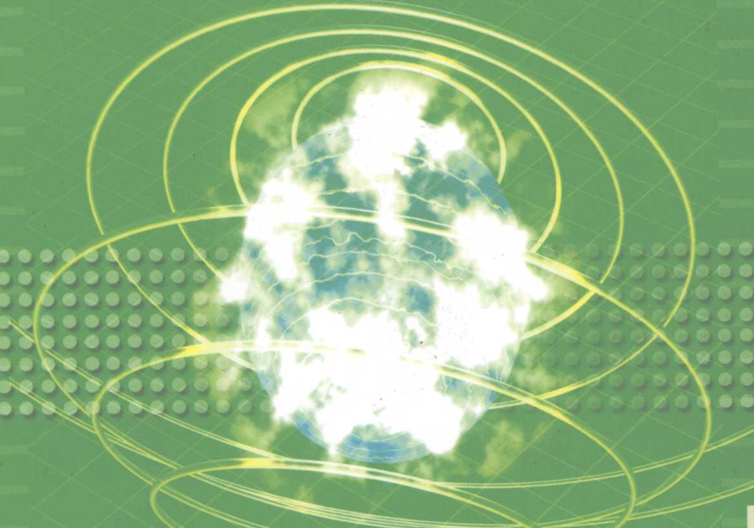
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

复变函数

西安交通大学理学院　　王绵森 主编



高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

复变函数

西安交通大学理学院　王绵森　主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/王绵森主编. —北京:高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023891-4

Ⅰ.复… Ⅱ.王… Ⅲ.复变函数-高等学校-教材 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 071673 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 于 涛
责任绘图 杜晓丹 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 殷 然
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
		网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
总 机	010-58581000	网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	北京明月印务有限责任公司		
开 本	850×1168 1/32	版 次	2008年6月第1版
印 张	7.875	印 次	2008年6月第1次印刷
字 数	200 000	定 价	11.90元

物料号 23891-00

前 言

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材。在编写过程中，主要吸收了1996年5月高等教育出版社出版的由西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》(第四版)一书的主要优点，根据我国高等教育进入"大众化教育阶段"后所出现的新情况、新特点，更加突出以下几个方面。

第一，更加强调复变函数中的重要概念、理论和方法是实变函数在复数范围中的推广和发展的思想。对于那些与高等数学课程中相应的重要概念(如函数、极限、连续、导数、级数等)和理论(如柯西-古萨定理等)，我们都采用对比的方法说明推广的思想方法，既指出它们的相似之处，更强调它们的不同之点，使初学者既能较深刻理解概念和理论的本质，又能学会一些分析研究方法，提高分析能力。

第二，更加注重讲解非数学类专业学生今后所需要的复变函数基本知识，按照教学基本要求(1992年版)，以及近年来教学改革的精神，对教材内容进行精简，删去了一些要求高的内容(例如，施瓦茨-克里斯托费尔映射、拉普拉斯方程的边值问题等)，把有限的学时和精力集中于基本内容和方法的讲授。

第三，更加注重贯彻按层次分流培养的教学思想。书中对某些要求较高的内容和习题采用异体字排印，或加"*"号，以适应不同学校、不同专业和不同基础学生的多种需求。例如，书中简要介绍了复变函数项级数的一致收敛性，并用以证明泰勒展开定理和洛朗展开定理。对于某些学校和某些专业的学生，可以不讲一致收敛性和这两个定理的详细证明，只要简要说明两个定理证明的

思路就可以了。其他某些要求较高的内容可以根据各校具体情况作类似的处理。

第四，更加注重复变函数在平面向量场中的应用。书中从一开始就将复数与平面向量、复变函数与平面向量场联系起来，并且介绍了解析函数在平面向量场（流速场、静电场）中的应用（复势函数），用复变函数的积分来表示平面流速场的环流量以及共形映射在机翼剖面绕流问题中的应用等。虽然考虑到某些学生没有这方面的知识，对这些内容也都加了“*”号，但我们认为只要学时允许，介绍一些有关的应用知识对加深理论内容的理解，培养提高学生学习的兴趣和应用能力是大有好处的。

第五，更加注重深入浅出，通俗易懂，便于自学。对于许多重要概念和定理，我们都先通过例子或相关知识，层层分析，逐步诱导，阐明思路，最后再给出定义和结论，以培养学生的自主学习能力。

本书可作为普通高等学校非数学类专业的教材，特别适用于电类、动力机械类、航空航天类、气象类和其他各有关专业使用，也可作为工程技术人员的参考书。讲完全书主要内容（不含加“*”号部分）约需 28 学时左右。

参加本书编写的有王绵森、彭济根、魏平，并由王绵森担任主编。由于我们的学识水平不高，教学经验有限，错误与不妥之处在所难免，恳请专家、教师和读者不吝指正！

编　者

2008 年元月于西安交通大学

目 录

引　言

我们知道，高等数学课程研究的主要对象是实变函数(自变量是实数的函数)，它的基本内容是实变函数的微积分. 而复变函数实际上就是以复数为自变量的复变函数的微积分.

与实变微积分不同，复数与复变微积分的理论主要不是由于生产实际问题的直接推动而是由数学科学的自身发展、解决数学内部矛盾的需要而产生的. 后来，又由于在现实世界中找到了应用原型，才进一步促进了该学科的形成和发展. 复数与复变函数理论的产生和形成大约经过了三百年的历程.

复数概念的产生与代数方程求解问题密切相关. 大家知道，16世纪，由于受到文艺复兴高潮的推进，欧洲人在代数学领域内取得了一批具有深远影响的重要成果. 一批意大利数学家在研究三次与四次代数方程求解时提出了负数开方的思想. 卡儿达诺(G. Cardano，1501—1576)在他的名著《大法》(1545 年)中给出了形如 $x^3=px+q(p,q>0)$ 的三次方程的求解公式 $x=a+b$，其中

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\quad b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

虽然书中对 $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3<0$ 开平方(即所谓“不可约”)的情形感到困惑. 他在该书中还讨论了将数 10 分为两部分，使它们的乘积等于40 的问题，实际上就是求方程 $x(10-x)=40$ 的根的问题. 在得到这两个部分分别为 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的结果之后，卡儿达诺发出了“令人费解”的感叹！1572 年，邦贝利(R. Bombelli，约1526—1573)在他编写的教科书《代数》中把上述这类新数叫做“虚

数”，并采用与实数运算类比的方法给出了复数的运算法则，虽然当时并不清楚这类数的真正含义.

由于复数刚被引进时只是一种没有实际意义的纯形式的表示，因而很长一段时期内被人们看成是一种“虚构的数”. 进入 18 世纪以后，随着实变微积分的建立和迅速发展，情况才有了改观. 一方面，瑞士数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)系统地建立了复数理论，发现了著名的欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，揭示了复指数函数、三角函数与对数函数之间的深刻联系，形成了初等函数的统一理论，而且开始将复变函数应用于水力学和地图制图学. 另一方面，丹麦数学家韦塞尔(C. Wessel，1745—1818)、瑞士数学家阿尔冈(R. Argand，1768—1822)、德国数学家高斯(C. F. Gauss，1777—1855)各自独立地将复数用平面上的点或向量来表示，使复数有了明确的几何意义，从而为用复数解决那些可以用平面向量来表示的物理问题奠定了基础. 至此，才确立了复数在数学中的合法地位.

复变函数理论真正成为分析的一个重要分支，是在 19 世纪. 它是由三位数学大师，即法国数学家柯西(A. - L. Cauchy，1789—1857)、德国数学家黎曼(B. Riemann，1826—1866)和魏尔斯特拉斯(K. Weierstrass，1815—1897)从不同的角度和途径出发建立起来的. 柯西建立的积分定理和留数定理为复变函数理论奠定了基础；黎曼证明的解析函数的充要条件深刻揭示了复变函数与实变函数的本质区别，他还通过引入所谓黎曼曲面(不属于本书讲解的内容)这一全新的几何概念，使任何一个多值解析函数成为它在其黎曼曲面上的单值解析函数，并为研究现代复变函数理论开辟了道路；以严格著称的魏尔斯特拉斯则用幂级数来定义(表示)函数在一点邻域内的解析性，建立了解析延拓的概念和方法，从而演绎出整个复变函数理论，他的方法在 19 世纪末占据了主导地位. 经过进一步研究，人们发现了上述三种方法的统一性，虽然出发点和方法有所不同，但却可以说是殊途同归.

复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域内的推广和发展.因此,它们之间既有相似之处,又有许多不同之点.在学习本课程时,要勤于思考,善于比较,既要看到它们的共同点,更要注重不同点,切实注意在推广到复数以后出现的新情况和新问题.只有这样,才能抓住本质,融会贯通.

复变函数在数学科学、自然科学和工程科学中有着广泛的应用,是解决诸如流体力学、电磁学、热学和弹性理论中平面问题的有力工具.虽然由于学时和其他条件的限制,本书不可能全面介绍在上述各学科中的应用,但我们仍将通过一些简单的例子,使读者能在正确理解和掌握复变函数基本理论和方法的基础上,培养利用它们解决实际问题的能力.

第一章

复数与复变函数

自变量为复数的函数就是复变函数，它是本课程的研究对象. 本章首先介绍复数的概念及其运算，然后引入平面上的区域和复变函数等有关概念，最后，将极限与连续性等概念推广到复变函数，为进一步学习解析函数理论与方法奠定必要的基础.

第一节　复数的概念与运算

1.1　复数及其代数运算

引言中已经指出，复数是由于解代数方程的需要而引进的. 例如，方程 $x^2=-1$ 在实数范围内无解. 为了使该方程有解，人们形式地引进了一个新的数 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，称之为**虚数单位**，并规定 $\mathrm{i}^2=-1$，从而 i 就是该方程的一个根.

对于任意实数 x 与 y，称形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数为复数，其中 x 与 y 分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，记作

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z).$$

当 $x=0$ 而 $y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**；当 $y=0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}$，就把它看作是实数 x. 因此，实数集是复数集（全体复数构成的集）的一个子集，复数集是实数集的扩充.

两个复数**相等**,是指它们的实部和虚部分别相等.特别地,一个复数 $z=0$,必须且只需它的实部和虚部同时为 0.但与实数不同,任意两个复数不能比较大小.

下面介绍复数的代数运算.既然复数是实数的扩充,因此,在规定复数的运算时应满足两个要求.一是该运算应用于实数时,其结果应与实数的运算结果一致;二是复数运算也要满足实数运算的基本规律,即交换律、结合律与分配律等.为此,两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$,$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加、减法与乘法定义如下:

$$\begin{aligned} z_1\pm z_2 &=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)\\ &=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2), \end{aligned}\tag{1.1.1}$$

$$\begin{aligned} z_1z_2 &=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2), \end{aligned}\tag{1.1.2}$$

并分别称两式右端的复数为复数 z_1 与 z_2 的**和**、**差**与**积**.

显然,当 z_1 与 z_2 都为实数时,按以上两式运算与实数的相应运算结果一致,并且不难验证,与实数一样,复数的运算也满足:

交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$,$z_1z_2=z_2z_1$;

结合律 $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$,$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

复数的除法也定义为乘法的逆运算.称满足等式

$$z_2z=z_1 \quad (z_2\neq 0)$$

的复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 为 z_1 除以 z_2 的**商**,记作 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$.由(1.1.2)式易知,为求 z,只要解线性代数方程组

$$\begin{cases} x_2x-y_2y=x_1,\\ y_2x+x_2y=y_1. \end{cases}$$

由于 $z_2\neq 0$,根据克拉默(G. Cramer)法则便得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.\tag{1.1.3}$$

实部相同而虚部绝对值相等符号相反的两个复数称为**共轭复**

数，记 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$. 不难验证，共轭复数有下列简单性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq0)$；

(2) $\overline{(\bar{z})}=z$；

(3) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=x^2+y^2$；

(4) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

熟练运用上述性质，可以简化复数的运算. 例如，在计算 $\frac{z_1}{z_2}$ 时，就可利用共轭复数的性质(3)，将分子与分母同乘以 $\bar{z}_2$，便可求得商，即(1.1.3)式.

例 1.1 设 $z_1=5-5\mathrm{i}$，$z_2=-3+4\mathrm{i}$，求 $\frac{z_1}{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}=\frac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}$$
$$=\frac{(-15-20)+(15-20)\mathrm{i}}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i},$$

所以 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$. ∎

例 1.2 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 为两个任意复数，证明：$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=\frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)$，$\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2)$.

证 由共轭复数的性质(1)、(2)与(4)立即可得
$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=z_1\bar{z}_2+\overline{(z_1\bar{z}_2)}=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$$
所以
$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=\frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2).$$
类似可证另一等式. ∎

1.2 复数的几何表示

复平面 实数可以用直线上的点来表示，类似地，因为一个复

数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数(x,y)唯一确定，所以对于给定直角坐标系的平面 xOy，复数集与该平面上点的全体构成一一对应关系，从而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为(x,y)的点来表示. 此时，x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**，该平面称为**复平面**或 **z 平面**. 这样，复数集就与复平面上的所有点一一对应，并把"点 z"作为"数 z"的同义词，使我们能借助于几何语言和方法来研究复变函数的问题，也为复变函数研究平面几何问题奠定了基础. 今后常用 $\mathbf{C}$ 表示复数集或复平面.

有了复平面，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就与从原点指向点 z 的向量一一对应，从而复数 z 也能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示(图 1.1). 这样，我们就能用复数来表示那些能用平面向量表示的物理量，使复变函数成为研究科学技术中许多平面问题的有效工具. 例如，为了研究河面上某时刻水的流动情况，在河面上任意取定一个直角坐标系 xOy，那么河面上任一点 P 处水流的速度向量 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$ 就可以用复数 $v=v_x+\mathrm{i}v_y$ 来表示(图 1.2). 类似地，平面静电场在某点的电场强度向量 $\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}$ 也可以用复数 $E=E_x+\mathrm{i}E_y$ 来表示. 这样的例子不胜枚举.

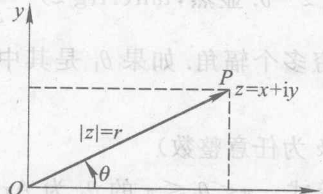


图 1.1

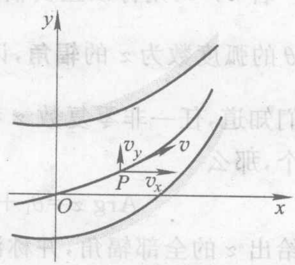


图 1.2

复数与向量之间的对应关系，使两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加、减法运算与对应向量的加、减法运算一致(图 1.3).

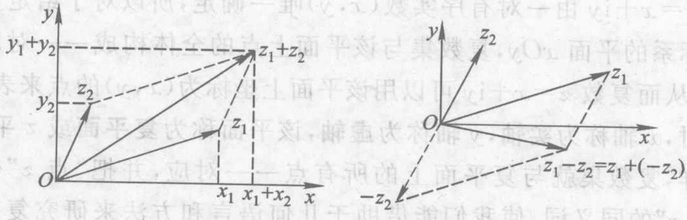


图 1.3

复数的模与辐角 根据复数的向量表示，复数 z 在平面上的位置也可以借助于它的极坐标 r 与 θ 来确定. 在图 1.1 中，向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为 z 的**模**(或**绝对值**)，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然，$|z|=0$ 的充要条件是 $z=0$，并且

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|,\quad z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

由图 1.3 易见，$|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与点 z_2 之间的距离，并且

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\text{(三角不等式)},$$
$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|.$$

若 $z\neq0$，则称以正实轴为始边，以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角 θ 的弧度数为 z 的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}\, z=\theta$. 显然，$\tan(\mathrm{Arg}\, z)=\dfrac{y}{x}$.

我们知道，任一非零复数 z 都有无穷多个辐角. 如果 θ_1 是其中的一个，那么

$$\mathrm{Arg}\, z=\theta_1+2k\pi\quad(k\text{ 为任意整数})$$

就给出 z 的全部辐角，并称满足不等式 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的 θ_0 为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的**主值**，记作 $\theta_0=\arg z$. 当 $z=0$ 时，z 的辐角不确定.

辐角的主值 $\arg z(z\neq0)$ 可由反正切 $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系确定：