高等学校教材

概率论简明教程

戴朝寿 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

概率论简明教程

戴朝寿　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是作者根据教育部数学与统计学教学指导委员会新近制订的专业教学规范，结合三十多年的教学实践，为了满足高等师范院校概率论课程教学的实际需求编写而成。教材尽可能体现高等师范院校的特点，符合培养目标的要求，既重视基本概念的透析、基本理论的阐述、基本方法的介绍，又特别注重加强知识发生过程的探索，联系实际讲清基本概率模型，注重基本观点的提炼，阐述清楚概率的思想方法，并为读者提供一些与中等学校概率统计有关的教学资料。本书体系完整，富有特色，论述严谨，推导细致，内容充实，通俗易懂，例题精选，习题配套，资料翔实，便于施教。

本书的主要内容有：随机事件与概率，随机变量及其概率分布，多维随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，极限定理。书末还附有供选学的三个相关附录，以及方便师生查阅的常用概率分布表等三张附表。

本书可作为普通高等师范院校数学类各专业、统计学专业概率论课程的教材，也可作为理工科大学数学类各专业、统计学专业概率论课程的教材或教学参考书；在一定的取舍原则下，对其他非数学类专业的概率论课程也适用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论简明教程/戴朝寿编著．—北京：高等教育出版社，2008.4

ISBN 978-7-04-023584-5

Ⅰ.概… Ⅱ.戴… Ⅲ.概率论-师范大学-教材 Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 021085 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市南方印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008 年 4 月第 1 版
印　　张	17.75	印　　次	2008 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	330 000	定　　价	20.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23584-00

序

戴朝寿教授的《概率论简明教程》即将由高等教育出版社正式出版，我表示祝贺，并高兴地向读者推荐此书；此外，还想趁此机会就有关高等师范院校本科数学教材的基本问题，谈一些个人的看法和意见。

我和戴朝寿同志是比较熟悉的。他 1963 年 7 月毕业于徐州师范学院数学系留校任教，长期从事概率统计教学工作，自 1979 年起连续几次参加由我主持的全国高等师范院校测度论与概率论基础讲习班以及随机过程论讲习班学习后，又于 1982 年来北京师范大学进修一年，参加我们的随机过程讨论班；后又作为访问学者于 1991 年 9 月至 1992 年 11 月在美国弗吉尼亚大学数学系师从著名随机分形专家 S. James Taylor 教授进行随机分形的学习和研究。回国后他从事随机分形及应用概率统计的学术研究，主持学校应用数学专业硕士研究生导师组的工作，曾任该校数学系系主任（该系已于 2006 年更名为数学科学学院），现兼任江苏省概率统计学会副理事长。他长期重视数学教育工作，了解普通高等师范院校数学类各专业的实际情况，从事概率统计教学和研究三十多年，在教学中积累了翔实的教学资料和丰富的教学经验。他所主持的概率论与数理统计课程建设于 2004 年 8 月被评为江苏省高等学校优秀课程。近几年来，他还积极协助中学实行教育部制订的中学数学课程标准，每年为江苏省和徐州市中学数学骨干教师培训班讲授“统计与概率教学内容知识结构分析”。这些说明戴朝寿同志有科研经验并且对高等师范院校的概率统计教学情况熟悉和富有实践经验，对新的中学数学课程标准中概率统计的要求是了解的，具备编写好高等师范院校概率论教材的优越条件。他写的这本《概率论简明教程》，就是他三十多年从事概率统计教学工作的心血结晶。

据我初步对该教材的理解，它具有如下特点：

(1) 内容选取符合教育部数学与统计学教学指导委员会制订的专业教学规范，其结构、体系完整，论述和推导严谨细致；内容充实，循序渐进；举例比较丰富，习题配套；便于施教。

(2) 在注意基本理论阐述的同时，又特别注重联系实际讲清基本概率模型，强调引入、运用各种概率分布采用的概率模型建立、应用的模型化思想方法，努力阐述清楚概率的思想方法，交代来龙，启示去脉。

(3) 内容叙述的组织方式易于学生接受，重视对数学概念的分析（例如对样本空间、事件、各种概率、随机变量、数学期望、方差等概念都是以“需要注

意的是”形式加以分析，透析所定义概念的背景，揭示其本质含义）；加强知识发生过程的探索；对得到的重要结论阐明它们在实际中直接和间接的作用（例如在叙述并证明全概率公式后，着重揭示公式的实质和运用方法；在介绍贝叶斯公式后，阐明其作用）；注重基本观点与基本方法的提炼（如§2.5 中的“分布函数法”，§4.1 例 3 中关于采用二重求和下标集合的等价变形来交换二重求和次序的方法）。

（4）能体现高等师范院校的特点，符合实现培养目标的要求。一是在教学内容上为学生提供一些中等学校概率与统计的教学资料；二是为使得在本科毕业攻读硕士、博士学位后在高校从事概率统计教学的学生、高校青年教师和相关读者对重要概率模型建立、重要概率计算公式运用能“知其所以然”，特地编写了附录 1“关于确定测量偶然误差概率密度函数的一种推导方法”和 附录 2“关于连续型随机变量函数数学期望公式的一种证法”；三是为使得读者了解并在今后能实践概率论在教育统计中的应用，特地编写了§4.6“正态分布在教育研究中的应用”一节以及附录 3。

（5）取材有独到之处。例如在§1.2 中给出了作者参考《大众医学》1986 年 4 月期刊上统计数据而编写的关于我国新生男、女婴儿出生率的统计结果，这是国内教材首次出现的中国之例。在这段内容中，还对初生性别比——新生男婴儿数与新生女婴儿数之比进行了分析，介绍了“国际警戒线定为 107:100”，指出“为了有效遏制一些地区初生性别比升高势头，许多国家政府部门采取了严禁非医学需要的胎儿性别鉴定和选择性终止妊娠等专项治理措施”，对控制人口增长具有现实意义。又如在§3.4 中对于离散型随机变量独立性判定定理给出了详细证明（据了解不少读者以为命题显然成立，对如何证明不清楚）。这些材料连同附录 1、附录 2 均可供有关教师查阅。

（6）例题精选，习题配套。精选的例题涉及诸多领域，具有针对性和代表性，既体现了历史积淀，又反映了现实的时代气息，有的是作者经调研之后编写的（如§2.4 中关于公共汽车车门高度确定的例 7，§5.4 中关于保险理赔的例 3，等等）；解题、证题格式规范，有助于师范生加强基本功的训练。选配的习题中有一些是作者编制或设计的，包括让学生动起来的随机试验；选配习题注意区分难易程度，有利于因材施教。

鉴于上述理由，我认为这本《概率论简明教程》比较适合于普通高等师范院校数学类各专业使用。本书也可以作为理工科大学数学类各专业、统计学专业概率论课程的教材或教学参考书；在一定的取舍下，对其他非数学类专业的概率论课程也可适用。

编撰出版高等师范院校数学专业的数学教材是一项涉及我国中、小学教学质量的根本任务。有不少老师强调：师范学院和师范大学的本科数学教材应该

有它的特点，大致是：高等师范院校的毕业生将来是要去教数学的，而且一般入学分数要低一些，所以内容的陈述应该更严谨一些，更细致一些。这些是必要的而且是基本的和重要的，但是作为未来数学教师专业基础的高等师范院校数学教材还应该具有更多的特点。戴朝寿同志的这本教材在这方面作了一些努力，例如，为学生提供一些与中学概率统计有关的教学资料、例题和习题(包括涉及我国诸多领域的实例)；为帮助未来教师能够正确、灵活地进行基本内容的教学，在陈述内容时，强调思想方法，交代来龙去脉等等。实际上，需要对高等师范院校本科数学教材做出更全面的研究和努力。广大中、小学生将来面对的是整个社会的需要，要帮助他们了解数学在社会发展中的基本作用，具有有关数学应用的素养以及正确思维的训练。而要达到这一要求，必须掌握数学基本知识和基本技能。因此高等师范院校本科数学教材首先要像以往那样对相应课程的数学基本理论、方法有系统、严谨的陈述，提供扎实的训练，更应该帮助学生理清课程内容的思想脉络、来龙去脉，从而接受数学思维的熏陶；通过学习课程的基本内容，学会提出和解决问题，从而接受探究、创新的训练；了解课程内容与相关学科和社会有关问题的联系以及应用。此外，由于学生接受能力或学习要求的不同，数学概念和内容(例如函数、概率)在不同学习层次(大学、高中、初中)的陈述和处理是不同的，而作为未来的教师，应该理解它们之间的内在联系。如果高等师范院校数学教材在这些方面(可能还有其他的要求)能够切实地提高，那么就可能在教学内容方面居高临下(至于教学方法应由数学教育课程和教学实习解决)，用高等的观点驾驭中学数学教学，从专业方面培养出更优秀的教师。以上只是我个人对高等师范院校本科数学教材的一些思考。由于我和戴朝寿同志是多年学术交流的挚友，所以借此为他的教材写序的机会提出，希望和更多的有关教师研讨。

严士健

2007年11月

附：严士健先生简历

严士健先生是北京师范大学资深望重教授，曾任该校数学科学学院的前身数学系系主任、数学与数学教育研究所所长，中国概率统计学会理事长，中国数学会副理事长兼教育工作委员会主任，教育部(国家教委)普通高校理科数学及力学教学指导委员会副主任委员，国家学位委员会数学评议组第一、二、三届成员，国家自然科学基金委员会数学评议组第一、二、三届成员，天元基金(国家数学特别基金)学术领导小组第二、三届成员，国家《普通高中数学课程标准》研制组组长。他还是中国共产党第十二次全国代表大会代表，北京市劳动模范。

前　言

概率论与数理统计学是研究随机现象数量规律性及其应用的一门数学学科，属随机数学范畴。事实上，随机数学是数学从精确数学发展到随机数学阶段中很重要的一个有特色的门类，其支撑的基础性课程为概率论、数理统计和随机过程。这其中概率论又是数理统计、随机过程各个分支重要的理论基础，它的方法与理论已广泛地渗透到自然科学、技术科学、管理科学、社会科学和人文科学的各个领域，被应用于工业、农业、生物、医药卫生、军事、经济、金融、保险、管理以及高新技术领域等许多部门。正如曾被誉为“法国的牛顿”、著名的法国数学家和天文学家拉普拉斯侯爵曾说过的：“值得注意的是，概率论这门起源于机会游戏的科学，早就应该成为人类知识最重要的组成部分……对于大多数人来说，生活中那些最重要的问题绝大部分恰恰是概率论问题。”

在2000年以前，国内大多数本科高等师范院校的概率论与数理统计在教学计划中是作为一门课程开设的。2001—2005年教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会提出了专业课程设置的指导性意见，我们在修订教学计划时，随即贯彻执行，将概率论作为主要专业基础课之一开设，数理统计作为主要专业课之一开设，从教学法规上确定了随机数学中这两门课程的地位。我校概率论与数理统计在作者的主持下，经过长期的建设，于2004年8月被评为江苏省高等学校优秀课程。作为课程建设的重要内容之一是教材建设，一直在高校工作从事教学、科研的经历使我认识到，数学创新、数学应用、数学传播是数学教育工作者的三大基本任务，为了适应现代教育发展的需要，提供多一种选择且更适合于普通高等师范院校本科生使用的概率论、数理统计的教材，作者萌生了编写本教材的愿望，于是在历经30年不断充实、不断精化概率统计教学讲稿的基础上，从2003年开始，着手编写这本《概率论简明教程》和另一本《数理统计简明教程》。

考虑到概率论课程的特点和高等师范院校的培养目标，作者结合自己的教学经验，对编写本教材确立了以下三条原则：一是内容选取以教育部数学与统计学教学指导委员会制定的专业教学规范为标准，着眼于使学生掌握处理随机现象的基本概念、基本理论与基本方法，培养运用概率论解决某些实际问题的能力，为后续课程学习打下基础，并且为从事中等学校中有关概率统计的教学工作打下基础，或为今后在科技、经济、金融、教育等部门从事研究、应用开发和管理工作做准备。二是在内容叙述的组织方式上，采取学生易于接受的叙述

形式，主要表现在：(1)重视对数学概念的分析，透析清楚概念的定义背景、本质含义，以逐步掌握认识数学概念的方法。(2)加强知识发生过程的探索，如对重要概念与问题的引进，尽可能说明它直接和间接的实践来源，或从理论上阐明它的重要性，使读者认识概念与问题的产生和发展，以获得系统的知识；注重命题的探索，尽可能使读者理解命题产生的过程；在论述过程中，尽可能对思想方法进行剖析，揭示精神实质，对得到的重要结论，阐明它们在实际中直接和间接的作用，交代清楚应用的条件。(3)注重基本观点与基本方法的提炼。其目的是使学生了解背景，透析概念，知道原理，掌握方法，明确作用。三是既注意基本理论的阐述，又特别注重联系实际讲清基本概率模型，强调引入、运用各种概率分布采用的是概率模型建立、应用的模型化思想方法，努力阐述清楚概率的思想方法，交代来龙，启示去脉，而不仅仅是“斩头去尾烧中段”；明确“为什么”和“怎么办”，而不光“是什么”和“这样办”，使读者得到一杆好的猎枪，而不仅是装有知识猎物的口袋。

鉴于概率论着重对客观世界的随机现象提出各种不同的数学模型，并研究其内在性质与相互联系，本书在内容体系结构上，安排了包括随机事件与概率、(一维)随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、极限定理共五章的内容，另有三个供选学的相关的附录。

本书体系完整，论述严谨，推导细致，内容充实，循序渐进，通俗易懂，例题精选，习题配套，资料翔实，便于施教。其中教材内容既注意基本理论的阐述、基本方法的介绍，又特别注重联系实际讲清基本概率模型，着力培养读者的科学思维方式、创新意识和创造性能力。精选的例题涉及诸多领域，既体现了经典的历史积淀，又反映了现实的时代气息；解题、证题的格式规范，有助于师范生加强基本功的训练。选配习题的难易程度可按“基本题、提高题、报考硕士研究生选做题”三个层次安排，有利于因材施教。

本书一般适用于54～60学时(每周3学时)的教学安排；具体使用时，可视实际情况而略去某些章节的部分内容。根据经验，从第一章到第五章内容学时分配的比例分别大约占22%，20%，22%，22%，14%左右(仅供参考)。本书可作为高等师范院校、理工科大学数学类各专业、统计学专业概率论课程的教材或教学参考书；在一定的取舍原则下，对其他非数学专业的概率论课程也适用。本书还适合作为自学用的教材。

本书初稿是为我校本科生编写的课程讲义，边使用边修改，在成书过程中又进一步征求教研室几位同行的修改意见，作了全面的充实、加工与修订。

作者特别感谢北京师范大学严士健教授对本书编写所给予的精心指导。作者在教学科研上受到严先生的影响，受益匪浅。对课程建设的一些教学理念吸收了严先生的一些观点；第四章§4.1中关于采用二重求和下标集合的等价变

形来交换二重求和次序的方法是作者于1982年在北京师范大学参加严先生主持的随机过程讨论班研修时学习到的。

徐州师范大学教务处、数学科学学院领导、学院省重点学科建设领导小组的各位专家以及概率统计教研室的各位老师，特别是苗正科教授、郭文彬教授、吴报强教授、周汝光教授、谢颖超教授、刘笑颖教授、苏简兵教授、陈彬教授、孙世良副教授对本书的编写和出版给予了大力支持和帮助；东南大学韦博成教授对本书的编写也给予了热情的鼓励和指导。作者在此一并向他们表示衷心的感谢。

本书的出版得到了高等教育出版社高等理工出版中心李艳馥、张长虹、文小西同志的大力支持与帮助，在此致以诚挚的谢意。同时，对北京大学陈家鼎教授非常仔细审查本书稿所提出的宝贵修改意见，以及严士健教授为本书的出版欣然作序，特致以最诚挚的谢意。

由于作者水平有限，书中难免有疏漏或不妥之处，恳请同行专家、使用本教材的教师、学生以及其他读者提出宝贵的建议，以便本书再版时得以改进。

戴朝寿谨识

2007年11月

于徐州师范大学

目　　录

引　　言

客观世界的现象虽然形形色色，千变万化，但一般不外乎分为两大类：

一类是在一定条件下，必然出现或者必然不出现，符合因果规律的现象，称之为**确定现象**（deterministic phenomenon），即哲学中的必然现象．我们过去所学的分析学、代数学、几何学等，就是研究这类现象的数学．再如，自然界中的太阳从东边升起，在西边落下；一年中的季节按春夏秋冬次序井然地反复变化；在一个标准大气压力（1 atm = 760 mmHg = 1.013×10^5 Pa，即一大气压力 = 760 毫米汞柱 = 1.013×10^5 帕）下，如果纯水的温度大于 0 ℃而小于 100 ℃，则水必然处于液态，而不处于气态或固态；抓在手中的苹果一放开，它必然往下掉落；同性电荷必然相排斥，异性电荷必然相吸引；等等，就属于必然现象的范畴．

另一类是在一定条件下进行重复试验或观测时，其结果为不确定的现象，称之为**随机现象**（random phenomenon），即哲学中的**偶然现象**．例如：任意掷一枚硬币，并规定一面为正面，另一面为反面，则硬币静止后可能出现正面向上，也可能反面向上；从一批产品中任意抽取一件，则可能抽到正品，也可能抽到次品；某射手对准靶子进行射击，则可能命中 10 环，也可能是其他环数或脱靶；等等，都属于随机现象的范畴．随机现象其结果之所以不确定，是由于在它里面有许多无法控制的因素在影响着结果的缘故．例如，明年的今日，某市可能天晴，也可能天阴，还可能降水，至于到底是何种天气状况，将受到那时的气压、风向、气温、湿度等许多气象因子的影响，而有些因子在现阶段是无法控制的．

随机现象在客观世界、生产实际和科学实验中广泛存在．再如：从某工厂一批产品中任取 n 件所出现的次品数；在某条生产线上用同一种工艺生产出来的电视显像管的寿命；某良种场新引进的一种作物的亩产量；某时刻一种股票的上升指数；某河流的洪峰水位高度；某号台风的中心位置以及影响到一城市的确切时间；某公共汽车站在前后两班车到达时间内的候车人数；进行某种测量时所出现的偶然误差；向某目标射击时弹着点的散布；等等，都是随机现象的例子．

人们在长期的实践中发现，就一次观测或试验来说，随机现象的结果无法预料，毫无规律可言；但是，在大量重复试验或观测时，它们都呈现出某种固有的规律性，通常称之为**统计规律性**．以掷硬币为例，对每次掷出的结果，事先无法预言；但是如果掷的次数相当多，由经验可知，正面向上和反面向上的次数往往大致相等．这就是掷钱币的规律性．再以测量的偶然误差为例，在测

量次数不多时，看不出其间的规律；但经过大量观测，人们发现它们具有如下的规律：(1) 绝对值越小的误差，出现的机会越多，即所谓“不均匀性”；(2) 绝对值相等、符号相反的误差，出现的机会相同，即所谓“对称性”；(3) 误差不会超过一定的范围，即所谓“有限性”；(4) 对同一量的同精度观测，其偶然误差的算术平均值随测量次数的增加而趋向于0，即所谓“稳定性”. 这四条特性就是偶然误差所遵循的必然规律. 如果在测量中发现误差不符合上述规律，就要研究产生误差的其他原因而加以排除. 以上两例说明了随机现象的特点，它具有两重性，是对立的统一. 这正如恩格斯(Engels，1820—1895)在《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》中所揭示的：“被断定为必然的东西是由纯粹的偶然性构成的，而所谓偶然的东西，是一种有必然性隐藏在里面的形式”. (见《马克思恩格斯选集》第4卷第240页.)偶然性与必然性是随机现象中的一对特殊矛盾，科学研究的使命就是要通过偶然现象，抓住规律性的实质，揭示出必然性. 概率论就是从数量方面研究必然性和偶然性关系的学科. 如果说变量数学是辩证法在数学中的应用，那么概率论则是必然性和偶然性统一的哲学原理在数学中的应用.

概率论与数理统计学是研究大量随机现象的数量规律性及其应用的一门数学学科.

概率论与数理统计学是数学科学中与现实世界联系最为密切、应用最为广泛的学科之一，它产生于实践，应用于实践，又由于实践的需要而不断发展.

中世纪后期的西欧，随着欧洲一些国家商业贸易的广泛发展，海上交通的日益扩大，社会保险行业应时而生. 14世纪时在意大利出现了第一个海上保险行业；此后，在欧洲一些大的商业城市，相继出现了类似的行业. 这些行业在有大量风险的情况下日益兴旺，其中风险出现的可能性涉及概率问题. 约从16世纪起，社会上又出现了水灾与火灾保险以及人寿保险等行业. 对各种灾害性偶然事故发生情况统计资料的收集与分析，正是刺激概率论发展的主要因素. 保险行业的产生与发展，既向数学提出了需要解决的一系列理论问题，又为概率论的产生提供了实际背景.

一种游戏加以理论化，有时能产生新的数学领域. 赌博的盛行，为研究概率问题提供了优良的模型，对概率论的产生起了催化剂的作用. 1654年，法国贵族公子德·梅雷(de Mere)爵士就自己在赌博中遇到的关于赌博因故中止而需公平合理地分配赌注这一类还不能归入当时数学范畴的问题，写信向法国数学家帕斯卡(Pascal，1623—1662)请教，引起了帕斯卡的兴趣. 帕斯卡作出解答后，于1654年7月29日写信给费马(Fermat，1601—1665)，两人采用通信方式展开讨论，结果发表了有关论文，由此开始了对概率论的研究. 因此西方有些学者将1654年7月29日作为概率论的生日. 那么为什么概率方面较早的论文

不是从一系列实际问题，而是从博弈这方面着手研究的呢？这是因为实际问题往往太复杂，必须从比较简单的材料开始研究随机现象的规律性. 这正如马克思(Marx，1818—1883)在谈到物理学实验时曾说过的：“物理学家是在自然过程表现得最确实、最少受干扰的地方考察自然过程的，或者，如有可能，是在保证过程以其纯粹形态进行的条件下从事实验的.”(《马克思恩格斯全集》第 23 卷第 8 页)帕斯卡、费马等人正是抓住了随机博弈这种较简单、纯粹的形式. 因此，关于概率论方面较早的论文，见于一些数学家发表于 16 世纪 ~ 17 世纪对赌博问题的研究.

另一方面，随着 18 世纪 ~ 19 世纪科学的进步，许多学者注意到在某些生物、物理和社会现象与机会游戏之间有着一种相似的关系，致使概率论开始被应用到这些领域中，同时也大大推动了概率论本身的发展. 事实上，许多自然科学的发展也提出了需要创立一种专门适应于分析随机现象的数学工具. 概率论正是在以上几方面的社会需求下发展起来的.

1713 年，瑞士数学家雅各布 · 伯努利(Jacob Bernoulli，1654—1705)的《测猜术》的出版奠定了概率论成为数学的一个分支. 1812 年，法国数学家、天文学家拉普拉斯(Laplace，1749—1827)在系统总结前人工作的基础上，发表了他的巨著《概率的分析理论》，明确给出了概率的古典意义，建立了计算初等概率的公式与渐近公式，并给出了在人口统计等方面的许多应用. 由于他在概率论中引入了更有力的分析工具，对概率论由组合概率向分析概率的发展起了很大的推动作用. 进入 20 世纪以来，随着数学本身学科的发展，建立在测度论基础上的近代概率论的理论基础被奠定. 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov，1903—1987)在《概率论基本概念》一书中建立了概率的公理化体系，使得概率论获得了坚实的理论基础，并为概率论各分支极其迅速地发展和应用，开辟了前进的道路. 从 20 世纪 50 年代开始，概率论的发展形成了自己的随机分析方法，从而进入了一个新的发展时期.

概率论是数学科学中一个有特色的分支，其特点主要体现在两个方面：一是它与其他数学分支一样，有严格的数学表达形式；二是它具有独特的“概率思想”，其思想方法别具一格，所研究的问题别开生面，解题、证题技巧多种多样. 概率论不仅是数理统计学科各个分支重要的理论基础，它的理论与方法已被广泛地应用于自然科学、技术科学、管理科学、社会科学和人文科学的各个领域，以及工业、农业、生物、医药卫生、军事、经济、金融、保险、管理和高新技术领域等许多部门. 作为理论严谨、应用广泛、发展迅速的这个数学分支，正日益受到人们的重视，并将发挥越来越重要的作用.

第一章　随机事件与概率

任何一门学科都有它研究的基本对象，如初等代数研究的基本对象是数，初等几何研究的基本对象是几何图形，微积分研究的基本对象是变量，等等．概率论研究的基本对象则是事件．事件与事件的概率是概率论中两个最基本的概念．本章建立这些概念，为概率论的研究做好奠基工作，并对概率的性质及有关初等概率的一系列计算问题加以讨论．

§1.1　随机试验、样本空间与随机事件

一、随机试验

客观现象（包括必然现象与随机现象）都表现为一定条件与所出现结果之间的某种联系形式．在概率论中，称实现一定条件为试验．人们正是通过试验去研究随机现象的．这里“试验”一词是一个广泛的术语，它包括各种各样的试验，也包括对某一事物一种特征的反复观察．仔细分析一下引言中在介绍随机现象时所举的各种例子，发现它们有以下三个特点：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）各次试验的可能结果不止一个，所有可能结果在试验前就明确知道；

（3）每次试验之前不能确定哪一个结果将会出现．

在概率论中，将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**（random experiment），简称为**试验**（experiment）．

我们正是通过随机试验来研究随机现象的，并且在实际问题中，我们需要知道试验的所有可能结果，为此，下面引入样本空间的概念．

二、样本空间

定义 1　随机试验的每一个可能出现的结果，称为**基本事件**（elementary event），记作 ω；所有基本事件 ω 的全体，称为**样本空间**（sample space），用大写希腊字母 Ω 来表示．

应该指出的是：

（1）基本事件又叫做**样本点**（sample point），它是指在一定的研究范围内，不能或不必再分拆开的事件．因此，取 Ω 的原则是基本事件 ω 应该具有“不能

或不必分拆开”的特点. 例如，从一批产品中随机抽查10件，考察其中的次品数，若不计抽查次序，则基本事件有11个：“出现0件次品”（全部是正品），“出现1件次品”……“出现10件次品”（全部是次品），于是次品数的样本空间为 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$，不能再分；但是若考虑次序，那就稍微复杂些了.

(2) 一项随机试验中基本事件个数的确定都是相对于试验的目的而言的. 例如，某箱子中装有红、黄、蓝三种颜色的同一产品，今从中任意抽取一件，则当考察产品的颜色时，基本事件为“红”、“黄”、“蓝”三个；当检验产品的质量时，基本事件只有“正品”和“次品”两个. 又如，当以人体身高决定购买火车票的票价时，只需考虑“1.10 m以下”，“1.10 m至1.40 m”与“1.40 m以上”三个基本事件.

(3) 随机试验的样本空间可以分为离散型(仅包含有限个或可列个基本事件)和非离散型. 例如，掷一粒正六面体的骰子时出现点数的样本空间与考查学生在一次大学英语等级考试中成绩的样本空间均是有限离散样本空间. 又如，考察某种放射源放射粒子的试验，则各粒子落到一指定区域内皆是基本事件，由于我们难于明确指出有限个数的范围，不妨认为有无限可列个，此时的样本空间是可列离散样本空间. 再如，进行某种测量时，偶然误差取值于$(-a, a)$(单位)中的任何值皆是基本事件，有无限不可列个，此时的样本空间是连续样本空间.

(4) 在后面具体的概率计算问题中，样本空间 Ω 的选取并非唯一.

(5) 样本空间是由奥地利数学家和空气动力学家冯·米赛斯(Von Mises, 1883—1953)于1931年引进的，如此，就可将不同的直观背景进行数学模型化处理.

以下是样本空间的例子.

例1 在对编号为1，2，…，100的一批产品进行质检时，从中任取一件，记

$$\omega_i=\text{“取得第 } i \text{ 号产品”},$$

则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{100}\},$$

有时可简记为

$$\Omega=\{1, 2, \cdots, 100\}.$$

例2 掷一枚硬币，则样本空间为

$$\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2\}, \qquad \text{其中 } \omega_1=\text{“正面朝上”}, \omega_2=\text{“背面朝上”};$$

但若同时掷两枚硬币，则样本空间为

$$\Omega_2=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

其中

$\omega_1=$“(正，正)”， $\omega_2=$“(正，背)”， $\omega_3=$“(背，正)”， $\omega_4=$“(背，背)”.

例 3 某寻呼台在$[0, T]$内接到呼唤次数的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_k:k=0,1,2,\cdots\},$$

其中

$$\omega_k=\text{“接到 } k \text{ 次呼唤”}.$$

类似地，地球上某一区域在一小时内所落下的宇宙射线数的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_k:k=0,1,2,\cdots\},$$

其中

$$\omega_k=\text{“落下 } k \text{ 条宇宙射线”}.$$

例 4 测量某地水温时，取样本空间

$$\Omega=\{t:t\in(0,100)(℃)\}=(0,100)(℃).$$

例 5 考察震源时，取样本空间

$$\Omega=\{(x,y,z):(x,y,z)\in B\subset\mathbf{R}^3\}.$$

其中 x 表示经度，y 表示纬度，z 表示深度.

例 6 向目标射击一次，研究弹着点与目标的偏差：

(1) 若不考虑方向，取样本空间

$$\Omega=\{r:r\in[0,a]\};$$

(2) 若考虑位置，则建立以目标为原点的平面直角坐标系，而取样本空间

$\Omega=\{(x,y):(x,y)\in B(0,a)\}$ ($B(0,a)$表示以原点为圆心、a 为半径的开圆).

两者有关系：$r=\sqrt{x^2+y^2}$.

例 7 从某批产品中抽查 n 件，考察其中的次品数：

(1) 不考虑次序时，取样本空间

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots,n\};$$

(2) 考虑次序时，记

$$\omega=\text{“抽取的一件为次品”},$$

$$\bar{\omega}=\text{“抽取的一件为正品”},$$

则取样本空间

$$\Omega=\{(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n):\omega_i=\omega \text{ 或 } \bar{\omega},\ i=1,2,\cdots,n\},$$

Ω 含有 2^n 个基本事件.

三、随机事件

按照辩证唯物主义的观点，物质世界处于相互制约、普遍联系之中，其最简单的情形是观察在一定条件下，带有某些特征的基本事件是否发生. 试看：

例 1 中，“取到偶数”$=\{2,4,\cdots,100\}$；