绝对邻域收缩核理论

●郭宝霖　著

科学出版社
www.sciencep.com

绝对邻域收缩核理论

郭宝霖 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地讲述了一般拓扑学中的收缩核理论，同时介绍了作者本人与合作者以及同行近年来的一些研究成果．主要内容包括了收缩核、绝对(邻域)扩张子与绝对(邻域)收缩核，以及某些特殊空间族上的绝对(邻域)收缩核理论等．本书内容全面，叙述简洁，逻辑推理严密．

本书适合高等院校数学系高年级本科生、研究生阅读，也可供相关领域的教师与科技工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

绝对邻域收缩核理论/郭宝霖著．—北京：科学出版社，2009
ISBN 978-7-03-023402-5

Ⅰ. 绝… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 收缩核-理论 Ⅳ. O189.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009) 第 177872 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：郑金红
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 2 月第一次印刷 印张：16
印数：1—2 000 字数：310 000

定价：52.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉)

符 号 表

$\in$ ($\notin$), 1

$\subset$ ($\supset$), 1

$\wedge$, 1

$\vee$, 1

$\forall$, 1

$\exists$, 1

$\Rightarrow$, 1

$\Leftarrow$, 1

$\Leftrightarrow$, 1

$\prec$, 5, 70

$\precneqq$, 73

$\cong$, 24

$\{\cdots\}^\sharp$, $\mathcal{U}^\sharp$, 2

$\mathcal{U}|_E$, 2

$\mathcal{U}(E)$, 33

$\mathcal{U}^\triangle$, 33

A', 18

Int, 17

∂A, 18

cl$F$, 18

B^{C}, B^{C}_A, 1

$[x]$, $[x]_S$, 5

$|\cdot|$, 5

$||\cdot||$, 61

$\rho(\cdot,\cdot)$, 6

$X\times Y$, 4

ΔX, 4

Card$A$, 5

diam$A$, 6

dist(A,B), 6

$H_d(A,B)$, 13

$C(I,X)$, 32

$C(X,\mathbf{R})$ $(C(X))$, 25

$C^*(X,\mathbf{R})$ $(C^*(X))$, 25

$f_n\to f$, 185

$f_n \rightrightarrows f$, 185

$A_n\to A$, 209

F_σ, 41

G_δ, 41

$\liminf A_n$, 209

$\limsup A_n$, 209

$\max A$, 5

$\min A$, 5

$m(x)$, 28

$M(x)$, 28

St$(*)$, 73, 76

$\langle U_1,\cdots,U_n\rangle$, 212

$B(A,\varepsilon)$, 6

$M(A,\varepsilon)$, 154

$M(A,B)$, 177

$\mathfrak{C}(X)$, 7, 16

$\mathfrak{D}(X)$, 7, 16

$\mathcal{C}(X)$, 208

$\mathcal{F}(X)$, 208

$\mathcal{K}(X)$, 177

I, I_n, $\hat{I}_n$, 2

I^n,I^ω, 10, 11

$\mathbf{N}$, $\widehat{\mathbf{N}}$, 2

$\mathbf{Q}$, 2

$\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+$, $\widehat{\mathbf{R}}_+$, 2

$\mathbf{R}^n$, 10

$\mathbf{R}^\omega$, 11

$\mathcal{U}_x$, 16

$\mathcal{U}_A$, 18

前言

拓扑学理论作为近代纯粹数学的重要支柱, 已经受到广泛的关注. 它的思维方法与重要结果已经渗透到分析学、代数学、几何学、计算数学、物理学以及计算机理论等领域. 追溯拓扑学的发展史, 它最早在 19 世纪末 20 世纪初, 由 H. Poincaré 等在研究代数簇的基础上, 通过将空间分成若干个单形的组合来研究空间的一些性质, 从而创立了组合拓扑学. 而后在 20 世纪初期, 又产生了拓扑学的另一分支 —— 点集拓扑学.

1931 年, 波兰著名拓扑学者 K.Borsuk 在他的博士论文中提出了收缩核的概念, 并且讨论了它的一些基本性质. 翌年他又导入了绝对邻域收缩核的概念, 从此拉开了研究收缩核理论的序幕. 到了 20 世纪 50 年代, 收缩核理论在度量空间族上被确立, 它作为连接组合拓扑学与点集拓扑学的重要纽带, 成为一般拓扑学理论中最具有活力的研究方向之一. 它在维数理论、函数空间论、型论、无限维拓扑学、CW 复形理论、代数拓扑学, 以及广义度量空间理论等方向的研究中都起到了举足轻重的作用.

然而这个理论能否在更广泛的一类空间族 (如层空间族) 上协调发展的问题, 成为在该研究领域中较长一段时间未能解决的重要课题, 因而也影响了这个理论的深入发展. 本书的作者及合作者在 20 世纪 90 年代对收缩核理论的研究过程中, 对上述课题从不同角度得到了较好的成果. 例如, 建立了对于层空间族的绝对邻域收缩核的判定条件, 证明了粘贴算子保持层空间的绝对邻域收缩核性质等, 从而对多年来未能解决的重要问题给出了较好的回答.

关于收缩核理论方面的书籍, 在 20 世纪 60 年代, 国外曾有英文版著作, 在国内至今尚属空白. 本书从叙述收缩核与绝对邻域收缩核理论的基本内容入手, 结合作者及其他数学工作者近年来所做的工作, 致力于向读者介绍该理论所研究的主要内容, 并且展示当前国际上关于收缩核理论研究的新动态和新成果.

为了方便读者, 本书第 1 章作为预备知识介绍了有关拓扑空间的一些基本概念. 第 2 章叙述了关于收缩核的概念及其相关的一些基本性质. 第 3 章介绍了绝对扩张子与绝对邻域扩张子的概念及其一些性质. 第 4 章叙述了绝对收缩核与绝对邻域收缩核的概念及其基本性质. 第 5~7 章阐述了作者与合作者在层空间, 函数空间以及超空间的绝对邻域收缩核问题研究方面所取得的一些新的结果, 以及其他学者近年来关于收缩核理论所做的一些工作.

本书力求结构严谨, 语言通畅, 对定义、概念叙述简洁明了, 以及对定理的叙述

与推证简明扼要.

作者衷心地感谢日本岛根大学三轮拓夫教授、日本筑波大学儿玉之宏教授和酒井克郎教授对本人的指导和关切. 非常感谢对于本书出版给予热忱推荐的陕西师范大学数学研究所所长王国俊教授、首都师范大学数学系王尚志教授以及常德师范专科学校林寿教授. 同时特别感谢辽宁省教育厅科研基金、大连市政府以及大连大学的学术专著出版基金的资助.

汕头大学理学院杨忠强教授和辽宁师范大学数学学院谢琳教授细心地审阅了本书的初稿, 并且提出了许多宝贵的建议. 此外科学出版社鄢德平先生以及陈玉琢编辑对本书的出版给予了热情的帮助, 谨此向他们表示诚挚的谢意!

由于作者水平所限, 本书不当之处在所难免, 衷心希望各位专家、读者批评指正.

作　者

2008 年 3 月于大连

目　录

符号表
前言
第 1 章　拓扑空间 ········ 1
1.1　集合与映射 ········ 1
1.2　度量空间 ········ 6
1.3　拓扑空间与拓扑基 ········ 15
1.4　连续映射与同胚 ········ 24
1.5　分离公理 ········ 28
1.6　紧空间与仿紧空间 ········ 33
1.7　粘合拓扑与弱拓扑 ········ 45
1.8　线性拓扑空间与线性赋范空间 ········ 55
第 2 章　收缩核 ········ 65
2.1　收缩核的概念 ········ 65
2.2　r 映射 ········ 67
2.3　单纯复形与 CW 复形 ········ 70
2.4　收缩核与映射的可扩张性 ········ 83
2.5　收缩核的某些继承性质 ········ 85
2.6　形变收缩核与邻域收缩核 ········ 89
第 3 章　绝对扩张子与绝对邻域扩张子 ········ 94
3.1　空间族的 AE 与 ANE ········ 94
3.2　Tietze 扩张定理 ········ 96
3.3　绝对扩张子的某些性质 ········ 100
3.4　绝对邻域扩张子的并 ········ 104
3.5　Dugundji 扩张定理 ········ 108
3.6　度量空间族的 AE 与 LANE ········ 113
第 4 章　绝对收缩核与绝对邻域收缩核 ········ 116
4.1　空间族的 ANR 与 ANE 之间的关系 ········ 116
4.2　空间族的 AR 与 ANR ········ 118
4.3　AR($\mathcal{M}$) 空间的某些性质 ········ 120

4.4 ANR($\mathcal{M}$) 空间的某些特殊性质 …… 122
第 5 章 层空间族的 ANR …… 132
5.1 M_i 空间与 σ 空间 …… 132
5.2 层空间的某些性质 …… 143
5.3 Dugundji 定理在层空间族上的推广 …… 149
5.4 层空间族的 ANR …… 153
5.5 σ 度量层空间族的 ANR …… 162
5.6 ANR($\mathcal{S}$) 的连接空间 …… 167
第 6 章 映射空间族的 ANR …… 177
6.1 具有 c 拓扑的映射空间 …… 177
6.2 具有 d^* 拓扑的映射空间 …… 184
6.3 AR 与 ANR 映射空间 …… 190
6.4 $C_c(X,Y)$ 可层化的条件 …… 193
6.5 一个反例 …… 199
6.6 注解与待解决的问题 …… 204
第 7 章 超空间族的 ANR …… 208
7.1 超空间的概念与基本性质 …… 208
7.2 超空间 $\mathcal{K}(X)$ 可层化的条件 …… 213
7.3 超空间 $\mathcal{K}(K)$ 与 $\mathcal{C}(K)$ 的 ANR($\mathcal{S}$) 特征 …… 222
7.4 超空间 $\mathcal{F}(X)$ 的 ANR($\mathcal{S}$) 特征 …… 230
7.5 注解与待解决的问题 …… 237
参考文献 …… 239
名词索引 …… 242

第1章 拓扑空间

1.1 集合与映射

集合论作为现代数学的基础, 已在数学的各个分支中展现了它的重要性. 本节将简要地叙述本书所涉及的集合论方面的基本概念和主要结论.

集合作为不能精确定义的数学概念, 通常被叙述为: 具有某种特定性质或被指定的一些事物的全体. 构成集合的每个事物称为该集合的元素, 集合的元素也称为集合的元或点. 例如, 自然数的全体构成一个集合, 每个自然数是这个集合的元素. 注意到集合的元素不限于数字或字母, 也不限于是否具有相同属性的事物.

通常采取如下两种方法来表示集合: 其一, 将一个集合中所有的元素逐个地排列在大括号中. 例如, $\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$, $\{1,2,3,4,5,\cdots\}$ 等, 可称为列举法.

其二, 记作 $\{x \mid P(x)\}$, 其中 $P(x)$ 是以 x 为自由变量的命题函项. 例如, $\{x \mid x$ 为自然数 $\}$ 等, 可称为描述法.

为叙述简便, 习惯上用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 或 $X,Y,Z,\cdots$ 等来表示集合. 用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 或 $x,y,z,\cdots$ 等来表示集合的元素. 对于一个事物 x, 如果它是某个集合 A 的元素时, 则记作 $x\in A$, 如果它不是 A 中的元素时, 则记作 $x\notin A$.

对于两个集合 A 和 B, 如果 A 中所有元素都是 B 中的元素时, 称 A 被 B 包含 (或 B 包含 A), 记作 $A\subset B$ (或 $B\supset A$), 并且称 A 是 B 的子集. 如果 A 是 B 的子集, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A 时, 称 A 为 B 的真子集. 显然如果 $A\subset B$, 并且 $B\subset A$, 则 A 与 B 中具有完全相同的元素, 即 A 与 B 为同一集合, 这时称 A 与 B 相等, 并且记作 $A=B$.

如果将 A 与 B 中元素合并在一起, 其中相同的元素只取一个, 则构成一个新的集合, 称作 A 与 B 的并集或简称为并, 并且记作 $A\bigcup B$. 如果将即属于 A 又属于 B 的元素单独放在一起, 也构成一个新的集合, 称作 A 与 B 的交集或简称为交, 并且记作 $A\bigcap B$. 将属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称作 A 关于 B 的差集, 并且记作 $A\backslash B$ 或者 $A-B$. 特别地, 若 $B\subset A$ 时, 称 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的补集, 并且记作 B_A^{C} 或简记作 B^{C}.

为了今后叙述上的方便引入如下的"逻辑符号": 用"$\vee$"与"$\wedge$"分别表示"或者"与"并且"的意思. 用"$\Rightarrow$"表示"左蕴涵右 (或必要条件)", 用"$\Leftarrow$"表示"右蕴涵左 (或充分条件)", 用"$\Leftrightarrow$"表示"左与右等价 (或充分必要条件)". 引入如下的"量词符号": 用"$\forall$"与"$\exists$"分别表示"对任意的"与"存在"的意思. 此外用缩

写记号“s.t.”表示“使得”的意思. 如果使用“逻辑符号”, 则关于集合的并、交以及差, 可采用如下的记法:

$$A\bigcup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\},$$

$$A\bigcap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\},$$

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}.$$

显然 $A\backslash A$ 是不具有任何元素的集合, 称之为空集, 并且记作 $\varnothing$. 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集. 只有一个元素的集合称作单点集, 由有限个元素所构成的集合称作有限集, 由无穷多个元素所构成的集合称作无限集. 例如, 由所有实数、所有有理数、所有正整数所组成的集合, 以及介于 0 与 1 之间的所有实数所构成的集合 (即闭区间 $[0,1]$) 都是无限集. 以下分别用符号 $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N}$ 与 I 来表示这几个集合. 并且记 $\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$, $\widehat{\mathbf{R}}_+=\mathbf{R}_+\bigcup\{0\}$ 和 $\widehat{\mathbf{N}}=\mathbf{N}\bigcup\{0\}$. $\forall n\in\mathbf{N}$, 记 $I_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 和 $\widehat{I}_n=\{0,1,\cdots,n\}$.

每个元素都是由集合所构成的集合通常称为集族或集系. 集族一般表示为 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ 或者 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 其中 Λ 称为指标集, $A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 表示集族中的元素. 如果 $\forall\alpha,\beta\in\Lambda,\alpha\neq\beta$ 时, 有 $A_\alpha\bigcap A_\beta=\varnothing$, 称集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为不交的. 当 $\Lambda=\mathbf{N}$ 时, 称集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{N}}$ 为可数的. 前面关于两个集合的并与交的运算可以推广到任意多个集合上去. 例如, 对于集族 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$, 记

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x\mid\exists\alpha'\in\Lambda,\text{s.t. }x\in A_{\alpha'}\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x\mid\forall\alpha\in\Lambda,\text{s.t. }x\in A_\alpha\}.$$

将 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 与 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 分别称作这些集合 $A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 的并集与交集.

对于给定的非空集合 X, 通常称由 X 的所有子集所构成的集族为集合 X 的幂集, 并且记作 2^X. 设 $E\subset X$, $\mathcal{U}$ 是 2^X 的一个子集合, 即 $\mathcal{U}\subset 2^X$, 则下述记号在本书中经常使用:

$$\mathcal{U}|_E=\{U\bigcap E\mid U\in\mathcal{U}\},\quad \mathcal{U}^\sharp=\bigcup\{U\mid U\in\mathcal{U}\},$$

称 $\mathcal{U}|_E$ 为集族 $\mathcal{U}$ 在集合 E 上的限制. 显然 $\mathcal{U}|_E\subset 2^E$, $\mathcal{U}^\sharp\subset X$. 对 2^X 的子集族, 有下述两个命题.

命题 1.1.1 设 $\{\mathcal{A}_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$, 其中每个 $\mathcal{A}_\alpha\subset 2^X$, 则

$$\forall\Lambda'\subset\Lambda,\ \left(\bigcup\{\mathcal{A}_\alpha\mid\alpha\in\Lambda'\}\right)^\sharp=\bigcup\left\{\mathcal{A}_\alpha^\sharp\mid\alpha\in\Lambda'\right\}.\tag{1.1.1}$$

$\forall \varLambda', \varLambda'' \subset \varLambda$, 有下式成立:

$$\begin{aligned}&\left(\bigcup\{\mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in \varLambda'\}\right)^\sharp \bigcap \left(\bigcup\{\mathcal{A}_\beta \mid \beta \in \varLambda''\}\right)^\sharp\\ =&\bigcup\left\{\mathcal{A}_\alpha^\sharp \bigcap \mathcal{A}_\beta^\sharp \mid \alpha \in \varLambda', \beta \in \varLambda''\right\}.\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

证明 任取 $x \in \left(\bigcup\{\mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in \varLambda'\}\right)^\sharp$, $\exists U \in \bigcup\{\mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in \varLambda'\}$, 使得 $x \in U$. 于是 $\exists \alpha' \in \varLambda'$, 使得 $U \in \mathcal{A}_{\alpha'}$. 因此

$$x \in U \subset \mathcal{A}_{\alpha'}^\sharp \in \bigcup\left\{\mathcal{A}_\alpha^\sharp \mid \alpha \in \varLambda'\right\}.$$

另一方面, $\forall x \in \bigcup\{\mathcal{A}_\alpha^\sharp \mid \alpha \in \varLambda'\}$, $\exists \alpha' \in \varLambda'$, 使得 $x \in \mathcal{A}_{\alpha'}^\sharp$. 从而 $\exists V \in \mathcal{A}_{\alpha'}$, 使得 $x \in V$. 因为 $V \in \bigcup\{\mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in \varLambda'\}$, 所以

$$x \in V \subset \left(\bigcup\{\mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in \varLambda'\}\right)^\sharp.$$

从而 (1.1.1) 成立.

其次证明 (1.1.2) 式成立. 依据 (1.1.1) 只需证

$$\begin{aligned}&\left(\bigcup\left\{\mathcal{A}_\alpha^\sharp \mid \alpha \in \varLambda'\right\}\right) \bigcap \left(\bigcup\left\{\mathcal{A}_\beta^\sharp \mid \beta \in \varLambda''\right\}\right)\\ =&\bigcup\left\{\mathcal{A}_\alpha^\sharp \bigcap \mathcal{A}_\beta^\sharp \mid \alpha \in \varLambda', \beta \in \varLambda''\right\}.\end{aligned}$$

显然下述等价关系成立:

$$\begin{aligned}&x \in \bigcup\left\{\mathcal{A}_\alpha^\sharp \mid \alpha \in \varLambda'\right\} \ \wedge\ x \in \bigcup\left\{\mathcal{A}_\beta^\sharp \mid \beta \in \varLambda''\right\}\\ \Leftrightarrow\ &\exists \alpha' \in \varLambda' \ \wedge\ \exists \beta' \in \varLambda'', \text{s.t. } x \in \mathcal{A}_{\alpha'}^\sharp \ \wedge\ x \in \mathcal{A}_{\beta'}^\sharp\\ \Leftrightarrow\ &\exists \alpha' \in \varLambda' \ \wedge\ \exists \beta' \in \varLambda'', \text{s.t. } x \in \mathcal{A}_{\alpha'}^\sharp \bigcap \mathcal{A}_{\beta'}^\sharp.\end{aligned}$$

■

显然上述命题中的 (1.1.1) 与 (1.1.2) 式可以简记如下:

(1.1.1)′ $\forall \varLambda' \subset \varLambda$, $\left\{\{\mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in \varLambda'\}^\sharp\right\}^\sharp = \{\mathcal{A}_\alpha^\sharp \mid \alpha \in \varLambda'\}^\sharp$.

(1.1.2)′ $\forall \varLambda', \varLambda'' \subset \varLambda$, 有下式成立:

$$\begin{aligned}&\left\{\{\mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in \varLambda'\}^\sharp\right\}^\sharp \bigcap \left\{\{\mathcal{A}_\beta \mid \beta \in \varLambda''\}^\sharp\right\}^\sharp\\ =&\left\{\mathcal{A}_\alpha^\sharp \bigcap \mathcal{A}_\beta^\sharp \mid \alpha \in \varLambda', \beta \in \varLambda''\right\}^\sharp.\end{aligned}$$

类似上述命题 1.1.1 的证明, 同样可以证明下述结论.

命题 1.1.2 设 X 为集合, 且 $A, A_\alpha \in 2^X, \alpha \in \varLambda$, 则下述各式成立:

(1.1.3) (分配律)

$$A \bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in \varLambda\}^\sharp = \left\{A \bigcap A_\alpha \mid \alpha \in \varLambda\right\}^\sharp,$$

$$A\bigcup\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A\bigcup A_\alpha).$$

(1.1.4)　(De Morgan 公式)

$$\big(\{A_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}^\sharp\big)^{\mathrm{C}}=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^{\mathrm{C}},$$

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)^{\mathrm{C}}=\{A_\alpha^{\mathrm{C}}\mid\alpha\in\Lambda\}^\sharp.$$

上述命题中的公式 (1.1.4) 常用来实行集合中并与交的互相转化. 下面给出集合之间的 (笛卡儿) 积与映射的概念.

定义 1.1.1　设 X,Y 均为集合. 由 X 中的元素 x 与 Y 中的元素 y 所构成的有序数对 (x,y) 作为元素的集合被称为 X 与 Y 的 (笛卡儿) 积, 记作

$$X\times Y=\{(x,y)|\ x\in X,\ y\in Y\}.$$

对 $X\times Y$ 的点 (x,y), x 称作该点的第 1 分量 (或坐标), y 称作该点的第 2 分量 (或坐标). 特别地, 当 $X=Y$ 时, 简记 $X\times X=X^2$. 这时记 $\Delta X=\{(x,x)\mid x\in X\}$, 称作 X 在积集 X^2 中的对角线.

类似地, 定义 $n(\in\mathbf{N})$ 个集合的笛卡儿积如下:

$$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|\ x_i\in X_i,\ i\in I_n\}.$$

当 $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$ 时, 简记作 $\overbrace{X\times X\times\cdots\times X}^{n\text{个}}=X^n$.

定义 1.1.2　设 X,Y 均为集合. 如果 S 是 $X\times Y$ 的一个子集, 即 $S\subset X\times Y$, 称 S 为从 X 到 Y 的一个关系. 如果 $(x,y)\in S$, 称 x 与 y 是 S 相关的, 并且记作 xSy.

特别地, 如果存在关系 $f\subset X\times Y$, 满足下述条件:

(i) $\forall x\in X$, $\exists y\in Y$, 使得 $(x,y)\in f$;

(ii) 如果 $(x,y'),(x,y'')\in f$, 则 $y'=y''$,

称 f 为从 X 到 Y 的一个映射, y 称作 x 在映射 f 下的像, 并且记作 $y=f(x)$. 通常也将从 X 到 Y 的映射 f 记作 $f:X\to Y$.

当 S 为从集合 X 到集合 Y 的一个关系时, 笛卡儿积 $Y\times X$ 的子集 $\{(y,x)\in Y\times X\mid xSy\}$ 是从 Y 到 X 的一个关系, 称作关系 S 的逆, 并且记作 S^{-1}.

特别地, 如果一个从 X 到 Y 的映射 f 的逆关系也满足上述映射条件 (i) 和 (ii) 时, 称作 f 的逆映射, 记作 $f^{-1}:Y\to X$.

定义 1.1.3　设 S 是从集合 X 到自身的一个关系. 当 S 满足: $\forall x,y,z\in X$,

(1) xSx, 称它是自反的;

(2) $xSy \Rightarrow ySx$, 称它是对称的;

(3) $xSy \wedge ySx \Rightarrow x = y$, 称它是反对称的;

(4) $xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz$, 称它是传递的或可迁的.

当关系 S 同时为自反、对称和传递时, 称它为集合 X 中的一个等价关系.

当 S 是集合 X 中的一个等价关系时, 对每个 $x \in X$, 将集合 X 的子集 $\{y \in X \mid ySx\}$ 称为 x 的 S 等价类, 或者简称等价类, 记作 $[x]_S$ 或 $[x]$, 并且将每个 $y \in [x]_S$ 都称为 S 等价类 $[x]_S$ 中的一个代表元. 另外将集族 $\{[x]_S \mid x \in X\}$ 称为集合 X 相对于等价关系 S 而言的商集, 或者简称为商集, 并且记作 X/S.

映射 $p: X \to X/S$ 定义为

$$p(x) = [x], \quad \forall x \in X,$$

则 p 是由集合 X 到它的商集 X/S 的一个映射, 称为自然射影.

此外当一个关系满足上述条件 (1) 与 (4) 时, 称为集合的先序, 并且记作"$\prec$". "$x \prec y$"读作"x 先于 y". 一个赋予先序的集合称之为先序集. 如果一个集合的先序又同时满足条件 (3), 称它为偏序. 一个赋予偏序的集合称之为偏序集, 并且将先序集或者偏序集统称为有序集. 例如, 实数集 $\mathbf{R}$ 中的"小于等于" ($\leqslant$) 关系既是个先序又是个偏序, 但是因为"小于" ($<$) 关系对于自反律不成立, 所以不是先序, 当然更不是偏序.

设 $(X, \prec)$ 为偏序集, $x, y \in X$. 如果 $x \prec y$ 时, 称 x 在 y 前, 或者 x 小于 y, 有时也称 y 在 x 后, 或者 y 大于 x. 如果同时有 $x \prec y$ 和 $y \prec x$ 成立时, 称 x 等于 y, 记作 $x = y$. 对 $A \subset X$ 与 $b \in X$, 如果 $\forall a \in A$, 满足 $b \prec a$ 时, 称 b 是 A 的下界. 在 A 的所有下界中大于或者等于它的任意一个下界的元素称作 A 的下确界, 记作 $\inf A$. 特别地, 如果 $\inf A \in A$, 称 $\inf A$ 为 A 的最小元. 同样可以类似地给出集合 A 的上确界以及最大元的定义, 并且将集合 A 的上确界记作 $\sup A$. 集合 A 的最小元与最大元分别记作 $\min A$ 与 $\max A$.

应该注意, 在一个有序集中, 并非任意两个元素都存在序关系. 对先序集 $(X, \prec)$, 如果 $A \subset X$, 并且 A 中的任意两个元素都存在着序关系, 称 A 是 X 中的一个链. 如果一个偏序集同时又是一个链, 称作全序集, 并且将这个序称作全序. 如果一个全序集满足任意子集具有最小元的条件, 称作良序集, 并且将这个序称作良序.

在本书中省略了关于集合的基数和滤子等概念的叙述. 对集合 A, 用 $|A|$ 或者 $\mathrm{Card}\, A$ 表示它的基数, 如果 $|A| \leqslant |\mathbf{N}|$, 则称 A 为可数集. 自然将非可数的集合称作不可数集. 另外关于集合的选择公理、良序定理以及 Zorn 引理等著名的定理都认为是读者所熟知的.

1.2　度量空间

将实数轴 $\mathbf{R}$ 上的通常距离 (即 $d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in\mathbf{R}$) 的概念扩展到抽象的集合上, 就得到了度量的概念. 本节将叙述关于度量空间的定义、度量空间之间的连续映射等概念, 以及相关的一些性质.

定义 1.2.1　设 X 是一个集合. 如果存在实值函数 $\rho: X\times X\to\hat{\mathbf{R}}_+$, 使得 $\forall x,y,z\in X$, 满足下列三个条件:

(1) (正定性)　$\rho(x,y)\geqslant 0\wedge\rho(x,x)=0$;

(2) (对称性)　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) (三角不等式)　$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$,

称 ρ 为 X 上的伪度量.

如果 ρ 还满足: $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$, 称它为 X 上的度量. 当集合 X 具有度量 ρ 时, 称偶对 (X,ρ) 为度量空间, 或者称 X 为关于度量 ρ 的度量空间, 简称作度量空间. $\forall x,y\in X$, 非负实数 $\rho(x,y)$ 称为点 x 与 y 之间的距离. 有时也将度量称为距离, 将映射 ρ 称为定义 X 上的距离函数, 并且将度量空间称作距离空间.

对任意正数 $\varepsilon>0$, 点集

$$B_\rho(x,\varepsilon)=\{y\in X\mid\rho(x,y)<\varepsilon\}\tag{1.2.1}$$

(简记作 $B(x,\varepsilon)$) 称作以点 x 为中心以 ε 为半径的开球, 或者称作 x 的 ε 球形邻域, 简称作 x 的 ε 邻域.

设 A,B 为 X 的非空子集, 下述记号经常用到. 令

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}A&=\sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\},\\ \rho(A,B)&=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}\\ &=\inf\{\rho(x,B)\mid x\in A\},\end{aligned}$$

其中 $\rho(x,B)=\rho(\{x\},B)=\inf\{\rho(x,y)\mid y\in B\}$. $\mathrm{diam}A$ 称作集合 A 的直径, $\rho(A,B)$ 称作集合 A 与 B 之间的距离, 有时也记作 $\mathrm{dist}(A,B)$. 点集

$$B_\rho(A,\varepsilon)=\{x\in X\mid\rho(x,A)<\varepsilon\}\tag{1.2.2}$$

(简记作 $B(A,\varepsilon)$) 称作 A 的 ε 球形邻域, 简称作 A 的 ε 邻域.

定理 1.2.1　设 X 是度量空间, 则其球形邻域具有下述性质:

(1) $\forall x\in X$, $\exists\tilde{\varepsilon}>0$, 使得 $B(x,\tilde{\varepsilon})$ 是 x 的球形邻域. 其次 $\forall\varepsilon>0$, 有 $x\in B(x,\varepsilon)$.

(2) 设 B_1,B_2 是点 x 的任意两个球形邻域, 则存在 x 的球形邻域 B, 满足 $B\subset B_1\bigcap B_2$.

(3) 设 B 是点 x 的某个球形邻域. 如果 $y \in B$, 则存在 y 的球形邻域 $\widetilde{B}$, 满足 $\widetilde{B} \subset B$.

证明 (1) 显然成立.

(2) 设 $\exists \varepsilon_i > 0$, 使得 $B_i = B(x, \varepsilon_i)$, 其中 $i = 1, 2$. 任意选取一个正数 $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, 令 $B = B(x, \varepsilon)$. 显然 $B \subset B_1 \bigcap B_2$.

(3) 设 $B = B(x, \varepsilon)$, 且 $y \in B$. 令 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \rho(x, y)$. 显然 $\tilde{\varepsilon} > 0$. 令 $\widetilde{B} = B(y, \tilde{\varepsilon})$. 如果 $z \in \widetilde{B}$,

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) < \varepsilon,$$

故 $z \in B$. 由 z 的任意性, $\widetilde{B} \subset B$. ■

定义 1.2.2 设 X 是度量空间, O 与 E 均为 X 的子集.

(i) 若 $\forall x \in O, \exists \varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset O$, 称 O 是 X 中的开集.

(ii) 如果 $X \backslash E$ 是 X 中的开集, 称 E 是 X 中的闭集.

以下为叙述方便, 将度量空间 X 中的所有开集 (闭集) 所构成的集合族记作 $\mathfrak{O}(X)(\mathfrak{C}(X))$.

定理 1.2.2 度量空间 X 中的开集具有下述性质:

(1) $X, \varnothing \in \mathfrak{O}(X)$.

(2) $\forall O_1, O_2 \in \mathfrak{O}(X) \Rightarrow O_1 \bigcap O_2 \in \mathfrak{O}(X)$.

(3) 设 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathfrak{O}(X) \Rightarrow \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}^\sharp \in \mathfrak{O}(X)$.

证明 (1) $\forall x \in X$, 由定理 1.2.1 的 (1), 至少 $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon)$ 是 x 的球形邻域. 因为 $B(x, \varepsilon) \subset X$, 所以 X 满足开集的条件. 而空集 $\varnothing$ 中不包含任何点, 自然地认为满足开集的条件.

(2) 设 $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}(X)$. $\forall x \in O_1 \bigcap O_2$, 存在 x 的球形邻域 $B(x, \varepsilon_1)$ 与 $B(x, \varepsilon_2)$, 使得 $B(x, \varepsilon_i) \subset O_i$, $i = 1, 2$. 根据定理 1.2.1 的 (2), 存在 x 的球形邻域 $B(x, \varepsilon)$, 使得

$$x \in B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_1) \bigcap B(x, \varepsilon_2) \subset O_1 \bigcap O_2,$$

所以 $O_1 \bigcap O_2 \in \mathfrak{O}(X)$.

(3) 设 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathfrak{O}(X)$. $\forall x \in \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}^\sharp$, $\exists \lambda' \in \Lambda$, 使得 $x \in O_{\lambda'}$. 由于 $O_{\lambda'} \in \mathfrak{O}(X)$, 故 $\exists \varepsilon > 0$, 使得

$$x \in B(x, \varepsilon) \subset O_{\lambda'} \subset \{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}^\sharp.$$

因此 $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}^\sharp \in \mathfrak{O}(X)$. ■

由命题 1.1.2, 定理 1.2.2 和闭集的定义下述定理是显然的.

定理 1.2.3 度量空间 X 中的闭集具有下述性质:

(1) $X, \varnothing \in \mathfrak{C}(X)$.

(2) $\forall E_1, E_2 \in \mathfrak{C}(X) \Rightarrow E_1 \bigcup E_2 \in \mathfrak{C}(X)$.

(3) 设 $\{E_\lambda \mid \lambda \in \varLambda\} \subset \mathfrak{C}(X)$, 则 $\bigcap\limits_{\lambda \in \varLambda} E_\lambda \in \mathfrak{C}(X)$.

定义 1.2.3　设 X 是度量空间, 对 $x \in X$ 与 $U \subset X$, 如果 $\exists V \in \mathfrak{O}(X)$, 满足 $x \in V \subset U$, 称 U 是点 x 的一个邻域.

下述定理给出了一个集合是某个点的邻域的充分必要条件.

定理 1.2.4　度量空间 X 的子集 U 是 X 中一点 x 的邻域 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$, 使得 $x \in B(x, \varepsilon) \subset U$.

证明　"$\Rightarrow$": 设 U 是 X 中一点 x 的邻域. 根据邻域的定义, $\exists V \in \mathfrak{O}(X)$, 使得 $x \in V \subset U$. 依据开集的定义, $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $x \in B(x, \varepsilon) \subset V \subset U$.

"$\Leftarrow$": 设 $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$. 由于 $x \in B(x, \varepsilon) \in \mathfrak{O}(X)$, 故 U 是点 x 的邻域. ■

下面将给出度量空间之间的连续映射的概念, 并且给出判断一个映射是否为连续的充分必要条件.

定义 1.2.4　设 X 与 Y 均为度量空间, 映射 $f: X \to Y$, 并且点 $x_0 \in X$. 如果对 $f(x_0)$ 在 Y 中的每个球形邻域 $B(f(x_0), \varepsilon)$, 存在点 x_0 在 X 中的球形邻域 $B(x_0, \delta)$, 满足

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon),$$

其中 $\varepsilon > 0, \delta > 0$, 称 f 在点 x_0 处连续.

如果映射 $f: X \to Y$ 在每个点 $x \in X$ 处都连续, 称 f 是一个由 X 到 Y 的连续映射, 简称 f 为连续映射.

定理 1.2.5　设 X 与 Y 均为度量空间, 映射 $f: X \to Y$, 并且点 $x_0 \in X$, 则 f 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 对 $f(x_0)$ 的任意一个邻域 U, $f^{-1}(U)$ 是 x_0 的一个邻域.

证明　"$\Rightarrow$": 设 f 在点 x_0 处连续, 并且 U 是 $f(x_0)$ 的任意一个邻域. 根据定理 1.2.4, $\exists \varepsilon > 0$, 使得

$$f(x_0) \in B(f(x_0), \varepsilon) \subset U.$$

由 f 在点 x_0 处的连续性, $\exists \delta > 0$, 使得 $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. 于是

$$x_0 \in B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon) \subset f^{-1}(U).$$

因此 $f^{-1}(U)$ 是 x_0 的一个邻域.

"$\Leftarrow$": $\forall \varepsilon > 0$, 显然 $B(f(x_0), \varepsilon)$ 是点 $f(x_0)$ 的一个邻域. 由题设条件, $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ 是点 x_0 的一个邻域. 依据定理 1.2.4, $\exists \delta > 0$, 使得 $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. 于是 $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. 因此 f 在点 x_0 处连续. ■

定理 1.2.6　设 X 与 Y 均为度量空间, 映射 $f: X \to Y$, 则 f 连续 $\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{O}(Y) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathfrak{O}(X)$.

证明 “$\Rightarrow$”: 设 $U \in \mathfrak{O}(Y)$. 令 $V = f^{-1}(U)$. $\forall x \in V$, 有 $f(x) \in U$, 从而 U 是 $f(x)$ 的一个邻域. 由于 f 是连续映射, 故依据定理 1.2.5, V 是点 x 的一个邻域. 于是 $\exists V_x \in \mathfrak{O}(X)$, 使得 $x \in V_x \subset V$. 显然

$$V \subset \{V_x \mid x \in V\}^{\sharp} \subset V,$$

即 $V = \{V_x \mid x \in V\}^{\sharp}$. 由定理 1.2.2 的 (3), $V \in \mathfrak{O}(X)$.

“$\Leftarrow$”: 设题设条件成立. $\forall x \in X$, 设 V 是 $f(x)$ 的任意一个邻域, 则 $\exists U \in \mathfrak{O}(Y)$, 使得 $f(x) \in U \subset V$. 于是

$$x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V).$$

由题设条件, $f^{-1}(U) \in \mathfrak{O}(X)$, 所以 $f^{-1}(V)$ 是点 x 在 X 中的一个邻域. 依据定理 1.2.5, f 是连续的. ■

对度量空间 X 和 Y, 以下利用记号 $C(X,Y)$ 表示由 X 到 Y 的所有连续映射的全体所构成的集合. 下述引理是经常用到的.

引理 1.2.1 (Schwarz 引理) 设 $x_i, y_i \in \mathbf{R} (i \in \mathbf{N})$, 则

(1) $\forall n \in \mathbf{N}$, 有

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2. \tag{1.2.3}$$

(2) 若级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2$ 均收敛, 则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ 绝对收敛, 且

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2. \tag{1.2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 \leqslant \Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\Big)^{1/2}\Big]^2. \tag{1.2.5}$$

证明 设 $m < n$, $t \in \mathbf{R}$, 则

$$\sum_{i=m}^{n} (|x_i| t + |y_i|)^2 = \Big(\sum_{i=m}^{n} x_i^2\Big) t^2 + 2\Big(\sum_{i=m}^{n} |x_i y_i|\Big) t + \sum_{i=m}^{n} y_i^2 \geqslant 0.$$

(1) 如果将上述表达式里的中间的式子看作关于变数 t 的二次式, 由于其系数判别式是非正的, 得到

$$\Big(\sum_{i=m}^{n} |x_i y_i|\Big)^2 \leqslant \sum_{i=m}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=m}^{n} y_i^2 \leqslant \sum_{i=m}^{\infty} x_i^2 \cdot \sum_{i=m}^{\infty} y_i^2.$$

如果取 $m = 1$, 并且注意到将第一个不等式左端求和号中绝对值符号去掉, 不等式也仍然成立, 从而 (1.2.3) 式成立.