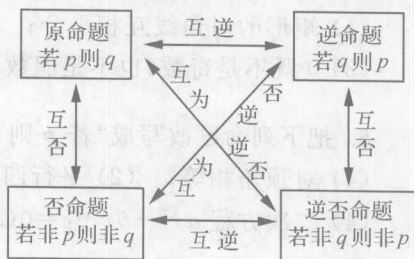
原命题的真假与其他三种命题的真假有如下三个关系:

(1) 原命题为真,它的逆命题不一定为真;

(2) 原命题为真,它的否命题不一定为真;

(3) 原命题为真,它的逆否命题一定为真(原命题与

它的逆否命题同真同假).



例 3 判断下列命题的真假,并加以证明:

(1) 若 $x^2 \neq y^2$, 则 $x \neq y$ 或 $x \neq -y$;

(2) 若 $x+y < 5$, 则 $x < 2$ 且 $y < 3$.

解 (1) 原命题的逆否命题为:若 $x=y$ 且 $x=-y$, 则 $x^2=y^2$.

由于逆否命题是真命题,因此原命题也是真命题.

(2) 原命题的逆否命题为:若 $x \geq 2$ 或 $y \geq 3$, 则 $x+y \geq 5$.

由于逆否命题是假命题,因此原命题也是假命题.

说明 由于互为逆否命题的两个命题有相同的真假性,因此在判断命题的真假时,可以转化为判断其逆否命题的真假.

测试反馈

1. 给出下列六个命题:

① 若直线 $a \parallel b$, 则直线 a 和直线 b 无公共点;

② $2+4=7$;

③ 垂直于同一条直线的两条直线平行;

④ 若 $x^2=1$, 则 $x=1$;

⑤ 两个全等的三角形面积相等;

⑥ 3 能被 2 整除.

其中真命题的个数为

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

提示 要注意③没有“在同一平面内”的条件,是假命题,只有①⑤是真命题,故选 B.



2. 给出下列四个命题:

- ① $3 \geq 3$; ② 两个有理数的和是有理数;
③ 有两个角是锐角的三角形是锐角三角形; ④ 等腰三角形至少有两个内角相等.
其中是真命题的命题的序号为 (D)

A. ① B. ①② C. ①②③ D. ①②④

解 ①真, ②真, ③假, ④真.

3. 命题“若 x, y 是奇数, 则 $x+y$ 是偶数”的逆否命题是 “若 $x+y$ 不是偶数, 则 x, y 都不是奇数”.

4. 判断下列各命题的真假, “真”填“T”, “假”填“F”:

- (1) 矩形的对角线互相平分; (T) (2) 0 是最小的自然数; (T)
(3) 0 既不是奇数, 也不是偶数; (F) (4) 三角形内角和等于 180° . (T)

5. 把下列命题改写成“若 p 则 q ”的形式:

- (1) 对顶角相等; (2) 平行四边形的对角线互相平分; (3) 偶数能被 2 整除;
(4) 二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$, 若判别式 $\Delta > 0$, 则方程有两个不相等的实数根.

解 (1) 若两个角是对顶角, 则这两个角相等.

(2) 若一个四边形是平行四边形, 则其对角线互相平分.

(3) 若一个数是偶数, 则这个数能被 2 整除.

(4) 若二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的判别式 $\Delta > 0$, 则该方程有两个不相等的实数根.

6. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题, 并判断这些命题的真假:

- (1) 实数的平方为正实数; (2) 钝角是第二象限角.

解 (1) 原命题: 若一个数是实数, 则它的平方是正实数. 为假.

逆命题: 若一个数的平方是正实数, 则这个数是实数. 为真.

否命题: 若一个数不是实数, 则它的平方不是正实数. 为真.

逆否命题: 若一个数的平方不是正实数, 则它不是实数. 为假.

(2) 原命题: 若一个角是钝角, 则这个角是第二象限角. 为真.

逆命题: 若一个角是第二象限角, 则这个角是钝角. 为假.

否命题: 若一个角不是钝角, 则这个角不是第二象限角. 为假.

逆否命题: 若一个角不是第二象限角, 则这个角不是钝角. 为真.

7. 判断下列命题的真假, 并写出它的逆命题、否命题、逆否命题, 同时判断它们的真假:

(1) 若 $a=b$, 则 $ac=bc$;

(2) 若圆心到一直线的距离等于半径, 则该直线是圆的切线;

(3) 若在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中, $b^2-4ac < 0$, 则该二次函数的图像与 x 轴有公共点.

解 (1) 该命题为真.

逆命题: 若 $ac=bc$, 则 $a=b$. 为假.

否命题: 若 $a \neq b$, 则 $ac \neq bc$. 为假.



逆否命题:若 $ac \neq bc$, 则 $a \neq b$. 为真.

(2) 该命题为真.

逆命题:若一直线是圆的切线, 则圆心到该直线的距离等于半径. 为真.

否命题:若圆心到一直线的距离不等于半径, 则该直线不是圆的切线. 为真.

逆否命题:若一直线不是圆的切线, 则圆心到该直线的距离不等于半径. 为真.

(3) 该命题为假, 因为当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 没有实根, 因此二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴无公共点.

逆命题:若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴有公共点, 则 $b^2 - 4ac < 0$. 为假.

否命题:若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, $b^2 - 4ac \geq 0$, 则该二次函数的图像与 x 轴没有公共点. 为假.

逆否命题:若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴没有公共点, 则 $b^2 - 4ac \geq 0$. 为假.

拓展迁移

8. 判断下列命题的真假, 并加以证明:

(1) 若 $x + y < 3$, 则 $x < 1$ 或 $y < 2$;

(2) 若 $x \neq 1$ 或 $x \neq 2$, 则 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$.

解 (1) 原命题的逆否命题为:若 $x \geq 1$ 且 $y \geq 2$, 则 $x + y \geq 3$.

由于逆否命题为真命题, 因此原命题也是真命题.

(2) 原命题的逆否命题为:若 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 则 $x = 2$ 且 $x = 1$.

由于逆否命题为假命题, 因此原命题也是假命题.

2. 充分条件和必要条件

* 知识梳理

理解充分条件、必要条件及充要条件的意义, 会判断两个命题的充要关系. 对命题“若 p 则 q ”而言, 当它是真命题时, p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件; 当它的逆命题为真时, q 是 p 的充分条件, p 是 q 的必要条件; 两种命题均为真时, 称 p 是 q 的充要条件. 当 p 和 q 互为充要条件时, 体现了命题等价转换的思想.

在判断充分、必要条件时, 首先要分清哪个命题是条件, 哪个命题是结论; 其次, 论断要分四种情况说明: 充分不必要条件, 必要不充分条件, 充要条件, 既不充分又不必要条件. 从集合角度看, 若记满足条件 p 的所有对象组成集合 A , 满足条件 q 的所有对象组成集合 B , 则当 $A \subseteq B$ 时, p 是 q 的充分条件; $B \subseteq A$ 时, q 是 p 的充分条件; $A = B$ 时, p 是 q 的充要条件. 充要条件的判断, 常用方法有: (1) 直接用充要条件定义判断; (2) 借助四种命题之间的关系间接判断. 若所给命题的真假不易判断, 可以转化为判断它的逆否命题的真假, 因为原命题与其逆否命题是等价的, 即同真或同假.



双基演练

1. $|x+2|>1$ 是 $x>0$ 的 (B)

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

解 由 $x>0$ 可得到 $|x+2|>1$, 而由 $|x+2|>1$ 可得 $x<-3$ 或 $x>-1$, 故选 B.

2. “ $\alpha\neq\beta$ ”是“ $\cos\alpha\neq\cos\beta$ ”的 (B)

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

提示 所给命题的真假不易判断, 我们可以转化为判断它的逆否命题的真假.

3. $p:x>5$ 是 $q:x\geq 5$ 的 充分不必要 条件.

解 显然 $p\Rightarrow q$, 但 $q\not\Rightarrow p$, 故 p 是 q 的充分不必要条件.

4. $p:\sqrt{1+\sin\theta}=a$ 是 $q:\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$ 的 既不充分又不必要 条件.

解 $\sqrt{1+\sin\theta}=a\Rightarrow\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|=a\not\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a,$

而 $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a\Rightarrow 1+\sin\theta=a^2\Rightarrow\sqrt{1+\sin\theta}=|a|\not\Rightarrow\sqrt{1+\sin\theta}=a,$

$\therefore p$ 是 q 的既不充分又不必要条件.

说明 充要条件是数学学习中一个十分重要的概念, 应用很广泛. 解决充要条件问题的方法有:

(1) 直接推理: 由条件 p 出发进行推理, 然后由结论 q 出发进行推理.

① 若 $p\Rightarrow q$, 而 $q\not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分不必要条件, 而 q 是 p 的必要不充分条件;

② 若 $p\Rightarrow q$, 且 $q\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充要条件 (q 也是 p 的充要条件);

③ 若 $p\not\Rightarrow q$, 且 $q\not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

(2) 用集合思想考虑: 如果条件 p 与结论 q 易用集合来描述, 则用集合思想考虑比较简单. 设 $P=\{p\}, Q=\{q\}$,

① 若 $P\subsetneq Q$, 则 p 是 q 的充分不必要条件, 而 q 是 p 的必要不充分条件;

② 若 $P=Q$, 则 p 是 q 的充要条件 (q 也是 p 的充要条件);

③ 若 $P\not\subset Q$ 且 $Q\not\subset P$, 则 p 是 q 的既不充分又不必要条件.

例题精讲

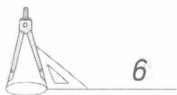
例 1 试判断 p 是 q 的什么条件:

(1) $p:D^2=4F, q:$ 圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切;

(2) $p:a<0, q:$ 方程 $x^2+x+a=0$ 有两个异号的实根;

(3) $p:b^2=ac, q:a, b, c$ 成等比数列.

解 (1) 圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴相切 $\Leftrightarrow \left|-\frac{E}{2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 且 $E\neq 0\Leftrightarrow$



$\begin{cases} D^2-4F=0, \\ E \neq 0, \end{cases}$ 将 $\begin{cases} D^2-4F=0, \\ E \neq 0 \end{cases}$ 形成的集合记作 Q , 而条件 p 形成的集合记作 P , 显然 $Q \subseteq P$,

$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.

(2) 由 $a < 0$ 知 $\Delta = 1 - 4a > 0$ 且 $x_1 x_2 = a < 0$, 故方程有两个异号的实根.

若方程有两个异号的实根, 设为 x_1, x_2 , 由韦达定理知 $x_1 x_2 = a < 0$, $\therefore p$ 是 q 的充要条件.

(3) 若 $b^2 = ac$, 则 a, b, c 未必成等比数列. 例如, $a = b = c = 0$ 时.

若 a, b, c 成等比数列, 则 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, 即 $b^2 = ac$.

$\therefore p$ 是 q 的必要不充分条件.

说明 从上面的例子可以看出, 充分与必要条件问题的正确解答主要还是取决于对问题本身所涉及到的具体教学内容的掌握与理解程度.

例 2 若 A 是 B 的必要不充分条件, C 是 B 的充要条件, D 是 C 的充分不必要条件, 判断 D 是 A 的什么条件.

解 $D \Rightarrow C \Leftrightarrow B \Rightarrow A$, $\therefore D \Rightarrow A$, D 是 A 的充分不必要条件.

说明 (1) 符号“ $\Rightarrow$ ”、“ $\Leftrightarrow$ ”具有传递性, 不过前者是单向的, 后者是双向的.

(2) 充分、必要条件与四种命题的关系:

① 如果 p 是 q 的充分条件, 则原命题“若 p 则 q ”以及逆否命题“若非 q 则非 p ”都是真命题;

② 如果 p 是 q 的必要条件, 则逆命题“若 q 则 p ”以及否命题“若非 p 则非 q ”为真命题;

③ 如果 p 是 q 的充要条件, 则四种命题均为真命题.

例 3 已知 $ab \neq 0$, 求证: $a + b = 1$ 的充要条件是 $a^3 + b^3 + ab - a^2 - b^2 = 0$.

解 **必要性** $\because a + b = 1, \therefore a^3 + b^3 + ab - a^2 - b^2 = a^3 + (1 - a)^3 + a(1 - a) - a^2 - (1 - a)^2 = 0, \therefore$ 必要性成立.

充分性 $\because a^3 + b^3 + ab - a^2 - b^2 = 0,$

$\therefore (a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a^2 - ab + b^2) = 0,$

$\therefore (a + b - 1)(a^2 - ab + b^2) = 0.$

$\because ab \neq 0, \therefore a \neq 0$ 且 $b \neq 0, \therefore a^2 - ab + b^2 \neq 0,$

$\therefore a + b = 1, \therefore$ 充分性成立.

综上所述, $a + b = 1$ 的充要条件是 $a^3 + b^3 + ab - a^2 - b^2 = 0$.

说明 A 的充要条件是 B , 亦说明 B 是 A 的充要条件.

测试反馈

1. $a \in A$ 是 $a \in A \cap B$ 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

提示 因 $A \cap B \subseteq A$, 故若 $a \in A \cap B$, 则 $a \in A$. 但若 $a \in A$, 则未必有 $a \in A \cap B$.

故 $a \in A$ 是 $a \in A \cap B$ 的必要不充分条件, 选 B.



2. 已知 p : 方程 $x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解; q : a, b 是整数, 则 p 是 q 的 (A)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

提示 由“方程 $x^2+ax+b=0$ 有且仅有整数解”易得到“ a, b 是整数”; 反之, 若 a, b 是整数, 方程 $x^2+ax+b=0$ 的解不确定. 因此选 A.

3. 方程 $mx^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件是 (D)

A. $0 < m \leq 1$ 或 $m < 0$

B. $0 < m \leq 1$

C. $m < 1$

D. $m \leq 1$

提示 可以采用补集法, 用逆否命题来求解.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > B$ ”是“ $a > b$ ”的 (C)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

解 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A > B$, 可得 $2R\sin A > 2R\sin B$, 即有 $a > b$; 反之, 若 $a > b$, 则有 $A > B$ (三角形的边角定理), 于是选 C.

5. “在 $\triangle ABC$ 中, $a^2+b^2=c^2$ ”是“ $\triangle ABC$ 为以 c 为斜边的直角三角形”的 充要 条件.
(填: 充分不必要、必要不充分、充要、既不充分又不必要)

解 由勾股定理可得结论, 应该填“充要”.

6. “两个三角形的面积相等”是“两个三角形全等”的 必要不充分 条件. (填: 充分不必要、必要不充分、充要、既不充分又不必要)

解 由“两个三角形的面积相等”推不出“两个三角形全等”; 反之, 若两个三角形全等, 则它们的面积相等, 故应该填“必要不充分”.

7. 试写出使得不等式 $x^2-3x+2 < 0$ 成立的一个必要不充分条件.

解 由 $x^2-3x+2 < 0$, 得 $1 < x < 2$. 故一个必要不充分条件可以是 $x > 0$.

8. 求关于 x 的方程 $|x|-|x-1|=a$ 有解的充要条件.

答案 $-1 \leq a \leq 1$.

提示 把方程问题转化为函数问题求解即可, 如再数形结合, 可以更简捷地得出结论. 对于证明充分必要性的问题, 既要证明充分性, 又要证明必要性, 先证明哪一性质, 由问题的难度来定, 先易后难.

拓展迁移

9. 求证: 关于 x 的方程 $x^2+2ax+b=0$ 有实数根, 且两根均小于 2 的充分不必要条件是 $a \geq 2$ 且 $|b| \leq 4$.

证明 先证充分性, 而必要性只需要通过举反例来否定.
先证明条件的充分性:

