保险精算系列教材

高等数学（上）

孙疆明 编著

BAOXIAN JINGSUAN XILIE JIAOCAI

GAODENG SHUXUE

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

保险精算系列教材

高等数学

（上）

孙疆明 编著

BAOXIAN JINGSUAN XILIE JIAOCAI

GAODENG SHUXUE

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/孙疆明编著．—成都：西南财经大学出版社，2008.9
ISBN 978-7-81138-055-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 125228 号

高等数学(上)
孙疆明　编著

责任编辑：于海生
封面设计：穆志坚
责任印制：封俊川

出版发行：	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址：	http://www.xcpress.net
电子邮件：	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码：	610074
电　　话：	028-87353785　87352368
印　　刷：	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸：	170mm×240mm
印　　张：	16.25
字　　数：	285 千字
版　　次：	2008 年 10 月第 1 版
印　　次：	2008 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：	1—3000 册
书　　号：	ISBN 978-7-81138-055-2
定　　价：	28.80 元

前　　言

本书是依据教育部颁布的高等学校财经类专业核心课程经济数学基础——微积分教学大纲，参考全国保险精算师考试大纲和英国瓦特大学精算和统计学本科教学大纲编写的. 因此，它既可以作为保险精算专业本科高等数学课程教材，也可以作为高等财经院校本科对数学基础要求较高的其他经济管理专业高等数学课程教材，亦可供学习本课程的自学者选用.

本书在内容上注重数学基础知识的逻辑性、完整性，同时注重数学方法、原理与经济学相关知识的结合与应用，力图在学习高等数学基本原理的同时引入数学在经济学中的运用思想。另外，结合全国保险精算师考试大纲，在数学基础知识上有所侧重，以利课程教授与学习.

本书分上、下两册，上册为一元微积分主要部分，下册分多元微积分和一元微积分中进一步加深的一些内容. 全书共分 12 章，其中 1 ~ 6 章及 10 ~ 12 章为一元微积分，7 ~ 9 章为矢量代数、空间解析几何初步和多元微积分.

本书的编写得到了西南财经大学保险学院领导的关心与帮助，得到了经济数学学院领导和老师的大力支持和帮助，特别是保险学院李恒琦教授为本书做出了大量工作，在此一并表示衷心感谢. 同时，也感谢西南财经大学出版社对本书的出版给予的支持和帮助.

由于编者的水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请同行专家和读者批评指正.

目　录

第 1 章　\1
　§1.1　预备知识　\1
　§1.2　函数概念　\3
　§1.3　函数的几个简单性质　\7
　§1.4　反函数与复合函数　\11
　§1.5　函数分类　\15
综合练习 1　\20

第 2 章　\23
　§2.1　极限的概念　\23
　§2.2　无穷小量与无穷大量　\39
　§2.3　极限的运算与性质　\43
　§2.4　两个重要极限　\50
　§2.5　函数的连续性　\60
　§2.6　连续函数的性质　\66
综合练习 2　\73

第 3 章　\75
　§3.1　导数概念　\75
　§3.2　导数的运算法则与导数公式　\83
　§3.3　隐函数与参数方程表示的函数求导法　\88
　§3.4　高阶导数　\94

§3.5　函数的微分　\99
综合练习3　\106

第4**章**　\108
§4.1　中值定理　\108
§4.2　罗必达法则　\115
§4.3　函数的单调性与极值　\120
§4.4　曲线的凹向、拐点、渐近线与函数作图　\133
§4.5　泰勒公式及其应用　\141
§4.6　导数在经济分析中的应用　\149
综合练习4　\154

第5**章**　\155
§5.1　不定积分的概念与性质　\155
§5.2　不定积分的性质与基本积分法　\159
§5.3　换元积分法　\162
§5.4　分部积分法　\173
§5.5　几类特殊类型的函数积分　\180
综合练习5　\189

第6**章**　\191
§6.1　定积分的概念　\191

§6.2　定积分基本公式　\206
§6.3　定积分积分法　\212
§6.4　广义积分　\223
§6.5　定积分的应用　\236
综合练习 6　\250

第1章 函数

世间万物,无一不在一定的范围内运动变化. 它们变化的规律总是透过一定的"量"的关系显现出来.

在经济活动中也是这样,不论是市场规律还是生产决策,无处不显现出"量"的确定作用. 需求、供给影响着商品的价格,价格反过来又刺激商品的供给并影响商品的需求;利润激励了企业的投资,投资风险会给企业带来极大的伤害;保险为企业提供了风险防范保证,但费用太高会加大企业的成本,影响企业参保的积极性,进而影响保险业自身的发展,等等. 这些关系都可通过"量"——价格、费用、成本、利润等——反映出来. 要想把握这些经济规律并达到预期目的,就需要研究这些"量"及其关系.

现实世界中的"量"有些是可控制或可观测的,有些则随控制(或观测)量变化. 这些变化中,有些是以确定的对应关系随之而变,有些是以不确定的对应关系变化. 数学分析是用分析的方法研究具有确定对应关系的量随控制(或观测)量变化的过程及其变化特征、特性的学科.

§1.1 预备知识

1.1.1 实数

1. 实数的概念

形如$\dfrac{p}{q}$, $p\in\mathbf{Z}$(整数), $q\in\mathbf{Z}$, $q\neq 0$ 的数称为**有理数**,所有有理数构成的集合称为有理数集. 每一个有理数在数轴上都有唯一一个点与之对应,称之为有理数点.

有理数集具有四则运算**封闭性**和**稠密性**. 四则运算封闭性是指有理数加减乘除(除数不为0)后仍为有理数,对四则运算封闭的数集称为**数域**. 有理数集是一个

数域,具有稠密性. 稠密性是指任意两个不同的有理数之间都有无穷多个有理数. 这一点在研究极限中很重要.

事实上,若 r_1,r_2 为两个不同的有理数,$\frac{r_1+r_2}{2}$就是介于 r_1,r_2 之间的有理数.

但是,有理数没有充满整个数轴. 如边长为 1 的正方形对角线长$\sqrt{2}$就不是一个有理数. 因为若$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$,p,q 互质,则 $p^2=2q^2$,p 可以被 2 整除,即 $p=2n$,进而 $2q^2=(2n)^2=4n^2$,q 也可以被 2 整除,与 p,q 互质矛盾. 这样的数称为**无理数**.

有理数和无理数统称为**实数**. 全体实数构成的集合称为实数集,记为 R. 实数集也是一个数域,实数充满了整个数轴.

2. 实数集的上下界

定义 1.1 设 A 为一非空实数集,若存在实数 M,使得 $\forall x\in A$,有 $x\leqslant M$($\forall$ 表示任意取定),则称 A **有上界**,M 为 A 的一个上界;若存在实数 m,使得 $\forall x\in A$,有$x\geqslant m$,则称 A **有下界**,m 为 A 的一个下界;既有上界又有下界的集合称为**有界**集合.

若集合有上(下)界,则一定不唯一. 事实上,如果 M 为上界,则 $M+1$,$M+2$……都是上界.

称数集 A 的上界中最小的上界为数集 A 的**上确界**,记为 $\sup A$;称数集 A 的下界中最大的下界为数集 A 的**下确界**,记为 $\inf A$.

在有理数域上,有界数集不一定有确界.

如 $A=\{x|x^2<2\}$ 有上界 2,但在有理数域上找不到最小的上界. 事实上最小的上界是$\sqrt{2}$.

确界公理 实数域上非空有上界的数集必有上确界,非空有下界的数集必有下确界.

注:上确界、下确界与最大值、最小值不同,数集 A 最大值、最小值是数集 A 中的数,上(下)确界可以不是数集 A 中的数. 如上例中$\sqrt{2}$就不是数集 A 中的元素.

定理 1.1 M 是非空数集 A 的上确界的充分必要条件是

$$\forall x\in A,有\ x\leqslant M,且对\ \forall\varepsilon>0,\exists x^*\in A,使\ x^*>M-\varepsilon;$$

m 是非空数集 A 的下确界的充分必要条件是

$$\forall x\in A,有\ x\geqslant m,且对\ \forall\varepsilon>0,\exists x^*\in A,使\ x^*<m+\varepsilon.(\ \exists 表示存在)$$

3. 区间

定义 1.2 在实数域 R 上,设 $a\leqslant b$,称介于 a、b 之间的所有实数构成的数集为一个区间. 如果该数集不含 a、b,则称之为开区间,记为(a,b);如果该数集包含 a、b,则称之为闭区间,记为$[a,b]$.

类似可定义半闭半开区间.

在区间中约定:在没有特别说明时,都是指的实数集合。特别地,有界开集$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$和$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$分别称为$x_0$的$\delta$邻域和$x_0$的空心$\delta$邻域,记为$U(x_0,\delta)$和$\mathring{U}(x_0,\delta)$. 如图 1－1 所示.

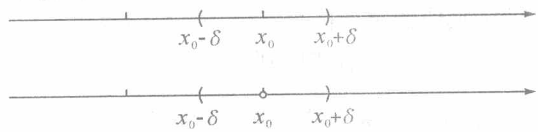

图 1－1

1.1.2　常量与变量

在研究现实问题过程中,常常要涉及许多的量. 这些量有的在整个研究过程中始终保持不变,有的在研究过程中可取不同数值,有的则在研究过程某个阶段保持不变,但在不同的阶段又可取不同数值,等等.

在整个研究过程中保持不变的量称为**常量**. 常量又分为数字常量和符号常量.

例如钢铁的密度 7.8,地球上平均重力加速度 9.8 等就是数字常量;而在市场问题中,当价格不变时,销售收入与销售量成正比,其中的比例系数(价格)就是符号常量. 符号常量通常用小写英文字母$a,b,c,\cdots$表示.

在研究过程中可取不同数值的量称为**变量**.

例如在生产过程中,研究一段时间内产品的产量. 这里时间可取不同数值,随时在“变”;产量在不同的时刻也可能为不同的数值,它们都是变量. 变量常用英文字母$x,y,z,\cdots$表示.

如果一个量在研究过程中某个阶段保持不变,但在不同的阶段又可取不同数值,称之为**参数常量**或简称参数. 参数在研究过程的每个阶段内为常量,而当阶段不同时则发生变化. 例如在价格不变时研究商品的销售收入,每一种商品的销售收入中价格都是常量,但是,从一种商品换为另一种商品时,价格通常会发生改变,价格就是一个参数. 参数常用希腊字母$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$表示.

§1.2 函数概念

函数是一种对应关系,是一个量随其他量变化的关系,是数学分析所研究的基本对象. 本节将给出函数的定义.

1.2.1　函数定义

定义 1.3　设x,y为两个变量,若变量x在其变化集合I上任意取定一实数,通过某个确定的对应规则f,变量y都有唯一一个确实的实数值与之对应,则称对应规则f是定义在集合I上的一个函数. 并记为$y=f(x)$.

其中 x 称为**自变量**，I 称为**定义域**，记为 $D(f)$（或 D_f），y 称为**因变量**（也称为函数变量）.

根据定义可知，函数是一个对应关系，通过这个关系，对定义域 I 上任意一个实数都可以得到唯一一个确定的对应实数值，称之为**函数值**，$f(x)$ 就是 x 对应的函数值. 定义域 I 对应的函数值的集合称为值域，记为 $f(I)$.

值得指出是，函数 f 与 $f(x)$ 是有所区别的.

例如 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}$ 中，函数 f 是对定义域中取定的数值作正弦运算再平方作分子，以这个取定数值的平方加1作分母这样一个运算规则，即 $f(\ )=\dfrac{\sin^2(\ )}{1+(\ )^2}$，而 $f(x)$ 除表示这个运算规则外，还表示对 x 运算的结果 $\dfrac{\sin^2 x}{1+x^2}$.

例1 设 $f(x)=\dfrac{2^x\cos x}{3x-5}$，$D(f)=(-1,1]$，求 $f(0)$，$f(1)$.

解 $f(0)=\dfrac{2^0\cos 0}{3\times 0-5}=-\dfrac{1}{5}$；$f(1)=\dfrac{2^1\cos 1}{3\times 1-5}=-\cos 1$.

一般情况下，当自变量 x 在定义域内取不同值时，对应的函数值 $f(x)$ 也可能取不同值，即 x 变化时，函数值也随之而变，故函数也可以理解为一个变量（因变量）随另一个变量（自变量）变化的规则.

如市场问题中，需求量 Q、供给量 S 随价格 p 变化，若记 Q 随 p 变化的对应关系为 f，S 随 p 变化的对应关系为 g，则市场变化规律可记为 $Q=f(p)$ 和 $S=g(p)$，市场均衡（供给等于需求）问题变为是否存在价格 $p(>0)$，使 $f(p)=g(p)$，即方程 $f(p)-g(p)=0$ 是否存在正实根的问题.

函数的定义域 $D(f)$ 是指函数 f 有意义的自变量集合. 这里“有意义”包含两层意思：

(1) 如果函数 f 给定的同时，指定了定义域 I，这时函数 f 只能对集合 I 内的实数进行运算. 该集合之外的数值，即使形式上可以通过 f 关系得到对应值，仍认为无定义. 即对应的实数值不是 f 的函数值.

(2) 如果给定函数 f 时，没有指定定义域，函数的定义域 $D(f)$ 为使 f 运算有意义的所有实数.

例2 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin x, & 0\leqslant x<1 \\ x-\lg(1-x), & -2\leqslant x<0 \end{cases}$，求 $f(x)$ 的定义域.

解 $D(f)=[0,1)\cup[-2,0)=[-2,1)$.

这里 $f(x)$ 给定时，指定了允许运算的自变量 x 的集合，并且当 $0\leqslant x<1$ 时，要用

$x\sin x$ 对应函数值，$-2\leqslant x<0$时，要用 $x-\lg(1-x)$ 对应函数值；对其他实数，两式尽管可以对应实数值，但不再是f对应的函数值，因此，函数f对这些实数无定义.

例3 求 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{\lg(1+x)}$的定义域 $D(f)$.

解 函数要有意义，则

$$2-x^2\geqslant 0, 1+x>0, \text{且 } \lg(1+x)\neq 0,$$

解得 $|x|\leqslant\sqrt{2}, x>-1$且 $x\neq 0$,

所以 $D(f)=(-1,0)\cup(0,\sqrt{2}]$.（这里"$\cup$"表示集合的并集运算）

对于函数，一旦定义域 $I=D(f)$ 和对应关系 f 被确定，其函数值 $f(x)$ 及其值域 $f(I)$ 也完全被确定. 因此，定义域和对应关系称为函数的两要素.

反之，如果有两个函数f、g 定义域相同（设 $I=D(f)=D(g)$），且 $\forall x_0\in I$，有 $f(x_0)=g(x_0)$，则说明f、g 是同一个对应规则，是 I 上同一个函数，称之为**两函数相等**. 且记为$f(x)=g(x)$.

例4 下列函数哪些相等.

$f_1(x)=x,\ f_2(x)=\sqrt{x^2},\ f_3(t)=|t|,\ f_4(u)=(\sqrt{u})^2.$

解 f_1, f_2, f_3的定义域为$(-\infty,+\infty)$，f_4的定义域为$[0,+\infty]$

由定义域不同，知f_4与其他函数都不相等；

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，当 $x<0$时，

$$f_1(x)=x<0,\ f_2(x)=\sqrt{x^2}=-x>0,\ f_3(x)=|x|=-x>0$$

所以f_1与f_2, f_3不等.

而f_2, f_3两函数尽管变量字母不同，表达形式也不同，但是定义域相同，对定义域内任意 x_0，两函数对应的函数值都是$|x_0|$，所以

$$f_2(x)=f_3(x)$$

1.2.2 函数的表示法

函数的表示方法有多种形式，常用的有下列几种：

1. 公式法

公式法也叫**解析法**，是指用数学解析公式表示函数的对应规则. 这种方法表示的函数便于用解析的方法讨论，因此是数学分析讨论的主要函数形式.

如例1、例2、例3中的函数都属于公式法表示的函数，其中例2的函数在定义域的不同集合上用不同解析式表示同一个函数，称之为**分段函数**.

再如，函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x, x\geqslant 0\end{cases}$, $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$ 等都是分段函数，

sgn(x)叫做符号函数.

2. 列表法

如果两个变量间的对应关系 f 不便用解析式表示，而只能测得两变量的对应数值，则可以通过列表方式反映其对应关系，这种表示函数关系的方法为**列表法**.

设某商品的售价与平均月销售量如下表：

售价(元)	20	18	17	15	14	13	11
销售量(件)	55 182	60 985	64 112	70 855	74 488	78 307	86 543

这个表格就是销售量与价格之间的函数关系.

3. 图示法

股市的走势图是我们了解股市变化的重要依据. 通过走势图，任意取定一个时刻，都有唯一的股价、成交量等与之对应，因此，股票走势图形反映了股价、成交量随时间变化的对应关系——函数. 这种函数关系的表示方法称为函数的**图示法**.

同样，心电图、脑电图、气象图、地震图也是医学、气象学、地质学中常用的函数表示形式.

4. 符号法

在研究现实问题的过程中，经常还会遇到已知两变量之间有确定的对应关系，但具体对应规则不十分清楚(特别是初次被研究的量)的情况，这时，可直接用函数符号 $f(x)$ 描述这种对应关系，称之为**抽象函数**.

这种函数表示法是经济研究中最常用的方法. 这是因为经济中大部分变量之间的对应关系，我们了解的都还很少，无法准确描述其对应关系. 同时，经济中许多变量之间的对应关系在不同外部环境下对应关系也不一样，若用某一个具体的函数关系表述，得到的结论也不具有广泛的适用性，而用函数符号则可以得到具有更一般性的结果.

抽象函数的研究都要从函数的性质出发.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x-1}$

(2) $y=\sqrt{\cos 2x}$

(3) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

(4) $y=\dfrac{1}{\ln x}$

(5) $y=\arcsin\dfrac{x}{1-x}$

(6) $y=\lg[\lg(x^2+8x+15)]$

2. 设 $f(x)=\log_a x$，证明：

(1) $f(x)+f(y)=f(xy)$　　(2) $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$

3. 设 $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{x}}{2}$, $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$, 证明：

(1) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$　　(2) $\mathrm{ch}^2x+\mathrm{th}^2x=1$

4. 下列各题中两函数是否相等？

(1) $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt{x})^2$　　(2) $\ln x$, $\dfrac{1}{2}\ln x^2$　　(3) $\arctan x$, $\mathrm{arccot}\,\dfrac{1}{x}$

§1.3　函数的几个简单性质

研究函数就是要了解函数的各种性质，特别是未知的抽象函数，性质是我们认识函数的必经之路. 本节主要复习一下初等数学中已涉及到的函数的几个性质.

1.3.1　单调性（增减性）

定义1.4　设 f 是定义在 D 上的函数，$\forall x_1,x_2\in D$，若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)\leqslant f(x_2)$) 则称 f 是 D 上单调增加（不减）的函数；若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$) 则称 f 是 D 上单调减少（不增）的函数.

例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都是单调减少函数，但在定义域上不是单调减少函数.

记 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，因为 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,0)$，当 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$$

恒成立，所以，f 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少；

类似可证 f 在 $(0,+\infty)$ 上也单调减少.

但是，在定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，设 $x_1<0$, $x_2>0$，则 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，但

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$$

由 $x_1x_2<0$, $x_2-x_1>0$，得 $f(x_1)<f(x_2)$，即 f 不是 D 上单调减少函数.

函数的单调性除用定义讨论外，还有其他方法. 第四章将介绍利用导数研究函数单调性的方法.

1.3.2 奇偶性(对称性)

定义1.5 设 $f(x)$ 的定义域为 D,如果 $\forall x \in D$ 恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果 $\forall x \in D$ 恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;否则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

例如 x,$\sin x$,x^3,$\sqrt[3]{x}$ 等为奇函数,x^2,$|x|$,$\cos x$ 等为偶函数.

根据定义可知,奇、偶函数定义域一定是关于原点对称的集合. 例如 $\sqrt{x}$ 因在 $x<0$ 时无定义,因此一定是非奇非偶函数.

例1 证明 $f(x)=a^x-a^{-x}$ 为奇函数.

证 $f(-x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

例2 设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上有定义,证明 $f(x)+f(-x)$ 为 $(-l,l)$ 上的偶函数.

证 设 $F(x)=f(x)+f(-x)$,则对 $\forall x \in (-l,l)$ 有

$$F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=F(x)$$

所以 $F(x)$ 也即 $f(x)+f(-x)$ 为 $(-l,l)$ 上的偶函数.

类似可证明 $f(x)-f(-x)$ 是 $(-l,l)$ 上的奇函数.

进而由

$$\frac{1}{2}\{[f(x)+f(-x)]+[f(x)-f(-x)]\}=f(x)$$

可得:任意在对称区间有定义的函数都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和.

偶函数图形上的点 $(-x,f(-x))=(-x,f(x))$ 与 $(x,f(x))$ 关于 Y 轴对称,因此,偶函数图形关于 Y 轴对称;

奇函数图形上的点 $(-x,f(-x))=(-x,-f(x))$ 与 $(x,f(x))$、原点在一条直线上,并且点 $(x,f(x))$ 与点 $(-x,f(-x))$ 到原点距离相等,称之为关于原点对称. 奇函数图形关于原点对称.

1.3.3 周期性

定义1.6 设 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,a 为非零常数,如果 $\forall x \in D(f)$,恒有 $f(x+a)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,a 为函数的一个**周期**.

根据定义,若 a 为 $f(x)$ 的一个周期,则因为

$$f(x+2a)=f((x+a)+a)=f(x+a)=f(x)$$

所以 $2a$ 也是 $f(x)$ 的一个周期.

由

$$f(x)=f((x-a)+a)=f(x-a)$$

知,$-a$ 也是 $f(x)$ 的一个周期. 因此,周期函数一定存在无穷多个周期. 且因

$x \in D(f)$时，$x \neq a, x \neq 2a \cdots \in D(f)$，所以 $D(f)$ 是既无上界也无下界的集合.

如果周期函数 $f(x)$ 的周期 a 中存在最小的正周期 T，则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的函数周期.

例如三角函数 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$ 都是周期函数，$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，…都是它们的周期，但 $\sin x$、$\cos x$ 的函数周期为 2π，$\tan x$、$\cot x$ 的函数周期为 π.

例3 证明 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 为周期函数，但不存在函数周期.

证 设 $a \neq 0$ 为有理数，对任意实数 x，若 x 为有理数，则 $x + a$ 为有理数，有

$$D(x+a) = 1 = D(x)$$

若 x 为无理数，则 $x + a$ 为无理数，有

$$D(x+a) = 0 = D(x)$$

根据定义知 $D(x)$ 是周期函数，非0有理数 a 都是 $D(x)$ 的一个周期；

因为不存在最小的正有理数，因此，$D(x)$ 不存在函数周期.

若要证明一个函数没有周期，则要证明对任何非零常数 T，都存在 x_0 使得 $f(x_0 + T) \neq f(x_0)$.

例4 证明 $f(x) = x\sin x$ 不是周期函数.

证 设 T 为 $f(x)$ 的周期，则由

$$f(0+T) = T\sin T = 0 = f(0)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \left(\frac{\pi}{2} + T\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{及} \quad T \neq 0$$

得

$$\sin T = 0, \left(\frac{\pi}{2} + T\right)\cos T = \frac{\pi}{2}$$

解得

$$T = -\pi$$

而

$$f\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right) = \frac{5\pi}{12}, f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}, f\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right) \neq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

所以 $f(x) = x\sin x$ 不是周期函数.

例5 证明若 T 为 $f(x)$ 的函数周期，$a \neq 0$，则 $\omega = \dfrac{T}{|a|}$ 为 $f(ax+b)$ 的函数周期.

证 因为

$$f(a(x+\omega) + b) = f(ax + b \pm T) = f(ax + b)$$

所以 ω 是 $f(ax+b)$ 的一个周期.

如果 ω 不是 $f(ax+b)$ 的函数周期，则存在 $0<T_0<\omega$，使得

$$f(a(x+T_0)+b)=f(ax+b+aT_0)=f(ax+b)$$

即 $|a|T_0$ 是 $f(x)$ 的一个周期，且

$$|a|T_0<|a|\omega=T$$

与 T 是 $f(x)$ 的函数周期发生矛盾. 所以 $\omega=\dfrac{T}{|a|}$ 必是 $f(ax+b)$ 的函数周期.

1.3.4 有界性

定义1.7 设 $f(x)$ 在 D 上有定义，如果 $\exists M$ 常数，使得 $\forall x\in D$，恒有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 有**上界**，M 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界；如果 $\exists m$ 常数，使得 $\forall x\in D$，恒有 $f(x)\geqslant m$ 则称 $f(x)$ 在 D 上有**下界**，m 为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界；如果 $f(x)$ 在 D 上既有上界，又有下界，则称 $f(x)$ 在 D 上**有界**.

定理1.2 函数 $f(x)$ 在 D 上有界的充分必要条件是 $\exists M>0$，使得 $\forall x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

证 （充分性） 由 $\forall x\in D$，$-M\leqslant f(x)\leqslant M$ 得，M、$-M$ 分别分 $f(x)$ 在 D 上的上界、下界，所以 $f(x)$ 有界.

（必要性） 因为 $f(x)$ 有界，根据定义，$\exists a,b$ 使得 $\forall x\in D$ 有

$$a\leqslant f(x)\leqslant b$$

记 $M=\max\{|a|,|b|\}$，则有

$$-M\leqslant -|a|\leqslant a\leqslant f(x)\leqslant b\leqslant |b|\leqslant M$$

即有 $|f(x)|\leqslant M$.

例5 证明 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域上有界.

证 $f(x)$ 的定义域为 R，$\forall x\in R$，因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$，所以

$$|f(x)|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

即 $f(x)$ 在 R 上有界.

习题1.3

1. 讨论 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上的单调性.

2. 设 $f(x)>0$，且在 D 上单调增加，证明 $g(x)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$ 在 D 上单调减少.

3. 求下列函数的函数周期.

(1) $\sin 3x$　　(2) $\cos\dfrac{\pi}{3}x$　　(3) $\tan(1-2x)$