经济数学（二）

线性代数

$$(I-A)x=y$$

华中师范大学出版社

经济数学(二)

线性代数

中南财经大学数学教研室编

华中师范大学出版社

一九八七年九月

经 济 数 学 (二)
线 性 代 数
中南财经大学数学教研室编
*
华中师范大学出版社出版
(武昌桂子山)
华中师范大学出版社发行科发行
武汉市新华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：7.625 字数：165.7千
1987年9月第1版 1989年3月第2次印刷
印数：5001—9000
ISBN7—5622—0087—4/O·10
定价：2.50元

前　　言

《经济数学》是根据财政部一九八五年青岛教学大纲讨论会审定的大纲内容，经过多年的教学实践编写而成的。全套书共分四册：第一册《微积分学》；第二册《线性代数》；第三册《线性规划》；第四册《概率统计》。可作为各类经济院校的教材或教学参考书，也可作为经济工作者的自学用书。

《线性代数》在编排上讲述了行列式、矩阵、线性方程组、二次型的基本理论及方法，力求简明、通俗、易懂。第四章打*的定理证明在教学中可以略去。经济应用部分集中在最后一章，介绍了投入产出的最基本概念和数学处理方法。

本书由刘建辉编写，谢克臣、余尚智、彭勇行、刘康泽等同志审阅了全稿。

本书承华中师范大学数学系钱吉林副教授主审，华中师范大学出版社杨发明编辑审阅，并提出了不少改进意见。对此，我们表示衷心的感谢。

由于我们水平不高，加之时间仓促，书中会有不少缺点和错误，敬请读者指正。

中南财经大学数学教研室

1987年3月

目　录

第一章　行　列　式

第二章　矩　　阵

第三章　线性方程组

第四章 二次型

第五章 投入产出数学模型

第一章 行列式

用消元法解二元一次或三元一次线性方程组时，在一定的条件下，线性方程组的解可表示为二个行列式的比。例如，对于二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，上述方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

当系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，有唯一解

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

如此，求解二元或三元一次线性方程组就转化为去计算二阶或三阶行列式的值了。

对于n元一次线性方程组，它的解是否也有这样的规律，可以表示为二个行列式之比呢？为此，首先要给出n阶行列式的定义，并讨论它的性质。这些就是本章的主要内容。

为了把二阶或三阶行列式的概念推广到更一般的有n行n列的n阶行列式，我们对二阶及三阶行列式的展开式进行结构分析，找出它们的共同规律。

我们知道，二阶行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

三阶行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

上述等式的右边称为行列式的展开式。

仔细分析，不难发现：

(1)展开式都是一些乘积项的代数和；

(2)二阶行列式的展开式中每一个乘积项都是二个元素之乘积，三阶行列式的展开式中的每一个乘积项都是三个元素之乘积。乘积项中的每一个因子都分别处于行列式中不同的行，不同的列；

(3)乘积项有的取正号，有的取负号。以三阶行列式的展开式为例，如果我们把每一个乘积项中的因子的第一个下标(又称行标)按自然数顺序排好，那末第二个下标（又称列标）恰好组成1,2,3的所有可能的六种排列。乘积项的符号与这些排列的顺序有关。若将这些排列与自然顺序进行比较，逆序的个数为偶数时，乘积项取正号，逆序的个数为奇数时，乘积项取负号。如下表：

列标组成的排列	与自然顺序1 2 3比较，顺序不同的数对	逆序的个数	该乘积项的符号
1 2 3		0	+
1 3 2	3←→2		−
2 1 3	2←→1		−
2 3 1	2←→1 3←→1	2	+
3 1 2	3←→1 3←→2	2	+
3 2 1	3←→2 3←→1 2←→1	3	−

如果先把乘积项因子的第二个下标（列标）按自然数顺序排好，而对第一个下标（行标）的所有可能的排列进行类似的分析，也会有同样的结论。

掌握了这些共同点，我们大概可以设想n阶行列式的展开式应该是这样一些乘积项的代数和，每一个乘积项都是n个元素之乘积，乘积项的每一个因子来自行列式中不同的行，不同的列，当按自然数顺序排列乘积项中因子的行标（列标）时，其符号由列标（行标）组成的排列的逆序数来决定。

第一节　n阶行列式的概念

定义 1　由数码$1,2,\cdots,n$任意排成的一排数，称为一个n级排列。

例如，3142是一个四级排列，35214是一个5级排列。而5413既不是4级排列也不是5级排列。

数码$1,2,\cdots,n$的一个n级排列，记为$S_1S_2\cdots S_n$（$1\leqslant S_i\leqslant n$，且$i\neq j$时，$S_i\neq S_j$）。

显然，不同的n级排列的总数为$n!$个。

n级排列$12\cdots n$称为标准排列。

定义 2　在n级排列$S_1S_2\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$中，如果两个数码$S_i$，$S_j$的先后顺序与在标准排列中的顺序不同，则称$S_i$，$S_j$构成一个逆序。一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为$[S_1S_2\cdots S_n]$。

例如，在4级排列3142中，31，32，42是逆序，于是$[3142]=3$。一般地有

$$\begin{aligned}[S_1S_2\cdots S_n]=&(S_1\text{后面比}S_1\text{小的数的个数})\\&+(S_2\text{后面比}S_2\text{小的数的个数})\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+(S_{n-1}\text{后面比}S_{n-1}\text{小的数的个数})。\end{aligned}$$

例 1 求排列$1\ 2\cdots n$与$n\ (n-1)\cdots 2\ 1$的逆序数

解 $[1\ 2\cdots n]=0$

$$[n(n-1)\cdots 2\ 1]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

例如，排列3241是偶排列，排列4231是奇排列。

定义 4 在一个n级排列$S_1\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$中，交换两个数码$S_i$与$S_j$的位置，从而得到一个新的$n$级排列$S_1\cdots S_j\cdots S_i\cdots S_n$，这种对排列的变换叫做一个对换，记为$(S_i,S_j)$。

例如，排列4231是对排列3241作对换（3，4）得来的。容易看出，一次对换，排列的奇偶性发生了变化。一般地，我们有

定理 1 对换改变排列的奇偶性

证 首先考虑相邻元素的对换。在排列$S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n$中进行对换（$S_i$，$S_{i+1}$），得到排列$S_1\cdots S_{i+1}S_i\cdots S_n$.

当$S_i>S_{i+1}$时，

$$[S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n]=[S_1\cdots S_{i+1}S_i\cdots S_n]+1$$

当$S_i<S_{i+1}$时，

$$[S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n]=[S_1\cdots S_{i+1}S_i\cdots S_n]-1$$

显见，对换（S_i，S_{i+1}）改变了排列$S_1\cdots S_iS_{i+1}\cdots S_n$的奇偶性。

其次考虑不相邻元素的对换。在排列$S_1\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$中进行对换（$S_i$，$S_j$），得到排列$S_1\cdots S_j\cdots S_i\cdots S_n$。后一排列可通过一系列的相邻元素的对换而得到。在排列

$S_1\cdots S_i\cdots S_j\cdots S_n$中，先将$S_i$依次往后进行相邻元素的对换，共换$j-i$次，得到$S_1\cdots S_{i-1}S_{i+1}\cdots S_jS_i\cdots S_n$，紧接着，再将$S_j$依次往前进行相邻元素的对换，共换$(j-2)-(i-1)=j-i-1$次，便得到$S_1\cdots S_j\cdots S_i\cdots S_n$，前后总共换了$2(j-i)-1$次。由于$2(j-i)-1$是奇数，显然，奇数次这样的相邻元素的对换的最终结果还是改变了排列的奇偶性。**证毕**。

例2 确定i及j，使6级排列$42i1j6$成偶排列。

解 在所给排列中，i及j只能取3或5.

当$i=3$，$j=5$时，由于$[423156]=5$，排列423156是奇排列。作对换$(i, j)=(3, 5)$，则排列425136就是偶排列。因此$i=5$，$j=3$.

下面给出n阶行列式的定义：

定义5 把n^2个数$a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$排成一个正方形，且称横排为行、纵排为列，规定$a_{ij}$放在第$i$行第$j$列的位置，再用两条直线段括起来，这样得到的一个记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式，记为D，它的值定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(s_1\cdots s_n)}(-1)^{[s_1\cdots s_n]}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}$$

其中$s_1\cdots s_n$是数码1，2…，n的一个n级排列，$\sum\limits_{(s_1\cdots s_n)}$表示对所有的$n$级排列求和。

应该注意，在行列式的定义中，乘积项的因子其行标按标准顺序排列，由于列标$s_1s_2\cdots s_n$是一个n级排列，各因子分别处于不同的行，不同的列。

当$n=1$时，规定一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$.

在n阶行列式中，a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所在的直线段称为主对角线；a_{1n}，a_{2n-1}，…，a_{n1}所在的直线段称为辅对角线。

例3 计算

$$\sum_{(s_1s_2)}(-1)^{[s_1s_2]}a_{1s_1}a_{2s_2}.$$

解 由于

s_1	s_2	$[s_1\ s_2]$
1	2	0
2	1	1

$$\therefore \sum_{(s_1s_2)}(-1)^{[s_1s_2]}a_{1s_1}a_{2s_2}=(-1)^{[12]}a_{11}a_{22}$$

$$+(-1)^{[2\ 1]}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

不难看出，它就是二阶行列式的展开式。

例4 试判断下列各乘积项是否为5阶行列式的展开式中的一项。如是，说明该项应取的符号：

(1)$a_{11}a_{32}a_{23}a_{41}a_{54}$；　　(2)$a_{11}a_{32}a_{23}a_{45}a_{54}$

解 （1）乘积项$a_{11}a_{32}a_{23}a_{41}a_{54}$不是5阶行列式的展开式中的一项，因为因子$a_{11}$与$a_{41}$同处于第一列。

（2）乘积项$a_{11}a_{32}a_{23}a_{45}a_{54}$是5阶行列式的展开式中的一项，由于

$$a_{11}a_{32}a_{23}a_{45}a_{54}=a_{11}a_{23}a_{32}a_{45}a_{54}$$

而$[13254]=2$。所以该乘积项应取“＋”号。

例5 用行列式的定义计算下列行列式的值

$$(1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & ⋰ & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix}$$

其中对角线下方的元素全为零。

解 (1)根据行列式的定义，由于第n行除a_{nn}外其余元素为零，从第n行开始考虑，取a_{nn}．划去a_{nn}所在的第n行第n列，在余下的第$n-1$行的元素里，只有a_{n-1n-1}，取a_{n-1n-1}．如此一直选取。最后，划去a_{22}所在的第二行第二列后，第一行的元素只剩下了a_{11}，取a_{11}．因此，在展开式中，只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一个乘积项，其它乘积项都是零。于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{[12\cdots n]}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

因此，型(1)（又称为上三角形行列式）的值为主对角线上各元素的连乘积。

（2）用类似于(1)的选取方法，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n-1} a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2n-1} \\ \vdots \quad \diagup \\ a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{[n(n-1)\cdots 1]} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

因此，行列式型(2)的值为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$与辅对角线上各元素的连乘积。

最后，我们给出与定义5等价的行列式的值的另一定义。

定义6　n阶行列式的值定义为

$$D = \sum_{(p_1 \cdots p_n)} (-1)^{[p_1 \cdots p_n]} a_{p_1 1} \; a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

其中$p_1 \cdots p_n$是数码1，2，…，n的一个n级排列。

事实上，根据定义5，行列式展开式中的一般项是

$$(-1)^{[s_1 \cdots s_n]} a_{1 s_1} \; a_{2 s_2} \cdots a_{n s_n}$$

由于数的乘法是可交换的，如果对乘积项$a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}$的因子进行若干次的交换，使因子的列标按标准顺序排列，得到

$$a_{p_1 1} \, a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

这时，排列$s_1 s_2 \cdots s_n$变成$12\cdots n$；排列$12\cdots n$变成$p_1 p_2 \cdots p_n$显然，对换的个数是相等的。若把$s_1 s_2 \cdots s_n$变为$12\cdots n$的对换按相反的步骤进行，则排列$12\cdots n$又可变为$s_1 s_2 \cdots s_n$。这样，经过同样多次的对换，排列$12\cdots n$既可变为$s_1 s_2 \cdots s_n$又可变为$p_1 p_2 \cdots p_n$，根据定理1，它们的奇偶性应该是一样

的。于是

$$(-1)^{[s_1\cdots s_n]}=(-1)^{[p_1\cdots p_n]}$$

又有

$$(-1)^{[s_1\cdots s_n]}a_{1s_1}\cdots a_{ns_n}$$
$$=(-1)^{[p_1\cdots p_n]}a_{1p_1}\cdots a_{np_n}$$

因此，定义5与定义6是等价的。

习题 1—1

1. 求以下排列的逆序数

(1) 351624；

(2) 21786354；

(3) 214365……$(2n)(2n-1)$；

(4) $(2n)\cdots\cdots(n+1)12\cdots\cdots n$。

2. 选择i及k，使

(1) $13427i9k8$成奇排列；

(2) $i247k356$成偶排列。

3. 计算 $\sum\limits_{(s_1s_2s_3)}(-1)^{[s_1s_2s_3]}a_{1s_1}a_{2s_2}a_{3s_3}$

4. 写出4阶行列式的展开式中所有带负号且包含(1)$a_{13}a_{32}$；(2)a_{33}的乘积项。

用行列式的定义计算以下行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}0&0&a&c\\b&0&0&0\\0&0&0&c\\0&d&0&0\end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix}a_1&0&a_3&0\\a_2&0&a_4&0\\0&b_1&0&b_3\\0&b_2&0&b_4\end{vmatrix}$

$$(3)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad (4)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5)\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6.根据行列式的定义，求出行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

的展开式中含x^4及x^3的系数。

第二节　行列式的性质

上节我们给出了行列式的定义，根据行列式的定义，可以计算行列式的值。n阶行列式一共有$n!$项，计算它就需要做$n!(n-2)$次乘法和$n!-1$次加减法。当n较大时，计算的工作量是相当大的。在这一节，我们来讨论行列式的性质，利用这些性质可以简化行列式的计算。

将行列式