中学数学高效学习法

黄高才 黄沛钰 编著

西北农林科技大学出版社

责任编辑 崔 婷
封面设计 刘 玮

ISBN 978-7-81092-424-5

定价：20.00元

中学数学高效学习法

黄高才　黄沛钰　编著

西北农林科技大学出版社

写在前面的话

这部书稿完成于2006年的春天，那时我在自己办的学校里教初中毕业班的数学课。两年来，我主编的6部大学教材和独立完成的一部专著相继交付出版，唯有这一部书稿一直压在那里。当初，我和沛钰写这部书的初衷只是想为自己学校的学生提供一部浅显易懂的数学读物，帮助他们轻松、高效地学习数学。谁知，书稿完成后不久，我的学校因资金短缺而被迫停办，书稿也就被搁置起来。这期间，我不止一次地扪心自问：这部书果真能够帮助同学们走出数学学习的困境吗？尽管我们在写作此书时是十分用心的，但毕竟自己在数学这一门学问上的积累是浅薄的；沛钰虽聪颖、勤奋且博学，但毕竟太年轻，没有多少经验。直到今天，要将这部书稿交给出版社了，我的内心依然十分地不安——唯恐此书不能给同学们学习数学以大的助益。

数学是培养和发展思维能力的学科，说通俗一点就是“磨脑子”的学科，越学人越聪明。大凡数学学得好的同学，做事思维敏捷，思路开阔，富有灵感，具有较强的创造能力。那么，怎样才能学好数学呢？最根本的问题是首先要让脑子“转”起来。让脑子“转”起来的原动力又是什么呢？那就是语言。语言既是思维的外壳，也是思维的驱动力，没有语言所承载的信息对思维的“点燃”，脑子就很难“转”起来。从这个意义上讲，要想轻轻松松地学数学，学好数学，首先必须学好语文课。数学家陈景润说：“很难想象一个文理不通、错字连篇的人，能把逻辑严谨的数学内涵表达出来。”数学家苏步青也深有体会地说：“我从小打好了语文基础，这对我学习其他学科提供了很大的方便。我还觉得学好语文对训练一个人的思维很有帮助，可以使思想更有条理。这些对于我后来学好数学都有很大的好处。”事实上，因为语文没有学好而导致数学学习困惑的占数学学困生的绝大多数。

“转”起来是前提，轻松地转着是关键。很多同学在数学学习方面产生困惑不是因为智商问题，而是因为学习方向有偏差和学习方法不当造成的。就方向

上的偏差来讲，主要表现为热衷于攻“难题”和综合性强的所谓“大题”，其结果是花了大量的时间和精力，数学思维能力也没有提高。要知道，数学思维能力的形成是以知识的熟练运用为基础的，因此用于思维训练的题目不能难度过大，过大不仅不利于举一反三，甚至会阻塞思路，使大脑“停转”。因此，当数学学习已经感到吃力的时候，千万不要再去上那些所谓的“奥数班”、“强化班”，而是应当回过头来将前面已学过的东西认真地复习一下，这样会出现意想不到的“顿悟”，顺利地走出数学学习的困境。怎样复习呢？一是以近期内所学内容为参照，查漏补缺。如，要学分式了，复习一下前面所学的分数的有关知识。二是在进入一个新的学习阶段之前，先复习一下前一个阶段所学的内容。如，要上初二了，将初一所学内容认真地复习一下；要上高一了，先将初中所学内容再来一个总复习。因为数学知识是“一环套一环”的，一环“脱节”，就会环环接不上。

就学习方法来看，主要存在这样两个问题：一是过分地依赖老师的讲解，缺少独立钻研的过程。很多同学拿到题目后，不会就问，这是一种错误的做法。因为数学能力的核心是思维能力，只有依靠自己对数学问题的独立钻研才能形成。老师讲得好，也只能是对你有更多的启发而已，并不能使你直接形成思维能力。从这个意义上讲，数学学习过程中的“自习”是十分关键的，没有自习，或者自习不够，数学思维能力就不能得到很好地培养。这是很多同学数学学不好的一个主要原因。二是没有处理好“多”与“少”的关系，盲目地大量做题。要知道，题海茫茫，茫无际涯。不要说一个学生，就是一个数学家终其一生，也不可能将所有的数学题做完。何况，随着时间的推移，大量的数学问题还在不断地产生。真正有效的做法是精选题目，对同一个题目进行多角度地思考，力求一题多解，这样做一道题的收获比每题只用一种方法做，做一百道题的收获更大。如果有人告诉你“要想学好数学，必须大量做题”，这话你千万别听，因为这样的误导已经贻误了很多人。

还有的同学在数学学习方面进入了另一种误区——总希望能学到一些解题的绝招。对于数学来讲，只有科学的思想方法，没有什么所谓的“绝招”。因为数学问题千变万化，不同的问题解决思路不同，要用到的思想方法各异。学习数学，关键是掌握数学的思想方法，培养自己研究问题的能力。只有这样，才能轻松、高效地学习数学，学好数学。

在所有数学学困生当中,因心理错觉导致数学学不好的同学占相当大的比例。这里有三个问题值得同学们注意:一是数学问题有时候的确很“难”,即使世界顶级数学家也不可能拿到什么数学题都会做。何况现在教辅市场很乱,错题、偏题、怪题等俯拾即是。所以,有一些题目自己不会做很正常,千万不要因此而认为自己的脑子笨,也不要因此就认为数学很难学。二是从生理机制上讲,人的思维随时都有可能出现“阻塞”的情况,身体疲劳、情绪不好等各种原因都会导致一时半会儿思路无法打开。这也是拿到题目不会做的一个原因。三是有些题目不会做是暂时的。小学时曾经感到十分难的题目到中学后不是感到十分的简单吗?所以,在数学学习的过程中,遇到难题我们首先不要怕,不要慌,静下心来从不同的角度去思考,实在思考不出来也没关系,今天不会做的题目,放在明天做可能会有更大的收获。千万不要因为有一些题目不会做而对数学产生畏难情绪——数学不仅很有趣,而且很好学。只要学习方法正确,人人都能轻轻松松地学好数学。

本书以中学生为读者对象,特别适合初二、初三和高一年级学生使用。

在本书交付出版之际,我最想跟各位老师和同学们说的是:希望大家能够及时地把使用本书后的情况反馈给我们,以便我们在修订本书时参考。我的邮箱地址:gchuang1962@163.com.

愿本书对于同学们学好数学能有较大的帮助。

本书的出版得到了空军工程大学郭智勇先生和西安汽车科技学院李静老师的鼎力相助——本书的大部分文字由李静录入,书中所有的几何图形都是由郭智勇先生绘制的。陕西省泾阳县北赵中学邓新昌和张海军两位老师承担了本书的三校任务。在此,我和沛钰对他们表示衷心的感谢。

黄高才

2008 年夏记于咸阳

目录

第一讲

数学其实很好学

数学是一门十分有用、有趣，也很好学的学科。只要认识正确，方法得当，人人都能轻轻松松地学好数学。为什么现在越来越多的中小学生感到数学难学，甚至见了数学题目就头疼呢？首先是教师教学方向的偏差及学生学习方法不当所造成的，其次是学生自我学习的环节薄弱，导致独立思考的能力较差而影响了数学思维能力的形成，再次是由于对数学认识的偏差而造成的心理障碍，还有教辅书的错误选择与不正确使用等。那么，怎么才能轻轻松松学好数学呢？

一、正确认识数学和数学学习

数学是思维科学，数学教学的最终目的是培养和提升学生的思维能力，发展和提高学生的智力。解题是培养学生思维能力的一种手段，而不是目的。现在不仅有一大批的教师对数学教学的认识模糊，把学好数学的方法归结为"多做题"，而且图书市场随处可见《数学解题高手》之类的教辅书，这些对学生都是一种误导。如果把学习数学的最终目的归结为解题能力，企图单纯依靠大量解题来学数学，其结果必然是越学越累，越学越困难，最后导致怕数学、烦数学，学不好数学的结局。

(一)误导使学生产生了迷茫

中小学阶段数学的基础知识极其有限，并且不管是哪一个知识点，同学们都能一学就会。照这样看，中小学生应该人人都能轻轻松松地学好数学，可事实并不是这样。对于现在的中小学生来说，很少有人听不懂数学课，但大多数学生拿到数学题目都不知从何下手。导致这一状况的原因是什么呢？误导。请看下面几例：

例 1：在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 20°$，D 为 AB 边上一点，且 $BC = AD$，连接 DC，求 $\angle BDC$ 的度数。

解：如图1，以 AC 边为边长作等边 $\triangle ACE$，连接 DE，

易证：$\triangle ADE \cong \triangle BCA$.

则 $\angle ADE = 80°$，$AE = ED = EC$，

$\therefore$ $\triangle EDC$ 是等腰三角形，且 $\angle DEC = 40°$，

$\therefore$ $\angle EDC = 70°$，

$\therefore$ $\angle BDC = 30°$.

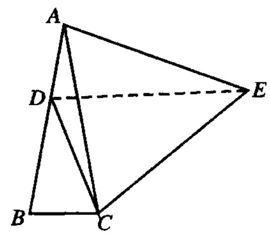

图1

注：此题见华南师大出版社出版：《解题高手——初中数学》第51页。

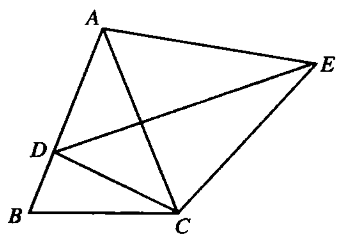

图2

在例1中，采用的解题方法是以等腰△的一腰为边长作等边△的方法，这个方法是不是在一类问题中都能用呢？如图2，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 30°$，$AB = AC$，$AD = BC$，如果用例1的方法，以 AC 边为边长作等边 $\triangle AEC$，则 $\angle DAE = 90°$，$\angle ADE < 90°$. 也就是说，此题中，$\triangle ADE$ 不可能与 $\triangle ABC$ 全等，由此看来，例1所教给学生的方法是"无用"的。而问题的严重性并不在于例1所教给的方法是有用的还是无用的，而是当老师这样讲给学生的时候，大部分学生觉得老师太厉害了，自己太笨了，从而导致对数学的畏惧心理。而究其实，例1的解法只是"碰巧"而已，充其量也不过是数学游戏。所以同学们没必要拿这样的问题问自己"我怎么就想不出来呢"。其实，给你讲例1做法的老师也可能是蒙了几天才"碰对"了，因而这样做本身就不是科学的数学思维方法。

例2：将 1^2、2^2、$3^2 \cdots 10000^2$ 分成两组，每组5000个数，使得每组内5000个数的和恰好相等。

解：由恒等式 $(n+1)^2+(n+4)^2+(n+6)^2+(n+7)^2=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+8)^2$ 可知：

当一个数用8除余数为1、4、6、7时，将这个数的平方分到第一组，而当一个数用8除余数为0、2、3、5时，将这个数的平方分到第二组，这样以来所得的两组数的和恰好相等。因为任何一个自然数（不等于0）用8除其余数共有8种情况。

例2的解法乍一看让人叫绝，但仔细一想，实在让人疑惑，一是解题过程中所用的恒等式是怎么来的？学生学过吗？二是这样给学生教数学，很容易给学生造成一种错觉，学习数学要有绝招，要学绝招，将学生误导入歧途。三是这样的题目对培养学生的数学思维能力根本没有多少帮助，反而使学生形成了数学十分深奥的错觉。

例3：一只船上有18只鸡，5只兔子和6只羊，请问船夫的年龄有多大？

解:$18+5+6=29$

答:船夫的年龄有29岁。

例3看似一个十分简单的错解,但给学生留下的困惑可能是终生的,因为接受这一错解的学生都是小学生,初学数学,在遇到老师这样讲的时候,绝大多数同学会产生迷惑:船夫的年龄为什么等于鸡、兔和羊的只数呢?进而产生数学十分深奥的错觉,对数学产生畏难心理。

综上,例1的做法只有在等腰三角形的顶角为20°时才能用,例2中的恒等式不是中学生所能推导出来的,这两道例题只不过是数学游戏而已,对学生数学思维能力的发展不但无益,反而有害。例3本身就是一个无解的错题,像这些题目不但在教辅书中大量存在,而且还经常出现在教师讲授的例题中,致使本来十分简单、好学,而且引人入胜的数学课变得迷雾重重,造成了学生对数学的畏难心理。这是目前中小学生学不好数学的主要原因。

(二)简单的是最好的

绝大多数同学在数学学习过程中都走了弯路——下功夫攻难题。很多老师也热衷于给学生布置难题,认为难题做多了学生的解题能力就强了。这样做的结果是耗费了大量的精力却收效甚微。什么原因呢?解题能力的核心是思维能力,而思维能力的形成需要的条件是:首先大脑是清晰地、轻松的,思维过程是顺畅的,其次是思维活动是敏捷的、灵活的,再次是大脑思维强度的加大是渐进式的,或者说是潜移默化的。对于绝大部分同学来讲(思维能力已经形成并且比较强的同学除外)难度过大的题目常常会使其思维过程中断,思路阻塞,搞得学生大脑酸胀,这样不仅对思维能力的形成无益,反而会增加学生的疲惫感,导致学生对学习的厌倦感。熟悉的、简单的,却设计十分巧妙的题目,同学们做起来不仅轻松、愉快,能够时时感受到强烈的学习乐趣,而且可以随心所欲的变换思维角度,加上题目本身巧妙的设计对同学们思维方向的牵引,使同学们的解题思维丰富而活跃,有利于同学们思维能力的迅速提升。从这个意义上讲,熟悉的、简单的题目是最好的。

到了中学阶段,时时地去翻阅一下小学的奥数教材,经常用中学所学的知识去求证小学数学中的定理,可以温故而知新,不仅能够使中学阶段的数学学习变得轻松、有趣,而且能学得比较扎实、牢固,形成极强的数学思维能力。为什么呢?因为中小学数学知识之间的相互联系与渗透十分紧密。如初中学的"提取公因式"这一因式分解方法就是小学"乘法分配律"的逆用,中学分式运算的一切法则均与小学的分数相同;运用小学所学的求圆面积的公式可以很方便的推导出初中所学的扇形面积公式,运用小学所学的等比定理可以去印证初中所学的平行线等分线段定理,等等。不仅如此,中学数学学习过程中随时都要用到大量的小学数学知识。

从另外一个角度讲,到中学阶段再去看小学的奥数题目,相对地讲比较浅显。因为浅

显，所以可以获得更多的感悟，甚至是一种深悟，大脑中时时有一种豁然开朗的感觉。这样以来，思维就变得活跃起来，数学思维能力提高的速度加快，学习能力自然就提高了，学起来就轻松了。尤其是到中学阶段多玩一些与几何图形面积有关的题目，不仅可以提高知识的综合运用能力，熟练掌握各种数学思维方法，而且有利于对初中所学几何知识的透彻理解和牢固掌握。

例4. 如图3，$ABCD$ 是 4×7 的长方形，$DEFG$ 是 2×10 的长方形，那么 $\triangle BCH$ 的面积与 $\triangle FGH$ 的面积之差是多少？

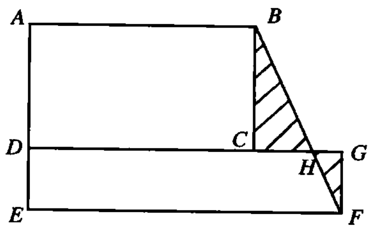

图3

解法一：如图3，$\because \triangle FGH \backsim \triangle BCH$

$\frac{GH}{CH}=\frac{FG}{BC}=\frac{1}{2}$

令 $GH=k$，则 $CH=2k$，$GC=3k$，

而 $GC=3$，

$\therefore k=1$.

即 $GH=1$，$CH=2$，

$\therefore S_{\triangle BCH}-S_{\triangle FGH}$

$=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times2\times1=3$.

解法二：如图3－1，延长 BC 交 EF 于点 I，

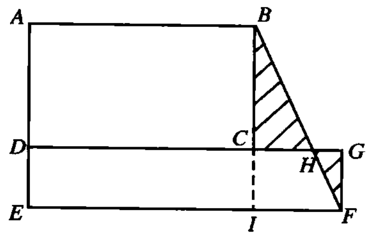

图3－1

则 $S_{\triangle BIF}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$.

又 $S_{长方形IFGC}=2\times3=6$.

$S_{\triangle BCH}=S_{\triangle BIF}-S_{四边形CHFI}$，

$S_{\triangle FGH}=S_{长方形IFGC}-S_{四边形CHFI}$，

$\therefore S_{\triangle BCH}-S_{\triangle FGH}$

$=S_{\triangle BIF}-S_{长方形IFGC}=3$.

解法三：如图3－2，分别延长 AB、FG 交于点 I，

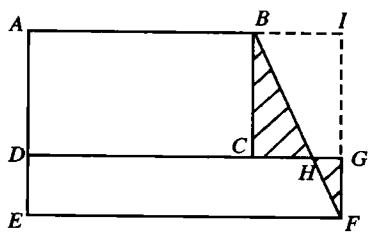

图3－2

则 $S_{\triangle FIB}=\frac{1}{2}\times6\times3=9$，

$S_{长方形BIGC}=3\times4=12$.

$\because S_{\triangle BCH}=S_{长方形BIGC}-S_{四边形BIGH}$，

$S_{\triangle FGH}=S_{\triangle FIB}-S_{四边形BIGH}$，

$\therefore S_{\triangle BCH}-S_{\triangle FGH}=S_{长方形BIGC}-S_{\triangle FIB}=3$.

解法四：如图3－3，连接 CF，

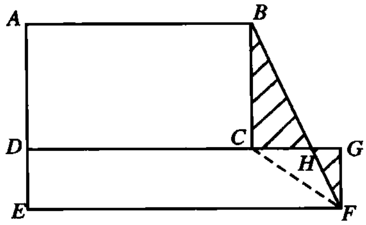

图3－3

则 $S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$，

$S_{\triangle CFG}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$，

$\because S_{\triangle BCH}=S_{\triangle BCF}-S_{\triangle CFH}$，

$S_{\triangle FGH}=S_{\triangle CFG}-S_{\triangle CFH}$，

$\therefore S_{\triangle BCH}-S_{\triangle FGH}=3.$

解法五：如图3－4，连接 BG，

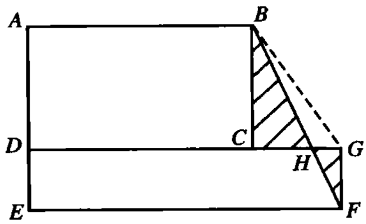

图3－4

则 $S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}\times3\times4=6$，

$S_{\triangle BFG}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$，

$\because S_{\triangle BCH}=S_{\triangle BCG}-S_{\triangle BHG}$，

$S_{\triangle FGH}=S_{\triangle BFG}-S_{\triangle BHG}$，

$\therefore S_{\triangle BCH}-S_{\triangle FGH}=S_{\triangle BCG}-S_{\triangle BFG}=3.$

解法六：如图3－5，延长 FG 至 M，使 $GM=GF=2$，过 M 作 $MN\perp BC$ 交 BH 于点 I，

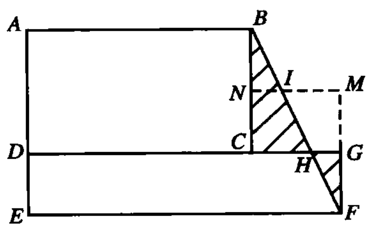

图3－5

则 $\triangle BNI\cong\triangle FGH$，

四边形 $NIHC\cong$ 四边形 $GHIM$.

$\because$ 四边形 $NIHC$ 的面积等于长方形 $NMGC$ 面积的一半，

$\therefore S_{\triangle BCH}-S_{\triangle FGH}=S_{四边形NIHC}=3.$

同学们已经看到，这一个十分熟悉、浅显的题目我们已经用了六种方法来求解，只要再深入地思考一下，还会有其他的解法出现。在解决这一题目过程中我们用了相似形的知识，用了全等形的知识，从不同的角度添加了辅助线，运用了“转化”、“参数法”、“整体思想”等多种数学思想方法……收获大不大？像这样学数学，我们的脑子是不是就越来越灵活了？

例5. 一个农夫有2公顷、4公顷和6公顷三块牧场。三块牧场上的草长得一样密，而且长得一样快。农夫将8头牛赶到2公顷的牧场上，5天吃完；农夫又把这8头牛赶到了4公顷的牧场上，15天吃完；最后，这8头牛又被赶到6公顷的牧场，这块牧场够吃几天？

解法一：设每头牛每天吃的草量为1份，每公顷牧场原有的草量为 x 份，每公顷牧场每天新长出的草量为 y 份，则：

$$2x+2\times5y=5\times8 \quad ①$$

$$4x+4\ (5+15)y=15\times8 \qquad ②$$

②－①×2 得：

$$60y=40$$

$$y=\frac{2}{3}$$

将 $y=\frac{2}{3}$ 带入①式得：

$$x=\frac{50}{3}$$

即每公顷原有草量为$\frac{50}{3}$份，每公顷每天新长草$\frac{2}{3}$份。

设 6 公顷牧草够 8 头牛吃 z 天，则：

$$6\times\frac{50}{3}+\frac{2}{3}\times6\times20+\frac{2}{3}\times6\times z=8z$$

解之　　$z=45$（天）

即 6 公顷牧草够 8 头牛吃 45 天。

解法二：设每头牛每天吃草 1 份。由题目知，8 头牛 5 天时间共从 2 公顷牧场中吃得草 $8\times5=40$ 份，而 15 天时间共从 4 公顷牧场中吃得草 $8\times15=120$ 份，由此我们可以得到以下数量关系：

∵ 2 公顷牧场原有草量 +5 天新长出的草量 =40（份），

∴ 4 公顷牧场原有草量 +5 天新长出的草量 =80（份），

∴ 4 公顷牧场上 15 天共长出新草 $120-80=40$（份），

即每天每公顷牧场新长草 $40\div(15\times4)=\frac{2}{3}$（份）. 那么每公顷牧场原有草量为$(40-\frac{2}{3}\times2\times5)\div2=\frac{50}{3}$（份）。6 公顷牧场上每天新长草$\frac{2}{3}\times6=4$ 份，就是说 6 公顷牧场每天新长出的草就够 4 头牛吃，另外 4 头牛吃原来的草和前 20 天新长出的草。所以 6 公顷牧草够 8 头牛吃的天数为：$(6\times\frac{50}{3}+\frac{2}{3}\times6\times20)\div4=45$ 天。

像例 5 这样的问题是小学数学中难度最大的题目，在小学时同学们见到这样的题目就犯难，可到中学再回头看这样的题目时，不仅觉得简单，而且倍感有趣。由此可见，数学学习最好的方法是温故而知新。每当学习新的知识时，先回过头来复习一下前面已经学过的与新学内容相关的知识，这样学起来就十分地轻松了。现在同学们在数学学习过程经常遇到障碍的原因是前面的相关知识没有学懂或者遗忘了，知识链“断裂”。

由这一例我们还以感悟到，学习数学时不要一味地去攻难题，既费时间，伤脑子，还不利

于数学思维能力的迅速提升。那些难题对我们同学来说之所以难，是因为我们掌握的相关数学知识还不够或数学思维能力还比较弱，等知识面宽了，数学思维能力强了，再回头看原来十分难的题目就觉得很简单了。像例5这样的题目，小学解的时候很难，现在用初一学的一元一次方程组去解，不就变得十分简单了吗？牛肉是好东西，但不能拿去给刚出生的婴儿吃，因为他们还不具备消化牛肉这一食物的能力。数学学习的道理与此相同。

我们这里说“简单的是最好的”还有一个原因：对一些熟悉的、简单的数学定理从不同角度进行再推论有利于熟练掌握各种数学思想方法，大大提升数学思维能力。请看下面这个例子——关于合比定理、分比定理和等比定理的推导：

方法一：代数方法。

1. 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

则$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$，$\rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.（合比定理）

$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$，$\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.（分比定理）

2. 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{j}=\frac{h}{i}$条件$(b+d+f+j+i\neq 0)$令$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{j}=\frac{h}{i}=k$，

则$a=bk, c=dk, e=fk, g=jk, h=ik$，

$\therefore a+c+e+g+h=k(b+d+f+j+i)$，

$\rightarrow \frac{a+c+e+g+h}{b+d+f+j+i}=k$，

$\rightarrow \frac{a+c+e+g+h}{b+d+f+j+i}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{j}=\frac{h}{i}$.（合比定理）

方法二：几何方法。

1. 如图4，$\triangle ABC$中，$EF /\!/ BC$，过点A作$MN /\!/ BC /\!/ EF$.

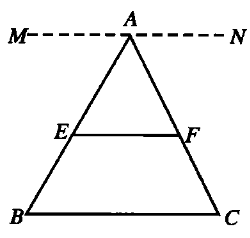

图4

(1) $\because \triangle AEF \backsim \triangle ABC$，

$\therefore \frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}$，

又$\because MN /\!/ BC /\!/ EF$

$\therefore \frac{EB}{AE}=\frac{FC}{AF}$.（平行线分线段成比例定理）

$\because EB=AB-AE, FC=AC-AF$，

$\therefore \frac{AB-AE}{AE}=\frac{AC-AF}{AF}$.（分比定理）

(2) $\because MN /\!/ BC /\!/ EF$，

$\therefore \dfrac{EB}{AE}=\dfrac{FC}{AF}$,(平行线等分线段成比例定理)

又$\because \triangle AEF \backsim \triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AC}{AF}$.

$\because AB=EB+AE, AC=FC+AF$,

$\therefore \dfrac{EB+AE}{AE}=\dfrac{FC+AF}{AF}$.(合比定理)

2. 如图5,$\triangle ABC$ 中,$GH /\!/ MN /\!/ EF /\!/ BC$,过点 A 作 $JK /\!/ BC /\!/ EF /\!/ MN /\!/ GH$,

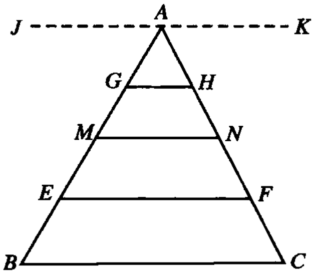

图5

则$\dfrac{AH}{AG}=\dfrac{HN}{GM}=\dfrac{NF}{ME}=\dfrac{FC}{EB}$.

$\because \triangle AGH \backsim \triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AH}{AG}$.

$\because AC=AH+HN+NF+FC$,

$AB=AG+GM+ME+EB$,

$\therefore \dfrac{AH+HN+NF+FC}{AG+GM+ME+EB}=\dfrac{AH}{AG}=\dfrac{HN}{GM}=\dfrac{NF}{ME}=\dfrac{FC}{EB}$.(等比定理)

为什么说对熟悉的、简单的数学定理从不同的角度进行再推导是最好的数学思维训练方法呢?因为只有熟悉的、简单的东西才能使大脑始终处于轻松的状态,保证思路清晰,思维活跃,这样易于变换思维角度,易于弄清知识间的相互联系,有利于提高知识的综合应用能力,从而迅速提升数学思维能力。

(三)人人都有不会做的数学题

再宽的马路也有堵车的时候。与此相似,思维能力再强的人也有思路阻塞的时候,因此,人人都有不会做的数学题。尤其近几年来,一些出版商和编著者受利益驱动,标新立异,将大量的偏题、怪题、无解题和超出同学们知识范围的题目“塞”进教辅书中,这样以来,同学们可能经常会遇到一些不会做的题目。不会做很正常,也不要紧,千万不要因此而产生心理错觉——认为数学很难,认为自己脑子笨,不是学数学的料。数学其实不但很好学,而且学起来有意思,学好了也很有用。

数学学习的过程是一个反复感知的过程,第一次接触时感觉难的东西,第二次再接触的时候可能就变得简单了。还有一个原因是,最初感觉到难是因为掌握相关知识还不够或数学思维能力弱,等知识面宽了,数学思维能力强了,再回头看原来十分难的题目就觉得很简

单了。因此，难是相对的，不会做是暂时的。小学时同学们感到十分难的问题到中学后不是感到十分简单吗？所以，在数学学习过程中，遇到难题我们首先不要怕，静下心来从不同的角度去思考，实在思考不出来也没有关系，有几个题目甚或是几十个题目做不出来，并不影响数学思维能力的形成。况且，数学研究史上还有这样的事实——有时候一个数学命题的证明，耗费了一个甚至几个数学家几年、几十年，甚至是毕生的精力。这也就是说，数学命题真正深起来了，连一些大数学家也做不出来，这能说明数学家脑子笨吗？讲了这么多，目的只有一个：希望同学们正确认识一些数学题目不会做的问题，不要因为有的题目不会做就认为数学难学，认为自己脑子笨，继而对数学产生畏难情绪。现在绝大多数同学数学学不好的主要原因是心理障碍造成的，说具体一些就是对数学的畏难心理造成的。

数学知识一学就会，拿到题目却不会做的一个重要原因是没有掌握应该具备的数学思想方法。如下这个例子 ——

例 6. 已知 $a+b=1$，且 a,b 为正整数，求证：$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$.

分析提示：像这样一个题目，如果从代数的角度去思考求解的方法，确实十分困难。即使思考几天可能也打不开思路，但是如果掌握了各种数学思想方法，有了运用数学思想方法的意识，解决问题的思路就会很快打开。我们现在运用构造法这一数学思想方法来解此题。

解：如图 6，构造 Rt$\triangle ABC$，使其两直角边 $AC=\sqrt{2a+1}$，$BC=\sqrt{2b+1}$.

则 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2(a+b)+2}=2$.

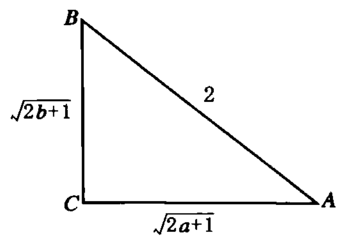

图 6

$\because \sin A=\dfrac{\sqrt{2b+1}}{2}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{2a+1}}{2}$，

$\therefore \sqrt{2b+1}=2\sin A$，$\sqrt{2a+1}=2\cos A$，

$\therefore \sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}=2(\sin A+\cos A)$，

$\because \sin A+\cos A=\sqrt{(\sin A+\cos A)^2}=\sqrt{1+2\sin A\cos A}$，

又 $(\sin A+\cos A)^2\geqslant 0$，

$\rightarrow \sin^2 A+\cos^2 A\geqslant 2\sin A\cos A$，

$\rightarrow 2\sin A\cos A\leqslant 1$，

即 $\sqrt{1+2\sin A\cos A}\leqslant\sqrt{2}$.

$\therefore \sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}=2(\sin A+\cos A)\leqslant 2\sqrt{2}$.

思维延伸：若 $(\sin A-\cos A)^2=0$

则 $\sin A=\cos A$

$\angle A=45°$