高等学校面向21世纪课程统编改革教材

新编高等数学

田有先 叶留青 郑映畅 马金亭 主编

汕头大学出版社

高等学校面向21世纪课程统编改革教材

新编高等数学

田有先　叶留青
郑映畅　马金亭　主编

汕头大学出版社

粤新登字 15 号

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学 / 田有先 叶留青 郑映畅 马金亭 主编

—汕头:汕头大学出版社,2004.6

ISBN 7-81036-425-1/O·4

Ⅰ.新…

Ⅱ.田…叶…郑…马…

Ⅲ.高等数学—高等学校—教材

Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 36277 号

汕头大学出版社出版发行

(广东省汕头市汕头大学内)

广州花都市新华印刷厂印刷　新华书店经销

2004 年第 2 版　2004 年 6 月第 1 次印刷

开本:850×1168mm 毫米　1/32　印张:18.25

字数:43 千字　印数:1~3000

定价:28.50 元

《新编高等数学》编委会

主　编　田有先　叶留青
　　　　郑映畅　马金亭
副主编　孙玉芹　沈世云
　　　　康开龙　郑继明
编　委　孙建设　李应川
　　　　冯　春　李　瑞

前 言

近年来,我国高等院校数学教学改革的思想十分活跃。1998年3月教育部在武汉召开了全国高等学校教学工作会议。教育部明确要求我国高等学校全面实施《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》,根据教育部要求改革重点是基础课程,主干课程的教学内容和体系的改革,要按照新的专业目录制定的主要专业的人才培养方案,实现课程结构和教学内容的整合优化,编写出版一批高水平、高质量的“面向21世纪课程教材”。1999年8月在辽宁大学召开的第七次全国理科高等数学研讨会上,教育部面向21世纪教学内容和课程改革体系项目专家顾问组副组长、非数学类专业高等数学教学内容和课程体系改革项目组组长、清华大学萧树铁教授做了关于“数学在大学教育中的作用”的专题报告,北京航空航天大学李心灿教授做了“在高等数学教学中对学生进行素质教育的实践与思考”的报告。会议期间,来自全国62所院校的专家学者广泛交流了各院校推进高等数学教学改革的情况,形成很多共识和改革思路。例如:应该扭转将高等数学课的“工具性”理解过窄的倾向;应该在高等数学课程里加强理性思维训练,全面改善学生素质;加强分析问题能力、应用意识和创新意识的培养;注重高等数学教学中弘扬人文精神的教化作用,以期在数学教学中全面体现知识、能力和素质的统一。本书正是根据教育部的文件精神和这次会议精神编写而成的结构完整、体系新颖、应用广泛的高等学校面向21世纪发展需要的新教材。

本书是针对理工农科和师范院校本、专科在校生而编写的。

适用于非数学专业的普通高校本、专科学生和成人高校的非数学专业学生使用。它在保持数学课程的系统性、严密性、逻辑性的基础上，力求缩短抽象数学与实际应用的距离，适当地介绍了高等数学在工业、农业、商业、城市管理、医疗、航天、军事等现代科技生活中的应用。本书具有以下特点：

1. 压缩学时，精简内容。本书在保持高等数学基本教学内容的基础上，把全年的教学总时数压缩到160学时左右，精简了部分教学内容。在教学过程中，不同专业可根据自身的具体情况对教学内容进行取舍。若教学总时数在130学时以下的专业，可删去打“*”号的有关内容；若教学总学时在70学时以下的专业，可只讲第一至第六章内容。

2. 开拓学生的思维、树立科学的思想方法。本书注意培养学生科学的思维方式，例如在“无穷小与无穷大”一节里，我们增加了“无穷思想在科学生活中的意义”一段内容。在这里，我们提出了“时间回归”的概念，旨在引导学生应用所学知识，建立起认识、研究客观世界的科学的思想方法。

3. 引导学生学数学、爱数学并培养他们用数学的意识。在例题和习题中，我们选编了一些趣味性、应用性较强的实例和习题。例如城市管理中的“车流量问题”、“大气污染指数问题”、工业生产中的“生产规模问题”、农业生产中的“食物链问题”、“病虫害问题”等。本书习题量不大，所有习题难度适中，不致于给教学带来困难。

4. 讲一点数学史。目的在于帮助学生建立起准确的概念。例如，在函数的定义前，我们谈了人们对函数概念的认识过程，讲到能否用一个解析式子表达并不是函数的本质。另外，在一些关键术语后加注英文，从侧面帮助学生理解有关概念。例如导数，英文为 Derivative，而原函数则是 Antiderivative，即反导数。

5. 注意引导学生获取正确的学习方法及解题技巧。在建立

起准确概念的基础上，本书加强了对学生在学习方法上的指导。例如求极限的八种基本方法；引入线性因子制表画图；适时总结求不定积分的方法，突出“凑微分法”等。

本书是由汕头大学出版社直接组织全国有代表性的重庆邮电学院、沈阳化工学院、西华师范大学、新乡师范高等专科学校、吕梁高等专科学校、焦作师范高等专科学校、重庆交通学院、邯郸农业高等专科学校的专家和专业教师联合编写和修改而成。参加编写和审改的专家和专业教师有(按编写章节先后为序)：田有先、沈世云、郑继明、叶留青、孙建设、郑映畅、康开龙、马金亭、孙玉芹、李应川、冯春、李瑞等。

本书有幸邀请北京大学数学科学学院博士生导师刘张矩教授主审，本书初稿由主编、副主编分别审改后交田有先教授、李应川教授对全书进行系统的修改、统稿，最后由主编定稿。

本书在编写过程中，参考了国内外有关文献、著作、教材，引用了本书所列参考文献中的有关材料，在此注明并表示感谢。

本书在编写过程中得到辽宁省数学会理事长、辽宁大学数学系主任吕方教授、东北大学理学院院长、博士生导师张庆灵教授、日本静冈大学宋延奎博士的热情指导，在此对他们表示衷心的感谢！

汕头大学出版社社长张惠民先生对本书的出版给予大力支持，在此深表谢意！

由于编者的水平有限，编写时间比较仓促，例题、习题中的应用题相对仍嫌不足，错误之处在所难免，恳请读者批评指正，以待将来统一修改和再版。

编　者

目　　录

第一章　函数与极限

从数学的发展史来看，由初等数学到高等数学的转变，实质上就是由常量概念到变量概念的转变．函数关系是变量之间的相互依赖关系，而极限思想则是研究变量之间相互关系的有力工具．本章对中学已学过的有关集合、函数的概念与性质作简单的复习，着重介绍数列与函数的极限理论，并研究连续函数的概念与性质，为今后学习微积分以及现代数学奠定一个坚实的基础．

第一节　函　　数

一、集　合

（一）集合(set)

具有某种确定性质的一类事物的总体称为**集合**，把构成集合的对象叫做**集合的元素**．集合论的创始人是康托(Cantor, 1845—1918，德国)．从19世纪后半叶开始，集合论逐渐发展成为现代数学的基础．

通常用大写英文字母 A,B,C 等表示集合；用小写英文字母 a,b,c 等表示集合的元素．一般用下列两种方法表示集合：

1．列举法：就是把集合的元素都列举出来，例如集合 A 是由前5个英文小写字母组成的，则记为 $A=\{a,b,c,d,e\}$．

2．示性法：就是在集合中把集合的特性表达出来，例如 $A=\{x \mid x \text{ 是前5个英文小写字母}\}$．

若 a 是集合A的元素,则记为 $a \in A$.用 $a \notin A$ 表示 a 不是 A 的元素.一般用 N 表示全体自然数的集合,用 Z 表示全体整数的集合,用 Q 表示全体有理数的集合,用 R 表示全体实数的集合.若集合 A 的元素都是集合B的元素,则称 A 是B的**子集**,即若 $a \in A$,则必有 $a \in B$.这时,称 A 包含于B,或 B 包含A,记为 $A \subset B$,例如 $Q \subset R$.

若 $A \subset B$,且 $B \subset A$,则说 A 与B **相等**,记为 $A = B$.

不含有任何元素的集合叫做**空集**,记为 $\varnothing$.注意:$\varnothing \neq \{0\}$.

例 1 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 表示 xoy 平面上圆$x^2 + y^2 = 1$ 的圆内一切点的集合 .

(二) 区间(interval)

区间就是实数轴上的一些实数集合.设 $a < b$ 且a、$b \in R$,则

1.开区间:$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$,这里 a、$b \notin (a,b)$,a 和 b 分别叫做区间(a,b)的左、右端点.

2.闭区间:$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,这里 a、$b \in [a,b]$.

3.半开区间:$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$,$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$.这三种区间称为有限区间,$b - a$ 叫做区间的长度.

以后我们还要经常用到无穷区间:$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$ 及$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$.事实上,实数集 R 就可表示为$(-\infty, +\infty)$,其中 ∞ 只是一个符号,由英国数学家澳利斯(Wallis,1616—1703)于 1655 年引入,读作“无穷大”(infinity).

注意,我们不能把它当作实数看,更不能拿它进行运算.

下面介绍**邻域**(neighborhood)的概念:在数轴上,以点 a 为中心的任何开区间称为**点a的邻域**,记做 $U(a)$.设 δ 为一正数,则开区间$(a-\delta, a+\delta)$就是 a 的一个邻域,叫做点 a 的δ邻域,记为 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$,其中 a 称为该邻域的中心,δ 称为该邻域的半径(图 1 - 1).点 a 的δ邻域去掉a 后所得的集合$(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$叫做点 a 的去心δ邻域,记

为 $U(\hat{a},\delta)$.

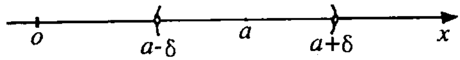

图 1－1

二、函数概念

(一) 常量与变量(constant & variable)

在日常生活和工程技术中，常量指在某一过程中保持一定数值的量，变量是指在某一过程中可取不同数值的量．例如在匀速直线运动中，速度 v 是常量，时间 t 和位移 s 是变量．习惯上用 a,b,c 等表示常量，用 x,y,z,u,v,s,t 等表示变量．

(二) 函数(function)

在高等数学中，函数是最重要的概念之一．在 18 世纪初期，人们只是把函数理解为一个解析式子，甚至认为分段函数不能用一个式子表示，称为伪函数．在傅立叶(Fourier，1768—1830，法国)发现分段函数能用三角级数表示后，原有的函数概念才被打破．后来狄里克莱(Dirichlet，1805—1859，德国)和黎曼(Riemann，1826—1866，德国)认为能否用解析式子表达不是函数的本质，函数概念才被抽象化．在集合理论建立以后，人们才得到了今天这样一个严密、科学的函数概念：

定义 1　设 D 是一数集，f 是一个确定的对应关系．如果对于 D 中的每一个元素 x，通过 f 都有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，并把 y 叫做 f 在 x 处的函数值．数集 D 叫做该函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．当 x 遍取 D 中的数值时，对应的函数值的全体组成数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$，叫做函数的值域，并把平面上由点集 $\{(x,f(x))\mid x\in D\}$ 所构成的图像称为函数 $y=f(x)$ 的图形．

一般情况下，我们研究的都是单值函数(single valued

function)，即对任一 $x \in D$，只有一个函数值与之对应，否则叫做多值函数．

例2 把一长为 a 宽为 b 的长方形铁板剪去四个角，做成一无盖铁盒，若剪去的小正方形的边长为 x，则铁盒的体积可表示为：$v = (a-2x)(b-2x)x$．这里 x 是自变量，v 是因变量，定义域也就是 x 的变化范围为

$$0 < x < c, c = \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right\},$$

$\min\{A, B, C\}$ 表示在 A、B、C 中选取最小的一个数值（相应地用 $\max\{A, B, C\}$ 表示在 A、B、C 中选取最大的一个数值）．

函数的定义域可以预先给定；对于抽象解析式所表达的函数，我们约定，函数的定义域为使解析式有意义的自变量的取值范围，如 $y = \sqrt{x-1}$ 的定义域为 $x \geqslant 1$；在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定，如例 2．

三、函数的几种特性

（一）奇偶性（odevity）

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的，若用 $-x$ 来换 x（假定 $-x$、x 都在函数的定义域 D 内），函数值不变：即 $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；若函数的绝对值不变，但符号相反：即 $f(-x) = -f(x)$，则称函数为**奇函数**．例如 $y = x^2$ 为偶函数，$y = x^3$ 为奇函数．从图形上来看，偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于坐标原点．如图 1－2、1－3 所示．

（二）周期性（periodicity）

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在数 $l \neq 0$，使对一切 $x \in D$ 且 $x + l \in D$，总有 $f(x+l) = f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，l 叫做 $f(x)$ 的**周期**．通常所说的周期是指最小正周期．如 $y = \sin x$ 就是周期函数，它的周期是 2π．在周期为 l 的函数的定义

域内，相邻的每个以 l 为长度的区间上，函数的图形都是相同的.

（三）单调性（monotonicity）

设有函数 $y=f(x)$，$(x\in D)$，对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)\subset D$，若当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是递增（递减）的. 递增或递减函数统称为**单调函数**. 如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增的.

（四）有界性（boundedness）

对于函数 $y=f(x)$，$(x\in D)$，$(a,b)\subset D$，若存在 $M>0$，使对一切 $x\in(a,b)$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的，否则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的. 如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上是无界的，在 $[1,+\infty)$ 上是有界的.

四、反函数（inverse function）

定义 2　设有函数 $y=f(x)$ $(x\in D,y\in W)$. 如果对于 W 中的每一个值 $y=y_0$，都有 D 中唯一的值 $x=x_0$，使得 $f(x_0)=y_0$，我们就说在 W 上确定了 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$ $(y\in W)$.

显然，反函数的定义域为 W，值域为 D. 相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，把 $y=f(x)$ 叫做**直接函数**. 如果在定义 2 中取消“有 D 中唯一的值 $x=x_0$，使得 $f(x_0)=y_0$”这句话，就不能保证反函数是单值函数. 应分情况取它的单值分支. 但对于单值函数 $y=f(x)$，如果它还是单调的，则其反函数就一定是单值的. 此外，习惯上仍用 x 表示自变量，把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，因为这里的函数对应关系可能改变了.

例 3　求 $y=x^2$ $(x\in(-\infty,+\infty))$ 的反函数.

解　首先把区间 $(-\infty,+\infty)$ 分成两个子区间：$(-\infty,0]$ 和 $[0,+\infty)$. 在 $(-\infty,0]$ 上，$y=x^2$ 的反函数是 $y=-\sqrt{x}$，在

$[0,+\infty)$ 上，$y=x^2$ 的反函数是 $y=\sqrt{x}$.

在同一直角坐标系下，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一条曲线；$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$，如图 1-2 所示.

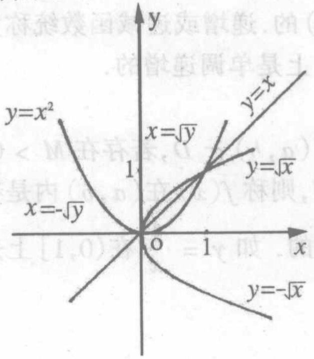

图 1-2

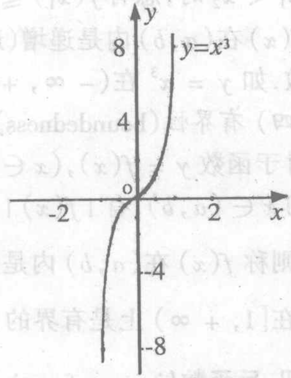

图 1-3

五、复合函数、初等函数

(一) 复合函数(composite function)

定义 3 设 $y=f(u)\ (u\in U)$，$u=\varphi(x)$，$(x\in D,u\in U_1)$，若 $U_1\subset U$，则称 $y=f(\varphi(x))\ (x\in D)$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，u 称为**中间变量**(intermediate variable).

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的. 注意，对于复合函数 $y=f(\varphi(x))\ (x\in D)$，要求 $u=\varphi(x)$ 的值域 U_1 包含在 $y=f(u)$ 的定义域 U 中.

(二) 初等函数(elementary function)

1. 基本初等函数

(1) 幂函数(power function)：$y=x^{\mu}$ (μ 是常数). 幂函数的定义域要由常数 μ 来确定，但该函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义. $y=$