2009 考研数学

复习宝典

·经济类·

毕志伟 叶鹰/编

华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

2009
考研数学复习宝典
·经济类

毕志伟　叶　鹰　编

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

2009考研数学复习宝典·经济类/毕志伟 叶 鹰 编. －2版.—武汉:华中科技大学出版社,2008年5月

ISBN 978-7-5609-3443-3

Ⅰ.2… Ⅱ.①毕… ②叶… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第059708号

2009考研数学复习宝典·经济类 毕志伟 叶 鹰 编

责任编辑:徐正达　　封面设计:刘 卉
责任校对:祝 非　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:湖北新华印务有限公司

开本:787mm×1092mm　1/48　　印张:6.625
版次:2008年5月第2版　印次:2008年5月第2次印刷
字数:173 000　　定价:15.00元
ISBN 978-7-5609-3443-3/O·359

前　言

为何编写此书——

每年都有备考的同学问我们这样一些问题:“内容复习了几遍,但心里还是不踏实,怎样才能算是复习好了?”“做题时有点困难,但是看看答案又觉得解法挺简单,为什么自己想不到或者自己选择的解法不合适?”在回答这些问题之前我们会向学生询问几个问题,例如:“二重积分的常规算法和快捷算法有哪些?如何选用?有哪些常考题型?”“关于线积分呢?”等等。从同学们的回答中,我们发现这样一些较普遍的问题:

(1)熟悉教材上的标准知识点,但是却不熟悉由其发展出来的常考的知识点。例如不了解一阶线性微分方程的通解公式的变式。

(2)熟悉基本概念,但是不清楚它们的联系和区别。例如不了解正交矩阵、幂等矩阵、对合矩阵之间的关系,不知道其基本属性的差异。

(3)熟悉不少解题方法,但是不会有预见地、合理地选择方法。例如,想到一个方法便开始算,直到遇到麻烦才回头,浪费了宝贵的时间。

于是,为了提高同学们的复习质量和效率,我们根据自己多年教学工作经验的积累,透视基本概念和定理,拓展公式和结论,挖掘试题背后的考点,归

纳常考的题型并提供应对策略，编成了这套既全面归纳又体现实用的复习宝典。

本书编写特点——

如上所述，这是一本专为考生打造的备考手册，理工类分为22章，经济类分为20章。本宝典以最新研究生数学考试大纲为标准，以大纲中的考试要求为蓝本，每章分两个部分：(1)知识点·点拨，(2)常见题型·应对。附录中收集了常用公式和性质。

为了便于查询，本宝典按照大纲目录顺序编排。为了使用方便，采用条目方式编写，使用“【 】”表示一个独立条目，例题和注解归于该条目；子条目则使用“〖 〗”表示。

知识点·点拨　所收集的知识点包括两个层次：(1)教材中介绍的基本概念、定理、公式、方法，力求简明而完整；(2)历年试卷中考察的、教材中没有提到的常用的结论、公式和技巧。例如，奇函数的原函数一定是偶函数，但是偶函数的原函数却只有(过原点的)一个是奇函数；又如，通项趋于零的数项级数，加括号后与原级数敛散性一样。

对容易出现理解困难和具备更多细节的知识点，我们给予明确和详细的点拨。例如寻求两个无穷小量之和的主部时，被加项何时可以用等价者替换，何时不可以替换？既有规则指导，也有实例说明。

常见题型·应对　考生应当知道的一个事实是，虽然知识点既多又杂，考试题年年变样，但是常

考题型和考点却为数不多且几乎不变！因此，我们在每一章归纳了常见题型并给出了应对策略。

如何使用本书——

使用本书的一种方法是，系统地逐条阅读、理解和体会。对于读到的内容，有些可以立刻记住，例如瓦利斯公式；有些则可能要在解题过程中才会体会到，例如分项法计算幂级数的和。将解题训练和通读宝典相结合，你的复习便是完全的和有效率的，可以充满信心地应对考试了。换句话说，如果宝典上的内容你还有盲点的话，你的准备便不是充分的。

使用本书的另一种方法是，将其作为公式、概念和策略的随身备用手册，遇到问题时，拿出来查找和阅读。此外，附录中归纳了考试中常用的公式，也为你记忆公式提供了方便。

本宝典既适合于开始复习的“起跑者”，也适合于进入复习阶段总结期的临考“冲刺者”。

本书由一直在教学一线的资深教师集体策划并编写。近十年来，他们参加了每一年的湖北省硕士研究生数学入学考试的评卷和分析工作，担任了华中科技大学校内的考研辅导教学并受到学生好评。

感谢使用本书，欢迎提出建议和指正。

作者邮箱：bzw1065@sina.com

编　者

2008.4

目　　录

第1篇　微　积　分

第2篇　线性代数

第3篇　概率论与数理统计

第1篇 微 积 分

第1章 函数、极限、连续

大纲要求

理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系式. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念. 掌握基本初等函数的性质及图形.

了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

理解函数连续性（含左连续和右连续）的概念，会判断函数间断点的类型. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性，最大值和最小值定理，介值定理），并会应用这些性质.

1.1 函 数

知识点·点拨

【常量·变量】在某个考察过程(时间或空间)中保持不变的量称为常量,发生变化的量称为变量.微积分课程中只考虑实数变量.

【变域】在考察过程中,变量所取得的数值的集合(通常是区间)称为变域.

【邻域】包含点 x_0 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为 x_0 的一个邻域,其中 $\delta>0$ 称为该邻域的半径.

【左邻域·右邻域】区间 $(\alpha, x_0]$ $(\alpha<x_0)$ 称为点 x_0 的左邻域,区间 $[x_0, \beta)$ $(x_0<\beta)$ 称为点 x_0 的右邻域.

【去心邻域】从点 x_0 的邻域中去掉点 x_0 后的集合称为点 x_0 的去心邻域.

【一元函数】设 x 与 y 是两个变量,D 是一个非空数集,f 是一个联系着 x 与 y 的对应规则.如果对每个 $x\in D$,依据规则 f,总有唯一的数值 y 与之对应,则称 y 或 f 为 x 的函数,记作 $y=f(x)$;称 D(有时记作 D_f)为此函数的定义域,x 与 y 分别为函数的自变量与因变量.

〖点拨 1〗与 x 对应的 y 必须是存在且唯一的.

〖点拨 2〗定义域及对应规则是函数的两要素.

【值域】设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D,则以下数集 W 称为函数的值域:

$$W=\{f(x) \mid x\in D\}.$$

【函数的相等】两个函数 f 与 g 相等的充分必要条件是它们的定义域相等，并且对相同的自变量 x，函数值也相等，即 $f(x)=g(x)$. 以下两个函数

$$y=\sin x \quad (-\infty<x<+\infty),$$
$$x=\sin y \quad (-\infty<y<+\infty)$$

是同一个函数. 使用什么字母表示不是重要的.

【自然定义域】对使用数学公式及数学运算表示的函数 $f(x)$，称使得 $f(x)$有意义的全体实数组成的集合为该函数的自然定义域. 如果没有指明 $f(x)$的定义域，则默认其定义域为自然定义域.

【函数的奇偶性】设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，则称 $f(x)$是：(1)奇函数，若 $f(-x)=-f(x)$，$x\in D$；(2)偶函数，若 $f(-x)=f(x)$，$x\in D$.

例　对$(-\infty,+\infty)$上定义的函数 $h(x)$，$f(x)=h(x)+h(-x)$为偶函数，$g(x)=h(x)-h(-x)$为奇函数. 这是一个有用的结果.

【奇偶函数的性质】在函数作图、积分计算等问题中常用到函数的奇偶性，其主要性质如下.

〖几何特点〗奇函数的曲线 $y=f(x)(x\in D)$关于原点对称，如果 $0\in D$，则 $f(0)=0$；偶函数的曲线 $y=f(x)$关于 y 轴对称，如果 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，则 $f'(0)=0$.

例　如果奇函数在$(-\infty,0)$上单调增并且凹，则它在$(0,+\infty)$上单调增并且凸；如果偶函数在$(-\infty,

0)上单调增并且凹，则它在$(0,+\infty)$上单调减并且凹.

〖四则运算〗 函数的奇偶性经过四则运算后的变化如下：

f	g	$f\pm g$	$f\cdot g$ 及 f/g	$f(g(x))$
奇	奇	奇	偶	偶
奇	偶	不确定	奇	偶
偶	偶	偶	偶	偶
偶	奇	不确定	奇	偶

〖导函数〗 设函数满足可导条件，则奇函数的导函数是偶函数，偶函数的导函数是奇函数.

〖原函数〗 设 $f(x)$连续，则奇函数 $f(x)$的所有原函数是偶函数，而偶函数 $f(x)$的原函数中却只有一个(通过原点的，例如 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$) 是奇函数.

【函数的周期性】设函数 $f(x)$的定义域是 D，若有正常数 T，使得当 $x\in D$ 时 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$是周期函数，T 是 $f(x)$的一个周期.

〖点拨〗 可以验证，$2T,3T,\cdots$也是 $f(x)$的周期，因此周期函数有无限个周期.

【基本周期】如果 $f(x)$有一个最小的周期 T_0，则称 T_0 是 $f(x)$的基本周期.

例 $\sin x,\cos x$ 都以 2π 为基本周期；狄利克雷函数没有基本周期，因为每个正有理数都是其周期.

【狄利克雷函数及其性质】以德国数学家狄利克雷名字命名的函数，用来说明一些重要的函数性质，定义如下：

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

此函数具有以下基本性质：

(1)$D(x)$是分段函数，不是初等函数；

(2)$D(x)$是周期函数，以每个正有理数 r 为周期，因为 $D(x)=D(x+r)$；

(3)$D(x)$是一个处处有定义的有界函数，也是一个处处不连续的函数；

(4)$D(x)$在任何有限区间$[a,b]$上的定积分不存在.

【周期函数的性质】周期函数的主要性质有：

〖复合函数〗设 T 是 $f(x)$的周期，$a>0$，则 T/a 是复合函数 $\varphi(x)=f(ax+b)$的周期. 例如 $\sin x$ 以 2π 为周期，$\sin(3x+1)$则以 $2\pi/3$ 为周期.

〖和函数〗当两个周期函数的周期 T_1,T_2 有最小公倍数T时，它们的和函数是周期函数，周期为 T. 而当 T_1,T_2 无最小公倍数时，和函数不一定是周期函数. 例如 $f(x)=\sin x$ 以 2π 为周期，狄利克雷函数 $D(x)$以正有理数 r 为周期，由于 2π 与 r 无最小公倍数，其和 $f(x)+D(x)$不是周期函数.

〖导函数〗可导的周期函数 $f(x)$的导函数还是周期函数. 事实上，于 $f(x+T)=f(x)$两边同时对 x 求导，得出 $f'(x+T)=f'(x)$. 这说明 $f'(x)$以 T 为周期.

〖原函数〗一般地,周期函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 不一定是周期函数,例如,$f(x)=1+\cos x$ 是周期函数,但是其原函数 $F(x)=x+\sin x$ 却不是周期函数.但是,如果周期函数 $f(x)$ 在周期区间 $[0,T]$ 上的定积分 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$,则它的原函数都是周期函数.事实上,设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,令 $h(x)=F(x+T)-F(x)$,则会有 $h'(x)=f(x+T)-f(x)=0$,$h(0)=F(T)=F(0)=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$,故 $h(x)=0$.

〖有界性〗在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期函数是有界函数.例如 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数,因为它的导函数 $f'(x)=2x\cos x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的无界函数,从而不是周期函数,进而推出 $f(x)$ 不是周期函数.

〖定积分〗设 $f(x)$ 是以 T 为周期的在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期函数,a 为任意实数,则有

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

【函数的单调性】设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,$x_1,x_2\in I$.

(1) 若 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 为 I 上的单调增(或单调减)函数.单调增函数与单调减函数统称为单调函数.

(2) 若 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 为 I 上的严格单调增(或严格

单调减）函数．严格单调增函数与严格单调减函数统称为严格单调函数．

【函数的有界性】设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义．若存在常数 B，使得对每个 $x\in I$，有 $f(x)\leqslant B$（或 $f(x)\geqslant B$），则称 $f(x)$ 在 I 上有上界（或有下界），且称 B 为 $f(x)$ 在 I 上的一个上界（或下界）．若存在 $M>0$，使得对每个 $x\in I$，$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界；否则称 $f(x)$ 为 I 上的无界函数．既有上界又有下界的函数是有界函数．

【可逆函数】若自变量取不同值时，对应的函数值也不相同，则称该函数为可逆函数．

〖点拨〗严格单调函数必为可逆函数，但反之不然．

【反函数】当函数 $y=f(x)$ 可逆时，可以定义从函数 $f(x)$ 的值域 W_f 到定义域 D_f 的一个函数 f^{-1}：$f^{-1}(y)=x, y\in W_f, f(x)=y$．称之为函数 $f(x)$ 的反函数．

〖点拨〗通常，从方程 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$ 即得到所求的反函数表示式．

【反函数的图形】在同一个坐标系中函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，但是与函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形却是相重合的，如图 1-1-1 所示．

【基本初等函数】包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数．

【初等函数】由基本初等函数经有限次四则运算、有限次复合运算构成的用一个数学算式表示的函数．

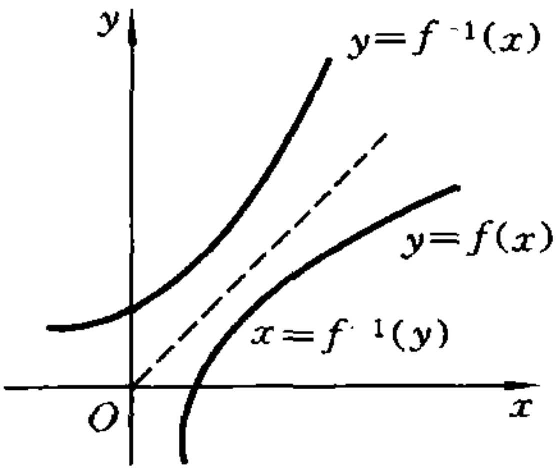

图 1-1-1

常见题型·应对

历年考卷中较少专门考察函数知识，但是作为微积分的研究对象，函数的基本知识贯穿在许多问题当中，因此必须熟练地掌握本章的知识点.

【求函数的定义域问题】首先依据 $f(x)$ 中出现的基本初等函数性质写出关于自变量的不等式组. 例如：对于偶次根式函数如$\sqrt{u}$要求 $u\geqslant 0$，对于对数函数如 $\ln u$ 要求 $u>0$，对于分式函数如$\dfrac{v}{u}$要求 $u\neq 0$，对于反三角函数 $\arcsin u$ 或 $\arccos u$ 要求 $|u|\leqslant 1$，然后对写出的不等式进行求解.

例　函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$的定义域是(　　).

A. $\{x|x>-1\}$　　B. $\{x|x>1\}$

C. $\{x|x\geqslant -1\}$　　D. $\{x|x\geqslant 1\}$

解　首先写出函数中出现的基本初等函数的定义域：$x+1>0$ 以及 $x-1>0$，联立即知正确选项应是 B.

【简单函数的复合运算】将函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 按照指定顺序代入即得复合函数 $f(g(x))$或 $g(f(x))$.