清华大学公共基础平台课教材

线性代数与几何（上）

俞正光 鲁自群 林润亮 编

清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

线性代数与几何（上）

俞正光 鲁自群 林润亮 编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书的核心内容包括矩阵理论以及线性空间理论，分上、下两册出版，对应于两个学期的教学内容. 上册系统地介绍线性代数与解析几何的基本理论和方法，具体包括行列式、矩阵、几何空间中的向量、向量空间$\mathbb{R}^n$、线性空间、线性变换、二次型与二次曲面共7章内容. 本书将几何与代数密切地联系在一起，层次清晰，论证严谨，例题典型丰富，习题精练适中.

本书可作为高等院校理、工、经管等专业的教材及教学参考书，也可供自学读者及有关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何. 上/俞正光，鲁自群，林润亮编. —北京：清华大学出版社，2008.8
(清华大学公共基础平台课教材)
ISBN 978-7-302-18043-2

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①俞…　②鲁…　③林…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　②解析几何—高等学校—教材　Ⅳ. O151.2　O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 097439 号

责任编辑：刘　颖
责任校对：王淑云
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质　量　反　馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京市昌平环球印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　**印　张**：18.25　**字　数**：387 千字
版　　次：2008 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2008 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：26.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：007425—01

前　言

线性代数是学习自然科学、工程和社会科学的学生的一门重要的基础理论课程，作为高等学校基础课，除了作为各门学科的重要工具以外，还在提高人才的全面素质中起着重要的作用. 它在培育理性思维和审美功能方面的作用也应得到充分的重视. 研究型学习重在思想方法的培养，理性思维能力是当前学生较为薄弱的方面，代数学中较为抽象的数学结构和形式推理为培养学生的抽象思维能力、符号运算能力、空间想象能力和逻辑推理能力等有着其他课程难以替代的重要作用. 同时也为学生了解现代数学的思维方式提供了一个窗口. 通过本书的学习，希望在以下三个方面能发挥其应有的作用：能够全面系统地掌握线性代数与几何的基本知识；能够深刻领会处理代数问题的思想方法；能够培养和提高抽象思维能力、逻辑推理能力、计算能力. 为了实现这些目的，不仅要突出重点，抓住关键，解决好难点，而且要善于透过知识的表面，深入揭示代数的本质思想方法. 本书涵盖了线性代数和解析几何、射影几何等基础内容. 在内容安排上，注重突出科学性，简单扼要，循序渐进，不过分强调技巧的训练. 代数学与分析、几何学共同构建了近代数学的核心，更是当今数学中最富有活力的学科之一. 线性代数是代数学的基础，它在理科、工科，甚至在经济和社会科学各个领域都有广泛的应用. 特别是由于信息科学与技术的快速发展，离散数学的基础训练在各专业学生的数学能力和科学素质的培养中的地位日益突出. 解析几何是几何中极其基础的部分，一方面可用代数对其进行理论归纳，同时又是代数理论发展的重要背景. 代数与几何相互渗透，代数为研究几何问题提供了有效的方法，几何为抽象的代数结构和方法提供了形象的几何模型和背景，这样就使学习者更好地领略到抽象的作用及其美. 本教材加强了几何内容，如在上册中增加了仿射坐标系的内容，在下册中增加了射影几何这个初等模型，目的是加深读者对“形”的认识，有利于培养读者的形象思维及理性思维的习惯.

本书的核心内容包括矩阵理论以及线性空间理论. 这些概念和理论不仅为各个专业领域提出相关问题时提供了准确的数学表达语言，而且也为解决问题提供了有力的工具. 本书分上、下两册出版，对应于两个学期的教学内容. 上册共有 7 章. 第 1 章在中学的二、三阶行列式的基础上引入 n 阶行列式的概念，并通过例子介绍利用行列式的性质计算行列式的基本方法. 矩阵在线性代数中的地位很特殊，一方面矩阵本身有许多理论问题可以研究；另一方面它又是研究其他对象的一种重要的工具. 更为重要的是，矩阵论在许多工科领域应用很广泛. 而且，许多线性代数问题都可以化成矩阵问题来研究解决. 这充分说明了矩阵学习的

重要性.在第2章介绍矩阵的代数运算、矩阵的初等变换和相抵标准形,以及矩阵分块的技巧,为以后进一步学习线性代数打好基础.第3章介绍几何空间中的向量代数,引入仿射坐标系和直角坐标系,运用代数工具讨论有关平面和直线等几何问题.第4章引入n维向量的概念,重点讨论了向量组的线性相关和线性无关的概念和性质,这不仅是学习线性空间理论的基础,而且是训练学生抽象思维能力和逻辑推理能力的关键部分.这一章还引入了矩阵的秩这个重要的参数.线性方程组是线性代数的一个极其重要的内容.通过线性方程组的研究,不仅可以得到很有用的结论,而且能体现代数研究问题、解决问题的思想方法.有关线性方程组理论的研究及应用始终贯穿课程的始末,在这里,通过解空间结构的研究以及它和矩阵的秩之间的关系,给出了有关线性方程组解的结构的完整理论.线性空间与线性变换是线性代数的核心内容.由于线性空间内容比较抽象,本书采用从特殊到一般、从具体到抽象,循序渐进的方法.从第3章的三维几何空间,到第4章的n维向量空间,最后在第5章引入抽象的线性空间概念,着重研究了线性子空间的性质.并在实数域的线性空间上引入度量概念,建立了欧几里得空间.为了进一步深刻揭示线性空间的向量之间的内在联系,在第6章重点研究线性变换的性质及其与矩阵之间的联系.线性代数中,各种类型的变换随处可见,线性变换是其中最重要的一种变换.在线性变换的研究和讨论中,几何的思想和矩阵理论的运用都得到了充分的体现,最能体现线性代数研究问题和解决问题的思想方法.这一章还讨论了科学技术中非常有用的特征值问题并由此引入矩阵相似的概念.几何与代数的联系,除了在三维空间平面和直线的研究之外,更深入的就是二次型一般理论的研究对于二次曲面分类的应用.第7章介绍二次齐次函数即二次型的化简和实二次型的正定性,由于三元二次齐次函数的几何背景是二次曲面,通过主轴化方法将一般二次曲面方程化为直角坐标系下的标准方程,从而对二次曲面实现分类.下册共有5章,分别讨论一元多项式的理论,矩阵的相似标准形,酉空间,矩阵分析和射影几何等.

本书是在清华大学出版的《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》两书的基础上,总结了清华大学近十年教学实践,经过对课程进行整合,改编而成.由林润亮编写第1,2章,鲁自群编写第3,4章,俞正光编写第5,6,7章.本书编写得到清华大学数学科学系李津教授,张贺春教授,朱彬教授,邢文训教授和李铁成教授等的支持和帮助,清华大学出版社的刘颖博士为本书出版做了大量细致的工作,在此一并表示感谢.

由于水平有限,不妥之处实属难免,敬请读者批评指正.

本书可供理、工、经济管理各专业学生作为学习线性代数的教科书或教学参考书.也可供科技人员和自学者参考.

作　者

2008年6月

目　录

第 1 章　行列式 …… 1

1.1　n 阶行列式的定义 …… 1

1.1.1　二阶行列式与三阶行列式 …… 1

1.1.2　排列 …… 4

1.1.3　n 阶行列式的定义 …… 6

1.2　行列式的性质及应用 …… 10

1.2.1　行列式的性质 …… 10

1.2.2　用性质计算行列式的例题 …… 14

1.3　行列式的展开定理 …… 17

1.3.1　行列式的展开公式 …… 17

1.3.2　利用展开公式计算行列式的例题 …… 20

1.4　克拉默法则 …… 26

1.4.1　克拉默法则 …… 26

1.4.2　克拉默法则的应用 …… 28

习题 1 …… 30

第 2 章　矩阵 …… 37

2.1　解线性方程组的高斯消元法 …… 37

2.1.1　线性方程组 …… 37

2.1.2　高斯消元法 …… 40

2.1.3　齐次线性方程组 …… 43

2.2　矩阵及其运算 …… 44

2.2.1　矩阵的概念 …… 44

2.2.2　矩阵的代数运算 …… 47

2.2.3　矩阵的转置 …… 52

2.3　逆矩阵 …… 54

2.3.1 方阵乘积的行列式 …… 54
2.3.2 逆矩阵的概念与性质 …… 55
2.3.3 矩阵可逆的条件 …… 58
2.4 分块矩阵 …… 61
2.5 矩阵的初等变换 …… 65
2.5.1 矩阵的初等变换和初等矩阵 …… 66
2.5.2 矩阵的相抵和相抵标准形 …… 67
2.5.3 用初等变换求逆矩阵 …… 69
2.5.4 分块矩阵的初等变换 …… 71
习题2 …… 74

第3章 几何空间中的向量 …… 80

3.1 向量及其运算 …… 80
3.1.1 向量的基本概念 …… 80
3.1.2 向量的线性运算 …… 81
3.1.3 共线向量、共面向量 …… 83
3.2 仿射坐标系与直角坐标系 …… 86
3.2.1 仿射坐标系 …… 86
3.2.2 用坐标进行向量运算 …… 88
3.2.3 向量共线、共面的条件 …… 91
3.2.4 空间直角坐标系 …… 91
3.3 向量的数量积、向量积与混合积 …… 93
3.3.1 数量积及其应用 …… 93
3.3.2 向量积及其应用 …… 97
3.3.3 混合积及其应用 …… 100
3.4 平面与直线 …… 102
3.4.1 平面方程 …… 102
3.4.2 两个平面的位置关系 …… 104
3.4.3 直线方程 …… 105
3.4.4 两条直线的位置关系 …… 106
3.4.5 直线与平面的位置关系 …… 108
3.5 距离 …… 109
3.5.1 平面的法方程 …… 109
3.5.2 点到直线的距离 …… 110
3.5.3 异面直线的距离 …… 110

习题 3 …… 111

第 4 章 向量空间 $\mathbb{R}^n$ …… 115

4.1 向量空间 $\mathbb{R}^n$ …… 115
4.1.1 n 维向量及其运算 …… 115
4.1.2 向量空间 $\mathbb{R}^n$ …… 116
4.2 向量组的线性相关性 …… 118
4.2.1 线性相关的概念 …… 118
4.2.2 线性相关、线性无关的进一步讨论 …… 120
4.3 向量组的秩 …… 123
4.3.1 向量组的线性表出 …… 123
4.3.2 极大线性无关组 …… 125
4.3.3 向量组的秩 …… 126
4.4 矩阵的秩 …… 127
4.4.1 矩阵秩的概念 …… 128
4.4.2 矩阵秩的计算 …… 129
4.4.3 矩阵的秩与向量组的秩的关系 …… 132
4.4.4 秩的性质 …… 134
4.5 齐次线性方程组 …… 136
4.5.1 齐次线性方程组有非零解的充要条件 …… 136
4.5.2 基础解系 …… 137
4.6 非齐次线性方程组 …… 142
4.6.1 非齐次线性方程组有解的条件 …… 142
4.6.2 非齐次线性方程组解的结构 …… 143
习题 4 …… 146

第 5 章 线性空间 …… 150

5.1 线性空间 …… 150
5.1.1 数域 …… 150
5.1.2 线性空间的定义 …… 151
5.1.3 线性相关与线性无关 …… 153
5.1.4 基、维数和坐标 …… 154
5.1.5 过渡矩阵与坐标变换 …… 156
5.2 线性子空间 …… 159

5.2.1 线性子空间 …… 159
5.2.2 子空间的交与和 …… 162
5.2.3 子空间的直和 …… 165
5.3 线性空间的同构 …… 167
5.4 欧几里得空间 …… 170
5.4.1 内积 …… 170
5.4.2 标准正交基 …… 173
5.4.3 施密特正交化 …… 175
5.4.4 正交矩阵 …… 177
5.4.5 可逆矩阵的 QR 分解 …… 178
5.4.6 正交补与直和分解 …… 180
5.5 商空间 …… 182
习题 5 …… 186

第 6 章 线性变换 …… 190

6.1 线性变换的定义和运算 …… 190
6.1.1 线性变换的定义和基本性质 …… 190
6.1.2 线性变换的运算 …… 193
6.2 线性变换的矩阵 …… 195
6.2.1 线性变换在一组基下的矩阵 …… 195
6.2.2 线性变换与矩阵的一一对应关系 …… 197
6.2.3 线性变换的乘积与矩阵乘积之间的对应 …… 200
6.3 线性变换的核与值域 …… 200
6.3.1 核与值域 …… 200
6.3.2 不变子空间 …… 205
6.4 特征值与特征向量 …… 207
6.4.1 特征值与特征向量的定义与性质 …… 208
6.4.2 特征值与特征向量的计算 …… 210
6.4.3 特征多项式的基本性质 …… 214
6.5 相似矩阵 …… 217
6.5.1 线性变换在不同基下的矩阵 …… 217
6.5.2 矩阵的相似 …… 218
6.5.3 相似矩阵的性质 …… 219
6.5.4 实对称矩阵和对角矩阵相似 …… 222
习题 6 …… 225

第 7 章　二次型与二次曲面 ………… 230
7.1　二次型 ………… 230
7.1.1　二次型的定义 ………… 230
7.1.2　矩阵的相合 ………… 232
7.2　二次型的标准形 ………… 233
7.2.1　主轴化方法 ………… 234
7.2.2　配方法 ………… 235
7.2.3　矩阵的初等变换法 ………… 239
7.3　惯性定理和二次型的规范形 ………… 243
7.4　实二次型的正定性 ………… 245
7.5　曲面与方程 ………… 250
7.5.1　球面方程 ………… 251
7.5.2　母线与坐标轴平行的柱面方程 ………… 252
7.5.3　绕坐标轴旋转的旋转面方程 ………… 253
7.5.4　空间曲线的方程 ………… 254
7.6　二次曲面的分类 ………… 255
7.6.1　椭球面 ………… 256
7.6.2　单叶双曲面 ………… 256
7.6.3　双叶双曲面 ………… 257
7.6.4　锥面 ………… 258
7.6.5　椭圆抛物面 ………… 258
7.6.6　双曲抛物面 ………… 258
7.6.7　一般二次方程的化简 ………… 259
习题 7 ………… 261
习题提示与答案 ………… 265
索引 ………… 280

第1章 行列式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学中有广泛的应用，而且在其他学科中也经常会碰到它．在初等代数中，为求解二元和三元线性方程组，引入了二阶和三阶行列式．本章的目的是在二阶和三阶行列式的基础上，进一步建立 n 阶行列式的理论，并且讨论 n 阶行列式对求解 n 元线性方程组的应用．

1.1 n 阶行列式的定义

在本节中，我们将先对二阶和三阶行列式的定义以及如何利用它们求解二元和三元线性方程组，作一简单的回顾，然后介绍排列的概念及其基本性质，最后给出 n 阶行列式的定义．

1.1.1 二阶行列式与三阶行列式

对二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ a_2x + b_2y = d_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

进行消元，可得

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x = d_1b_2 - b_1d_2, \qquad (a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1d_2 - d_1a_2.$$

若 $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$，则线性方程组(1.1)有唯一解

$$\begin{cases} x = \dfrac{d_1b_2 - b_1d_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, \\ y = \dfrac{a_1d_2 - d_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

为了便于记忆这些解的公式，我们引入**二阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.3}$$

其中 a_{ij} 叫做行列式的**元素**，用两个下标表示该元素的位置，第一个下标 i 叫行指标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫列指标，表示位于第 j 列．利用二阶行列式，(1.2)式可表示为

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

其中分母是由线性方程组(1.1)的系数按原来位置排列成的行列式，称为线性方程组(1.1)的**系数行列式**．于是可以把线性方程组(1.1)的解法总结为：若线性方程组(1.1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.4}$$

则线性方程组(1.1)有唯一解 $x=\dfrac{D_1}{D}$，$y=\dfrac{D_2}{D}$，其中

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

它们是将系数行列式(1.4)中的第 1 列和第 2 列分别换成线性方程组(1.1)中的常数项 d_1，d_2 所得到的行列式．

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 5x-7y=29. \end{cases}$$

解 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=-31\neq 0,$$

所以此线性方程组有唯一解．又

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 29 & -7 \end{vmatrix}=-93,\qquad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 29 \end{vmatrix}=62.$$

故线性方程组的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-93}{-31}=3, \\ y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{62}{-31}=-2. \end{cases}$$

■

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

的类似解法，我们引入**三阶行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

这是一个包括六项的代数和，每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，其中有三项前面带正号，后三项前面带负号.

通过类似于对线性方程组(1.1)所做的讨论，可以得到线性方程组(1.5)的下述解法.若线性方程组(1.5)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.7}$$

则线性方程组(1.5)有唯一解

$$x=\frac{D_1}{D}, \qquad y=\frac{D_2}{D}, \qquad z=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

它们是将系数行列式(1.7)中第 1,2,3 列分别换成线性方程组(1.5)中的常数项所得到的行列式.

例 1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 由于线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$$
$$+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1$$
$$=-5\neq0,$$

所以此线性方程组有唯一解.经计算可得

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5.$$

故方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$ ■

从上面的例子可以看出,对于未知量个数与方程个数相等的线性方程组(1.1)和线性方程组(1.5),如果它们的系数行列式不等于0,用行列式求解是方便的.

在实际应用中,遇到的线性方程组所包含的未知量常常多于三个,而且在某些理论研究中往往需要考虑 n 个未知量的线性方程组的求解问题,我们自然希望能把上面二元和三元线性方程组的解法推广到包含 n 个未知量 n 个方程的线性方程组. 为此首先要把二阶和三阶行列式加以推广,引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 排列

n 阶行列式的定义和研究,需要用到排列的某些事实. 作为预备知识,本小节介绍排列的概念及其基本性质.

把 n 个不同的元素按一定顺序排成一行,叫做这 n 个元素的一个**排列**. 为了方便起见,用 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 代表 n 个不同的元素来讨论有关排列的性质.

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 **n 阶排列**(permutation). 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

如 2341 是一个四阶排列,25134 是一个五阶排列. n 阶排列共有 $n!$ 个. $12\cdots n$ 是一个 n 阶排列,它具有自然顺序,称为**自然排列**,在这个排列中的任何两个数,小的数总排在大的数的前面.

定义 1.2 一个排列中,如果一个大的数排在小的数之前,就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 以后用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数,则称这个排列为**偶排列**,否则称为**奇排列**.

例 1.3 在四阶排列 2341 中,共有逆序 21,31,41,即 $\tau(2341)=3$,所以 2341 是奇排列.

在五阶排列 25134 中,共有逆序 21,51,53,54,即 $\tau(25134)=4$,所以 25134 是偶排列. ■

例 1.4 自然排列 $12\cdots n$ 的逆序数 $\tau(12\cdots n)=0$,所以 $12\cdots n$ 是偶排列,而 n 阶排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1),$$

所以当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时，$n(n-1)\cdots21$ 是偶排列，而当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时，$n(n-1)\cdots21$ 是奇排列．■

在一个排列中，对换其中某两个数，而保持其余的数不动，就得到另一个排列．这种操作称为一个**对换**．

例 1.5 五阶偶排列 25134 经过 2,5 对换变成排列 52134，容易计算 $\tau(52134)=5$，所以 52134 是奇排列．■

关于对换对排列奇偶性的影响，有下述一般性结论．

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

证 先考虑一种特殊情形，即对换的两个数在排列中是相邻的，设排列

$$\cdots jk\cdots \tag{1.8}$$

经对换 j,k 变成排列

$$\cdots kj\cdots, \tag{1.9}$$

这里"…"表示那些在对换下保持不动的数．显然，这些数之间以及这些数与 j,k 之间是否构成逆序的情况在排列(1.8)和排列(1.9)中是相同的．故只需考虑数对 j,k. 若 j,k 在排列(1.8)中构成逆序，则它们在排列(1.9)中不构成逆序；反之，若 j,k 在排列(1.8)中不构成逆序，则它们在排列(1.9)中构成逆序．由此可知，无论是哪种情形，排列(1.8)和排列(1.9)的逆序数总相差 1. 因而排列(1.8)和排列(1.9)有相反的奇偶性．

再考虑一般情形．设排列

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots \tag{1.10}$$

经对换 j,k 变成排列

$$\cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots, \tag{1.11}$$

不难看出，这样的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻两数的对换来实现．例如

$$\cdots ji_1i_2\cdots i_sk\cdots \xrightarrow{s+1\text{ 次相邻两数的对换}} \cdots kji_1i_2\cdots i_s\cdots$$
$$\xrightarrow{s\text{ 次相邻两数的对换}} \cdots ki_1i_2\cdots i_sj\cdots.$$

由于 $2s+1$ 是奇数，且相邻两数的对换改变排列的奇偶性，因此排列(1.10)和排列(1.11)也有相反的奇偶性．■

定理 1.2 在全部 n 阶排列中($n\geqslant2$)，奇偶排列各占一半．

证 设在全部 n 阶排列中有 s 个奇排列和 t 个偶排列，须证$s=t$.

将 s 个奇排列的前两个数对换，则这 s 个奇排列全变成偶排列，并且它们彼此不同，所以 $s\leqslant t$. 若将 t 个偶排列的前两个数对换，则这 t 个偶排列全变成奇排列，并且它们彼此不同，于是又有$t\leqslant s$. 故必有 $s=t$.■

定理 1.3 任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同．

证 对排列的阶数 n 作数学归纳法，当 $n=1$ 时，结论显然成立．设对 $n-1$ 阶排列结论成立，现在考虑 n 阶排列的情形．

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是任意一个 n 阶排列．分两种情形讨论．

(1) 若 $j_n=n$，则 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 是一个 $n-1$ 阶排列．根据归纳假设，排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可经过一系列对换变为自然排列．因而排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 可经过一系列对换变为自然排列．

(2) 若 $j_n\neq n$，则在排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中先对换 j_n 和 n，使排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成 $j_1'j_2'\cdots j_{n-1}'n$，这就归结为前面的情形．根据前面的结论可知排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 也可经过一系列对换变成自然排列．

根据归纳法原理，对任意自然数 n，结论成立．

由于 $12\cdots n$ 是偶排列，且对换改变排列的奇偶性，所以将一个偶(奇)排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变为自然排列需要作偶(奇)数次对换．即将排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成自然排列所作对换次数的奇偶性与排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的奇偶性相同． ■

1.1.3 n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式的定义之前，先考察一下二阶和三阶行列式的定义是有益处的．回顾(1.3)式和(1.6)式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

我们看到二阶和三阶行列式都是一些项的代数和．现在来看一下这些代数和中各项的构成以及各项前所带的正负号的确定有什么规律性．以三阶行列式为例，通过对展开式(1.6)的仔细观察，不难发现：

(1) 三阶行列式的展开式(1.6)中共有 $3!=6$ 项，其中的每一项都是行列式中位于不同行不同列的三个元素的乘积，并且每个这样的乘积都出现在展开式(1.6)中．

(2) 在展开式(1.6)中，前面带正号的项和带负号的项各占一半．不难直接验证，展开式(1.6)中各项前所带的符号是由下述方式确定的．将展开式(1.6)的一般项写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \tag{1.12}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个排列．于是，在行指标构成自然排列的情况下，当列指标所成的排列 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，项(1.12)的前面带正号；而当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，项(1.12)的前面

带负号.

根据这些观察,三阶行列式的展开式(1.6)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有三阶排列求和①.类似地观察可知,二阶行列式的展开式(1.3)可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对所有二阶排列求和.

以上对二阶和三阶行列式定义的分析,启发我们引入如下的 n 阶行列式(determinant)的定义.

---

① $\sum$ 是总和符号,$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 表示 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,其中 i 称为总和的指标,它是个虚拟变量,可由其他字母替代,因此 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. 例如,$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$,则 $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$. 又有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

容易证明,总和符号满足下列性质:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i;$$

$$\sum_{i=1}^{n} k(a_i x_i) = k\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right).$$

此外,还有双重总和的形式 $\sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$,表示先对 i 求和,再对 j 求总和,例如

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{3} (a_{1j} + a_{2j}) = (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}),$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{2} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}).$$

不难证明下列一般式子成立,

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

这个式子可以这样解释,先把 mn 个数 a_{ij} 排成 n 行 m 列的矩形表,$\sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$ 表示把表中的元素先按列相加,再把每列的和加起来得到表中所有元素的总和. $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$ 则表示先按行相加,再把行和加起来,得到的也是表中所有元素的总和,显然它们应该相等.