

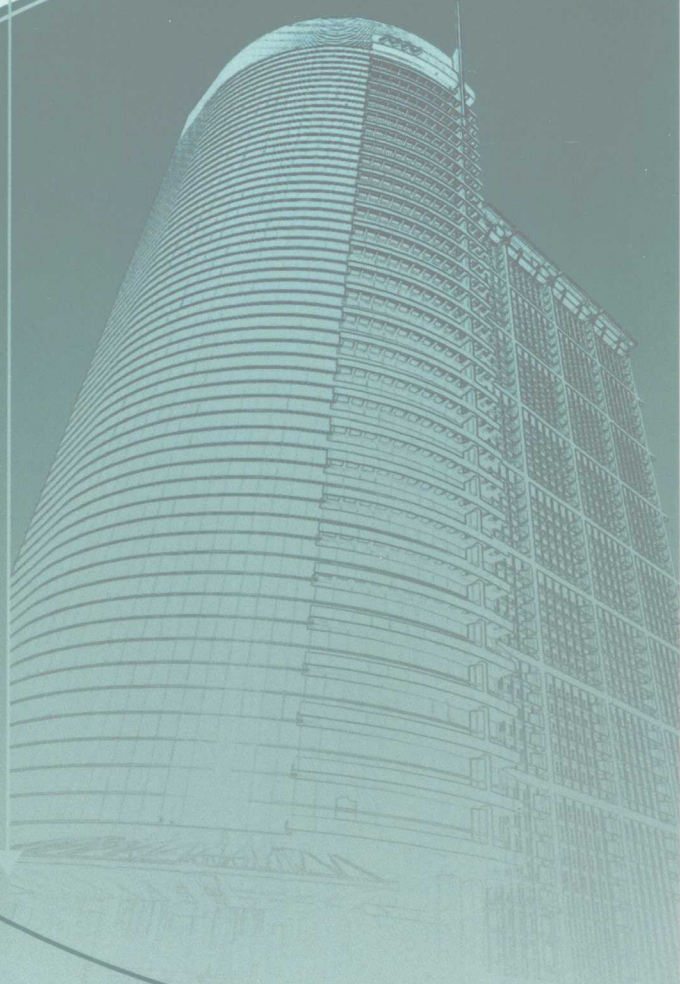
◆ 高等学校教材 ◆

【高等土力学】

GAODENG TULIXUE

◎ 刘 斌 沙成满 张锋春 编著

Advanced soil mechanics



地质出版社

高等土力学

刘 斌 沙成满 张锋春 编著

地 质 出 版 社

· 北 京 ·

内 容 简 介

本书做到了与本科土力学教材的充分衔接，是一本既能反映学科当前发展水平，又简明扼要易懂，难度和篇幅适中，内容连续性好，并适合自学的研究生教材。全书共分7章，主要包括：静力作用下土的性质；动力作用下土的性质；土的压缩与固结；土的渗流；土的实验室与现场试验；岩土工程数值分析；地基土对结构动力特性的影响。

本书适合于岩土工程、地质工程等专业硕士研究生作为教材使用，可供有关专业的研究生和高年级本科生作为教学参考书使用，也可供岩土工程、地质工程等与之相关专业的研究人员和教师阅读和参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等土力学 / 刘斌等编著. —北京：地质出版社，
2008. 10

ISBN 978-7-116-05730-2

I. 高… II. 刘… III. 土力学—研究生—教材 IV. TU43

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 109384 号

责任编辑：祁向雷 王春庆

责任校对：王素荣

出版发行：地质出版社

社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083

电 话：(010) 82324508 (邮购部)；(010) 82324577 (编辑室)

网 址：<http://www.gph.com.cn>

电子邮箱：zbs@gph.com.cn

传 真：(010) 82310759

印 刷：北京市朝阳区小红门印刷厂

开 本：787 mm × 1092 mm $\frac{1}{16}$

印 张：9

字 数：200 千字

印 数：1—1500 册

版 次：2008 年 10 月北京第 1 版·第 1 次印刷

定 价：20.00 元

书 号：ISBN 978-7-116-05730-2

(如对本书有建议或意见，敬请致电本社；如本书有印装问题，本社负责调换)

前 言

在硕士研究生教学中，高等土力学在岩土工程、地质工程、水文地质与工程地质等各个专业中是很重要的一门课，目前缺少适用于岩土工程专业及相关专业的硕士研究生用的高等土力学教材。为适应研究生教学一般40学时左右的需要，结合作者多年从事高等土力学教学的体会，参考了一些成熟和经典的各类相关教材以及近年来的学科发展成果，我们编写了此书。在编写中，力求做到与本科土力学教材既要无缝衔接又尽量避免重复，使该书成为既能反映学科当前发展水平，又简明扼要易懂，难度和篇幅适中，内容连续性好，并适合自学的一本研究生教材。

全书共分7章，内容及其作者如下：第1章静力作用下土的性质；第2章动力作用下土的性质；第3章土的压缩与固结；第4章土的渗流；第5章土的实验室与现场实验；第6章岩土工程数值计算；第7章地基土对结构动力特性的影响。其中第2、3、5、7章由沙成满编写，第1、4、6章由张锋春编写，全书由刘斌、沙成满进行统稿。

本书适合于岩土工程、结构工程等土建类和土木工程各个二级学科硕士研究生作为教材使用，也可作为有关专业的研究生和高年级土木工程专业本科生作为教学参考书使用，也可供岩土工程等与之相关专业的研究人员和教师阅读和参考。

笔者感谢东北大学研究生院、资源与土木工程学院对本书出版的立项资助和支持。编写过程中，参考了相关教材和科技文献资料，在此对这些作者表示谢意。另外也感谢资源与土木工程学院和岩土工程研究所的一些老师给予的大力帮助和关怀。

由于作者水平有限，加之时间仓促，书中定有许多疏漏和不完善之处，恳请读者指正。

作 者

2008年2月于沈阳

目 次

前 言

第 1 章 静力作用下土的性质	(1)
1.1 土的应力-应变-强度特性	(1)
1.2 弹性模型	(4)
1.2.1 线弹性本构关系的不同表达式	(4)
1.2.2 邓肯-张模型	(8)
1.3 屈服与破坏准则	(12)
1.3.1 库仑-莫尔 (Coulomb - Mohr) 屈服准则与破坏准则	(13)
1.3.2 Tresca 准则与广义 Tresca 准则	(14)
1.3.3 Mises 准则和 Drucker - Prager 准则	(15)
1.4 塑性模型	(17)
1.4.1 加载条件	(17)
1.4.2 流动法则	(18)
1.4.3 硬化规律	(21)
1.4.4 弹塑性矩阵	(22)
1.4.5 Drucker - Prager 理想弹塑性模型	(24)
第 2 章 动力作用下土的性质	(26)
2.1 土的动力本构关系	(26)
2.1.1 基本模型	(27)
2.1.2 黏弹性模型	(30)
2.1.3 弹塑性模型	(33)
2.2 土的动力性质的影响因素	(36)
2.2.1 围压 (σ_3) 的影响	(37)
2.2.2 轴向静应力的影响	(38)
2.2.3 动荷频率的影响	(38)
2.2.4 动荷循环次数的影响	(40)
2.2.5 固结状态的影响	(42)
第 3 章 土的压缩与固结	(44)
3.1 土的压缩	(44)
3.1.1 土体变形机理	(44)
3.1.2 土体压缩的一般规律	(45)
3.2 影响土压缩性的主要因素	(47)
3.2.1 土体本身性质与状态	(47)

3.2.2 环境因素的影响	(48)
3.3 沉降产生的原因和类型	(48)
3.3.1 引起地基沉降的可能原因	(49)
3.3.2 沉降的类型	(49)
3.3.3 沉降计算	(50)
3.4 太沙基一维固结理论	(52)
3.4.1 固结模型和基本假设	(52)
3.4.2 固结方程	(53)
3.4.3 固结方程的解	(54)
3.4.4 固结度	(55)
第4章 土的渗流	(58)
4.1 渗流基本概念	(58)
4.1.1 渗流的概念	(58)
4.1.2 渗流作用力	(59)
4.1.3 渗流变形	(60)
4.1.4 渗透速度与实际速度	(60)
4.1.5 渗流水头与等水头面和水力坡度	(61)
4.2 达西定律	(62)
4.2.1 达西定律实验	(62)
4.2.2 达西定律的推导	(63)
4.2.3 达西定律的适用范围与非达西流	(64)
4.3 渗流基本方程	(65)
4.3.1 渗流连续性方程	(66)
4.3.2 渗流基本微分方程	(68)
4.4 流网	(70)
4.4.1 组成流网的势函数与流函数	(71)
4.4.2 流网的性质	(73)
4.4.3 流网的应用	(74)
4.4.4 不同土层的流网过渡	(75)
4.4.5 流网图绘法	(76)
4.5 渗流问题的有限单元法	(76)
4.5.1 渗流场的水头分布	(76)
4.5.2 渗流量计算	(79)
第5章 土的实验室与现场实验	(81)
5.1 实验室内土工实验	(81)
5.1.1 土的变形实验	(81)
5.1.2 土的强度实验	(86)
5.1.3 土的动力特性试验	(91)
5.1.4 土工离心模型试验	(95)

5.2	原位测试	(97)
5.2.1	载荷试验	(97)
5.2.2	静力触探试验	(101)
5.2.3	旁压试验	(102)
5.2.4	标准贯入试验	(104)
5.2.5	十字板剪切试验	(106)
第6章	岩土工程数值计算	(108)
6.1	有限单元法	(109)
6.1.1	有限元法的基本方程	(109)
6.1.2	初始地应力分析	(114)
6.1.3	施工过程模拟	(117)
6.1.4	有限元法求解土力学问题的步骤及实例	(120)
6.2	有限差分法	(120)
6.2.1	有限差分法基本方程	(120)
6.2.2	平面问题有限差分方程	(122)
6.2.3	显式有限差分算法——时间递步法	(125)
第7章	地基土对结构动力特性的影响	(128)
7.1	不考虑地基土影响的结构动力方程	(128)
7.1.1	X 为相对于基础矩心的情况	(129)
7.1.2	X 为相对于下一个节点的情况	(129)
7.2	考虑地基土影响的结构动力方程	(130)
7.2.1	X 为相对于基础矩心的情况	(132)
7.2.2	X 为相对于下一节点的情况	(132)
7.3	仿真模型及其分析	(133)
参考文献		(136)

第1章 静力作用下土的性质

材料的强度是指材料破坏时的应力状态，定义破坏的方法是破坏准则。基于应力状态的复杂性，破坏准则常常是应力状态的组合。强度理论是揭示土破坏机理的理论，它也以一定的应力状态的组合来表示。因而强度理论与破坏准则的表达式是一致的。

从土力学发展的历史来看，早期的土力学将土的强度问题和变形问题截然分开，前者用于土体的稳定分析，采用极限平衡的方法；后者用于土的变形和地基沉降计算。这样土的强度只涉及其最终破坏时的应力状态，与应力变形过程无关。随着现代土力学的发展，人们逐渐认识到土的本构关系是应力-应变-时间-强度的统一的关系。土的强度实际上是变形过程发展的最后阶段，可认为是施加很小应力增量 $d\sigma_{ij}$ ，即引起很大的或不可控制的应变增量 $d\epsilon_{ij}$ ，所对应的应力状态即破坏状态。这样，土的强度理论常常融合在土的本构关系之中，对应于破坏准则。为此，这里将土的强度理论与本构关系在一章进行介绍。

1.1 土的应力-应变-强度特性

土体和任何事物一样，有它的自身规律。在实践中人们通过不断的试验、观察与总结，提高了对土体性质的认识，形成了基本的土的应力-应变-强度特性规律。这种关系反映了土的变形特征和强度特征，是理论发展和实际工程设计的基础。

(1) 非线性与静压屈服特性

非线性与静压屈服特性是土作为一种材料，最突出的特征。图 1.1 给出了正常固结粘土的单轴压缩-回弹-再压缩曲线和常规三轴剪切试验整理出来的破坏与屈服曲线；图 1.2 给出了土在常规三轴剪切条件下的 $\sigma - \epsilon$ 关系曲线。图 1.2 (a) 中上部两条曲线为应力-应变曲线，下部两条曲线为体应变 ϵ_v 与轴应变 ϵ_1 关系曲线。由图中可以得出如下结论。

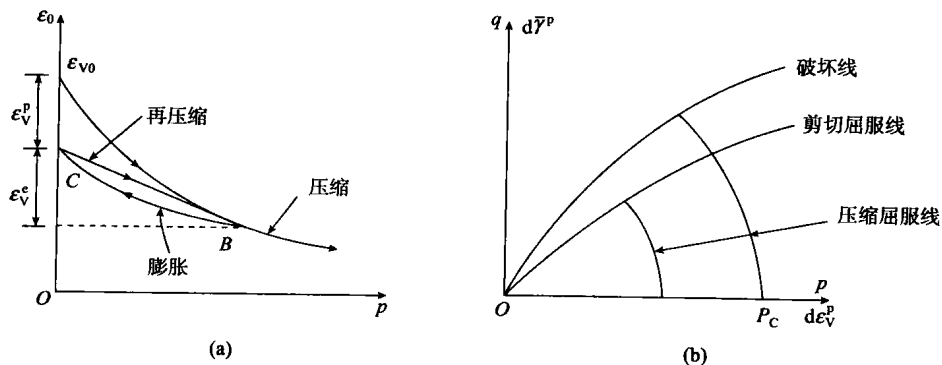


图 1.1 正常固结土的压缩与剪切曲线

(a) 压缩曲线；(b) 三轴剪切曲线

1) 非线性。土的非线性特征是指土在其 $\sigma - \varepsilon$ 关系曲线中只有极小一部分（或者没有）直线，在较高的应力水平和可利用的强度范围内，材料的 $\sigma - \varepsilon$ 关系大部分为明显的非线性塑性性质（图 1.1 (a)，图 1.2）。而图 1.1 (a) 在卸荷时产生明显的塑性应变 ε_v^e 和塑性体应变 ε_v^p 。

2) 静压屈服特征。静压屈服特征是岩土体材料屈服区别于金属屈服的最典型特征，是指在纯静水压力 p 作用下，土体产生体积应变屈服的特性。而金属材料在很高的静水压力作用下，其体积应变都是弹性的，压力取消后，变形完全释放。而土在纯静水压力 p 的作用下，可以产生塑性体应变，达到屈服状态（图 1.1）。

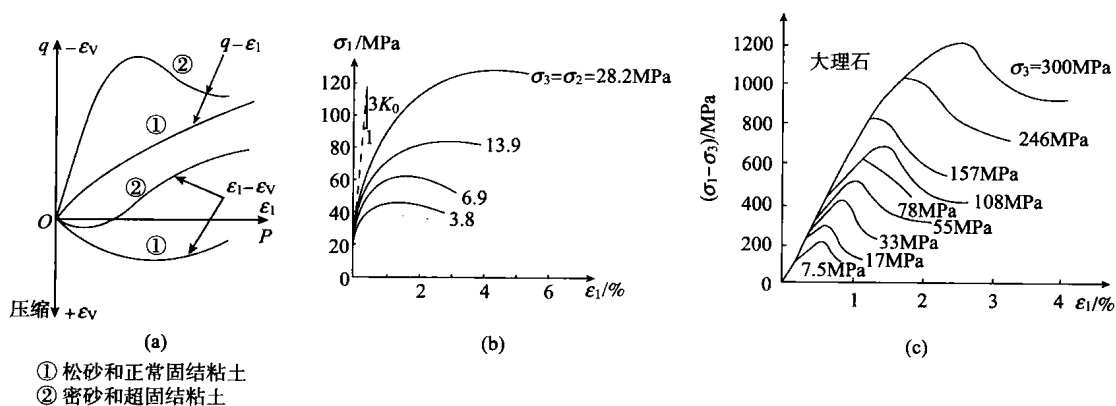


图 1.2 土、岩石与混凝土的 $\sigma - \varepsilon$ 关系曲线

(a) 土的三轴试验曲线；(b) 混凝土三轴受压试验 (K_0 为土的静止侧压力系数)；(c) 岩石的三轴试验应力-应变曲线

(2) 硬化与软化特性

图 1.2 说明土体材料普遍存在着应变硬化和软化特性。通常正常固结土与松散砂土具有硬化特性，超固结粘土与密实砂土具有软化特性。同时还说明硬化过程随着围压 σ_3 的增加而增强，软化过程随着围压的增加而减弱。

(3) 压硬性与剪胀性

压硬性指的是静水压力与剪应变之间的耦合作用，即对于土体材料，静水压力不仅产生弹性的和塑性的体应变，而且还会引起剪应变刚度的增大而使剪应变变化（图 1.1 (b)，图 1.2）所示。剪胀性指的是剪应力与体应变之间的耦合作用，即剪应力不仅产生弹性和塑性剪应变，而且会使材料的体积发生膨胀或收缩。当剪应力使材料体积膨胀时就称为剪胀性，当剪应力使材料体积收缩时就称为负的剪胀性或剪缩。如图 1.2 (a) 中 $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ 关系曲线所示。某些学者把土的剪胀性，解释为由于土所包含的颗粒在受力时发生错动，而造成颗粒间孔隙的变化所致。对于弹性本构关系而言，正应力只产生正应变 ε ，剪应力只产生剪应变 γ ；对于经典塑性本构关系而言，静水压力不产生屈服，剪应力只产生弹性和塑性剪应变。因此，二者的正应力与剪应变及剪应力与正应变之间不存在耦合关系。所以该特性也是土体材料的一个独特特性。

一般来说，静水压力增大，材料的强度提高，从而影响了材料的剪应变。而在剪切开始时，各种土都产生压缩和剪缩现象，随后很快都会产生剪胀现象。同硬化与软化特性相

似，超固结粘土和密砂的剪胀现象最为明显，正常固结粘土和松砂则主要表现为剪缩。

(4) 路径相关性

路径相关性指的是土体材料的应力-应变-强度关系受应力路径或应变路径的影响。应力或应变路径指的是在实验室条件下或工程条件下，土体在加载过程中，一点应力或应变在应力或应变空间所走过的路径或轨迹。图 1.3 表示对一种土的不同应力路径剪切试验所得的广义剪应力 q 与广义剪应变 $\bar{\gamma}$ 关系图。说明即使对同一种土，其应力-应变-强度关系也要受应力路径的影响。

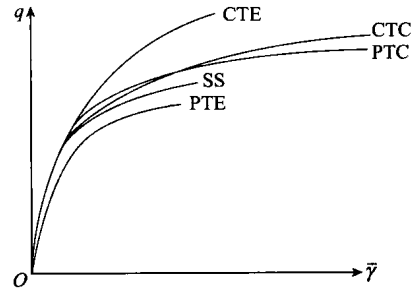


图 1.3 不同应力路径的剪切试验曲线
 CTC, CTE—常规三轴的伸长与压缩试验；
 SS— P 恒定的单剪试验；
 PTE, PTC— P 恒定的三轴伸长与压缩试验

(5) 摩擦型屈服与破坏特性

金属材料的屈服与破坏一般属于无摩擦型，即屈服及破坏与静水压力无关，服从 Tresca 与 Mises 准则。而岩土类材料由于其三相混合结构的特性，屈服与破坏属于受静水压力影响的摩擦型材料。屈服与破坏一般来说服从 Coulomb-Mohr 及 Drucker - Prager 类型准则，如图 1.2 (b) 所示。

(6) 中间主应力 σ_2 对强度的影响

土体材料的屈服不仅受最大主剪应力 $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ 影响，而且还受到中间主应力 σ_2 或其他两个主剪应力 $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ 或 $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ 中较大一个剪应力的影响，称之为中间主应力对强度的影响或称为双剪应力影响。这一点是传统的 Coulomb-Mohr 准则与 Tresca 准则所不能反映的。该问题的研究也是岩土界多年来的一个热点问题。在屈服与破坏准则的研究中，Drucker - Prager 准则及我国的俞宏茂提出的双剪理论都涉及中间主应力对材料屈服破坏的影响。

(7) 土体材料的拉压强度不同

这是比较显然的一点，对照于金属材料一般情况拉压强度相等的特性，砂土不能承受拉力，可以认为抗拉强度 $c=0$ ；粘土则仅能够承受很小的拉力。拉压强度显著不同。类同于钢筋混凝土结构中的钢筋与混凝土的情况。

(8) 弹塑性耦合作用

材料应力进入塑性阶段后，反复加卸载或受周期荷载作用，将引起材料弹性性质与塑性性质的相互作用与影响。这种现象就称为弹塑性耦合作用。例如，在材料塑性变形阶段，塑性变形的增加引起弹性模量的下降，就属于弹塑性耦合作用。

(9) 初始各向异性和应力导致的各向异性

土体在天然沉积或地质作用的过程中形成的材料，一般呈现层状或近层状，力学性质具各向异性，这叫做初始各向异性。应力导致的各向异性则指的是材料在外力作用下，引起了材料屈服极限等的变化。

(10) 时间相关性

土的应力-应变-强度还与时间相关的特性，即岩土具有流变特性或黏滞性。例如，土

体的次固结与边坡的蠕变滑移都是岩土体时间相关性的表现。

1.2 弹性模型

弹性本构关系是最基本的土体本构关系，也是多年来一直沿用以解决土力学问题的基本方法，例如土力学中的传统的土中应力计算、基础沉降以及地基上梁和板的计算都是采用弹性理论。此外，弹性本构关系又是塑性本构关系的基础，只有掌握了弹性本构关系才可能学好塑性本构关系。

本章主要介绍常用的线性弹性本构关系和以邓肯-张模型为代表的非线性弹性本构关系。

1.2.1 线弹性本构关系的不同表达式

(1) $E-\mu$ 形式的本构关系

即通常的弹性力学书籍中最常见的广义胡克定律：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中： E 为弹性模量； μ 为泊松比； G 为剪切弹性模量，其值为

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.2)$$

经过变换，上式可变换为用应变表示应力的形式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_z + \varepsilon_x) \right] \\ \sigma_z &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

式(1.3)可以写成矩阵的形式

$$\{\sigma\} = D\{\varepsilon\} \quad (1.4)$$

式中: $\{\sigma\}$ 和 $\{\varepsilon\}$ 为应力和应变列向量, 即

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma\} &= [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T \\ \{\varepsilon\} &= [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{\gamma_{xy}}{2}, \frac{\gamma_{yz}}{2}, \frac{\gamma_{zx}}{2}]^T \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

D 为 6×6 弹性矩阵, 即

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{1-\mu} & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & \frac{1-2\mu}{1-\mu} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{1-\mu} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

这两种形式的弹性本构关系都可以称之为 $E-\mu$ 模型, 二者是统一的。

在平面应变条件下, $\varepsilon_x = 0, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, 故式(1.4)中的 $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ 及式(1.6)中的 D 可简化为

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma\} &= [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \\ \{\varepsilon\} &= [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \frac{\gamma_{xy}}{2}]^T \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

$$D = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Sym} & & \frac{1-2\mu}{1-\mu} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$E-\mu$ 模型的广义胡克定律是材料力学、弹性力学中最常用的模型, 具有概念简单, 使用方便, 计算简洁的特点, 所以在很多岩土问题中得到应用。另一方面, 由于 $E-\mu$ 是完全的线性模型, 对照前面提到的土的非线性特性, 可知线弹性模型又不能反映这种特性, 因而又使其具有局限性。

(2) $K-G$ 形式的弹性本构关系

如果涉及弹塑性问题, 则下面提到的 $K-G$ 形式的弹性本构关系物理意义更加清晰。将式(1.1)的第一式改写为

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\mu)}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (1.9)$$

将 $\sigma_x = S_x + \sigma_m$, $3\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 代入上式得

$$\varepsilon_x = \frac{1+\mu}{E}(S_x + \sigma_m) - \frac{\mu}{E}3\sigma_m = \frac{1+\mu}{E}S_x + \frac{1-2\mu}{E}\sigma_m \quad (1.10)$$

令

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (1.11)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1.12)$$

式中: K 为体积压缩模量。将式 (1.11) 及式 (1.12) 代入式 (1.10) 有

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}S_x + \frac{1}{3K}\sigma_m \quad (1.13)$$

同理, 可得到线弹性的另外五个应力-应变关系式, 最后将 $K-G$ 形式的弹性本构关系写成如下形式:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}S_{ij} + \frac{\sigma_m}{3K}\delta_{ij} \quad (1.14)$$

式中: ε_{ij} 为应变张量; S_{ij} 为偏应力张量; G 为剪切模量; σ_m 为球应力张量; δ_{ij} 为单位张量; K 为体积压缩模量。

以应变表示应力的弹性本构关系张量表达式为

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + 3K\varepsilon_m\delta_{ij} \quad (1.15)$$

现在将式 (1.15) 对 σ_x ($i=j=x$) 展开:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Ge_x + 3K\varepsilon_m \\ &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m) + 3K\varepsilon_m \\ &= 2G\varepsilon_x + (3K - 2G) \cdot \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ &= 2G\varepsilon_x + \frac{1}{3}(3K - 2G)\varepsilon_x + \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \\ &= \left(K + \frac{4}{3}G\right)\varepsilon_x + \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \end{aligned}$$

对于 σ_y , σ_z 类推。故最后可写出 $K-G$ 形式的弹性矩阵如下:

$$D = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2G & & \\ & \text{Sym} & & & 2G & \\ & & & & & 2G \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

当平面应变时，式 (1.16) 简化为

$$D = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ \text{Sym} & & 2G \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

从式 (1.14) 及式 (1.15) 可以看出： $K-G$ 形式的弹性本构关系将偏应力和平均应力及偏应变和平均应变完全分离出来。而这一点正好符合于传统塑性力学中，平均应力只产生弹性变形，偏应力产生弹性与塑性变形的特点，从而在研究弹塑性问题时可将平均应力和偏应力按其物理效应分开，方便于研究塑性本构关系。

(3) $\lambda-G$ 形式的弹性本构关系

在式 (1.16) 中，将前三行三列的参数进行改写，使

$$K + \frac{4}{3}G = K + \frac{6}{3}G - \frac{2}{3}G = \lambda + 2G, K - \frac{2}{3}G = \lambda$$

则式 (1.16) 的弹性矩阵就变为

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2G & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & 2G & 0 \\ & & & & & 2G \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

在平面应变条件下，上式简化为

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 \\ & \lambda + 2G & 0 \\ \text{Sym} & & 2G \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

式中： λ 为 Lamé 常数， G 为剪切弹性模量。Lamé 常数 λ 与其他弹性常数的关系如下：

$$\lambda = K - \frac{2}{3}G = \frac{E\mu}{(1-\mu)(1-2\mu)} \quad (1.20)$$

以 Lamé 常数为参数的弹性本构关系的张量下标表达式为

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (1.21)$$

该种形式的弹性本构关系书写比较简洁，一般多用在理论书籍中，工程计算中不常应用。

(4) $M-G$ 形式的弹性本构关系

$$\text{在式 (1.6) 中，令 } M = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

则有

$$\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{E - E\mu - E + 2E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = M - 2G$$

可得到 $M-G$ 形式的弹性本构关系，该弹性本构关系在土力学中经常用到。故以 $M-G$ 表示的弹性矩阵可写为

$$D = \begin{bmatrix} M & M - 2G & M - 2G & 0 & 0 & 0 \\ & M & M - 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & M & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2G & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & 2G & 0 \\ & & & & & 2G \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

在平面应变条件下，上式简化为

$$D = \begin{bmatrix} M & M - 2G & 0 \\ & M & 0 \\ \text{Sym} & & 2G \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

式中： M 称为压缩模量，即土工试验中的侧限压缩模量，注意有别于土的变形模量。

上述四种线弹性本构关系实质上是统一的，都是广义胡克定律的变种。其中， $E - \mu$ 及 $K - G$ 形式应用得较多。弹性本构关系在书写的表现形式上可以为一般表达式，矩阵表达式以及张量下标表达式等。矩阵表达式适于工程中的有限元法计算，张量下标表达式简洁，适于书写和数学推导。

1.2.2 邓肯-张模型

针对线弹性模型的完全线性特性的不足，人们提出了反映土体变形非线性的弹性非线性本构模型。弹性非线性本构模型同样根据广义胡克定律建立刚度矩阵 D 。但是线性本构模型中 D 为常量，非线性本构中的 D 不再视为常量，而是随应力变化调整 E 与 μ 来实现对 D 的调整。

非线性弹性本构关系分为三种类型：① Cauchy 型；② Green 超弹性型 (Hyperelastic)；③ 次弹性 (Hypoelastic) 或增量型。自 20 世纪 70 年代以来，随着计算技术和计算机技术的发展，上述三种非线性弹性模型在岩土工程中都有应用，其中以简单的变模量次弹性模型应用最广。简单的变模量次弹性模型可写成增量形式为

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ei}(\varepsilon_{mn}) d\varepsilon_{kl} \quad (1.24)$$

$$d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{ei}(\sigma_{mn}) d\sigma_{kl} \quad (1.25)$$

式中： $D_{ijkl}^{ei}(\varepsilon_{mn})$ 和 $C_{ijkl}^{ei}(\sigma_{mn})$ 分别为与应变或应力路径有关的切线刚度张量与切线柔度张量。

邓肯-张模型就属于简单的变模量次弹性模型，又叫双曲线模型。由于这种模型最初是由邓肯和张两人所提出，所以叫邓肯-张模型，有时简称为 $D - C$ 模型。该模型在工程中应用广泛。该模型的弹性系数 E ， μ 随着应力水平的变化而变化，只要能通过试验和计算合理地确定不同应力水平下的 E_1 ， μ_1 值，即可求得 $D_{ijkl}^{ei}(\varepsilon_{mn})$ 和 $C_{ijkl}^{ei}(\sigma_{mn})$ ，从而可以按照式 (1.24) 或 (1.25) 进行计算了。

(1) 切线弹性模量 E_1 的确定

邓肯等人根据康纳 (Kondner) 的建议，将三轴剪切试验中当 σ_3 等于常数时的 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_1$ 关系近似的用双曲线来表示，见图 1.4 (a)，即

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad (1.26)$$

式 (1.26) 是变形的双曲线方程。式中: a 和 b 为双曲线参数, 由试验确定。

按照初始切线模量的定义, 双曲线方程式 (1.26) 的初始切线模量 E_i 为

$$E_i = \left. \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \quad (1.27)$$

对式 (1.26) 微分, 当 $\varepsilon_1 = 0$ 时, 可得

$$E_i = \frac{1}{a} \quad (1.28)$$

因此, a 为初始切线模量 E_i 的倒数, 见图 1.4 (a)。

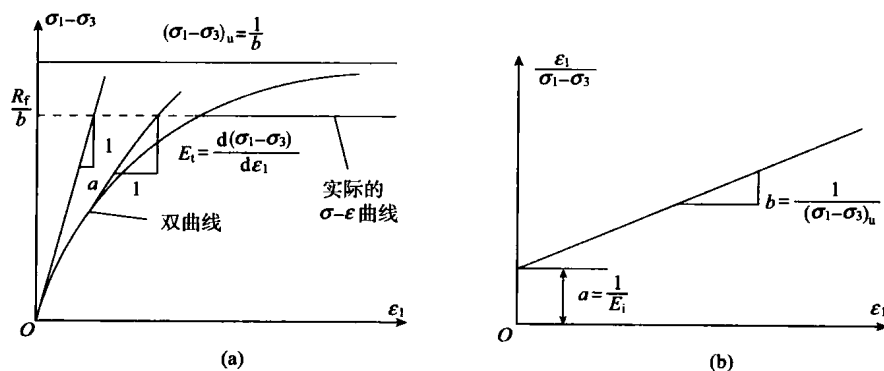


图 1.4 双曲线模型

当 $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ 时, 由式 (1.26) 可以求得强度的极限值 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 为

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_u = \left. \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} = \frac{1}{b} \quad (1.29)$$

因此, b 为强度极限值 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 的倒数, 它是双曲线的一条渐近线, 见图 1.4 (a)。

为了根据试验资料确定常数 a 和 b , 可以将图 1.4 (a) 绘在 $\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 - \sigma_3} - \varepsilon_1$ 坐标系中, 则双曲线就变为直线, 见图 1.4 (b)。 a 为纵轴的截距, b 为直线的斜率, 即可从图中直接求得 a 与 b 。由于强度的极限值 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 理论上为 ε_1 趋于无穷大时的强度值, 一般不易求得, 而强度破坏条件可以人为地规定, 因此为了求得强度的极限值, 先通过破坏强度定义一个破坏比 R_f , 其值为

$$R_f = \text{破坏时的强度} / \text{强度的极限值} = (\sigma_1 - \sigma_3)_f / (\sigma_1 - \sigma_3)_u \quad (1.30)$$

根据试验, 土的 R_f 一般变化不大, 在 0.75 ~ 0.95 之间。

这样, 将式 (1.28) 和式 (1.30) 代入式 (1.26), 就可以得出当 σ_3 等于常数时的双曲线表达式:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon_1 R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}} \quad (1.31)$$

或

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{E_i \left[1 - \frac{R_f(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]} \quad (1.32)$$

按照切线模量 (E_i) 的定义, 对式 (1.31) 微分后并将式 (1.32) 代入, 可得

$$E_i = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \left[1 - \frac{R_f(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]^2 E_i \quad (1.33)$$

这就是切线模量 E_i 的表达式。式中 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 为现在的应力水平, R_f 因变化范围不大一般可事先假定给出, 其中尚有 E_i 和 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 待定。因为上面 $E_i = \frac{1}{a}$ 中 E_i 是在 σ_3 不变的情况下求得的, 而实际中 σ_3 是变化的。试验表明, E_i 随 σ_3 变化, 根据挪威学者詹布 (Janbu) 的研究, E_i 与固结压力 σ_3 的关系可用 Janbu 公式表示为

$$E_i = K_i p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (1.34)$$

式中: E_i 为模量系数, 为量纲一系数; n 为量纲一的模量指数; p_a 为大气压力或参考压力。

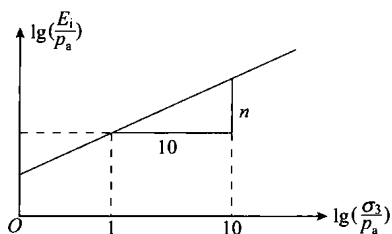


图 1.5 K_i, n 值的确定

将 E_i, σ_3 取的关系点绘在双对数纸上, 就可以求得 K_i 和 n 值 (图 1.5)。图中, n 为双对数图上直线的斜率, K_i 和 $\frac{\sigma_3}{p_a}$ 等于 1 所对应的 E_i 相对应, 但尚须换算。

$(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 可以由 Coulomb - Mohr 破坏条件确定如下:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (1.35)$$

将式 (1.34) 及式 (1.35) 代入式 (1.33), 可得

$$E_i = \left[1 - \frac{R_f(1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right]^2 K_i p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (1.36)$$

从式中可以看出, 要确定切线模量 E_i , 需要通过试验确定 φ, c, K_i, n 及 R_f 五个常数。

上述 E_i 是对加载而言的, 当卸载与再加载时, $\sigma - \varepsilon$ 关系接近直线, 这时弹性模量 E_{ur} 取决于侧限压力 σ_3 , 其关系与 Janbu 公式形式相同, 即

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (1.37)$$

式中: K_{ur} 及 n 分别为卸载、再加载时的模量系数与指数。其确定方法与式 (1.34) 的 K_i 及 n 的方法相同。

(2) 切线泊松比 μ_t 的确定

最初, 邓肯-张假设 ε_3 与 ε_1 的关系亦为双曲线, 即

$$\varepsilon_3 = \frac{h \varepsilon_1}{1 - d \varepsilon_1} \quad (1.38)$$

并假设