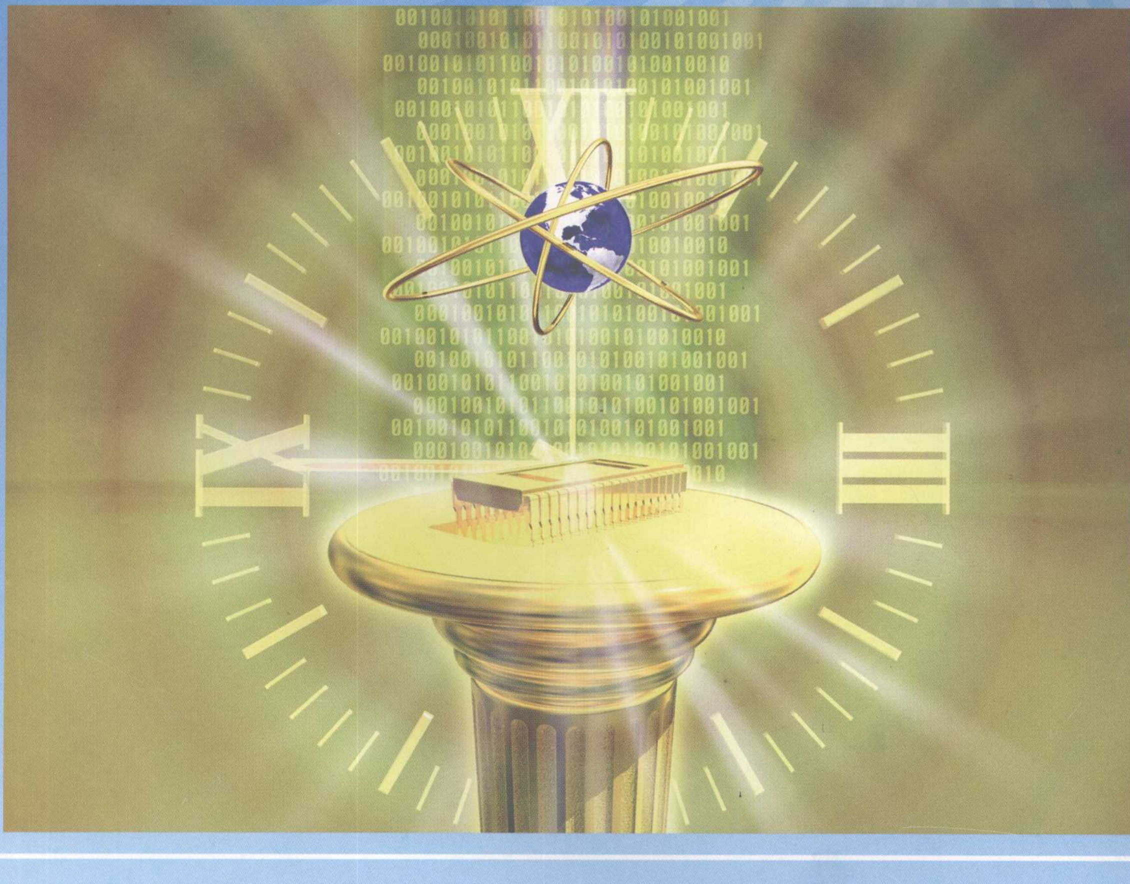
高中新课程导读丛书

数学必修5



湖南大学出版社

高中新课程导读丛书

数　学　必修5

主编：张　伟

编者：李尚辉　王志翔　何文理

梁新初　陈　谦

湖南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中新课程导读丛书·数学必修 5/ 张伟主编. —长沙：湖南大学出版社，2008. 8

ISBN 978—7—81113—449—0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 张… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料

Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 131723 号

高中新课程导读丛书·数学必修 5

Gaozhong Xinkecheng Daodu Congshu • Shuxue Bixiu Wu

主　　编：张　伟
责任编辑：厉　亚
特约编辑：朱郁森
封面设计：创艺工作室
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编**：410082
电　　话：0731—8821691（发行部），8821173（编辑室），8821006（出版部）
传　　真：0731—8649312（发行部），8822264（总编室）
电子邮箱：presszoub@hnu. cn
网　　址：http:// press. hnu. cn
印　　装：湖南新华印刷集团有限责任公司(邵阳)
开本：787×1092　16 开　　**印张**：8. 25　　**字数**：201 千
版次：2008 年 8 月第 1 版　　**印次**：2008 年 8 月第 1 次印刷
书号：ISBN 978—7—81113—449—0/ G·363
定价：11. 60 元

前　言

屈指数来，自英国工程师培利（J. Perry，1854～1920）于1901年打响教改第一枪，至今已逾百年。进入21世纪，发生在中国的基础教育的课程改革，其涉及的人数之多，政府介入的力度之大，堪称世界之最。2004年秋季，广东、山东、海南、宁夏等省率先进入高中课程改革实验；2005年、2006年，江苏、福建等省依次跟进；湖南省也于2007年正式进入高中课改，再次掀起了课程改革的高潮。

新的课程理念为课堂注入了新的活力，也对教学提出了更高层次的要求。为与时俱进，把课程改革引向深入，我们组织了一批资深的特（高）级教师、教研员，针对高中新课程教材的各个模块，编写了《高中新课程导读丛书》。

本书为丛书中的《数学必修5》。本书在依据课标、植根课本、立足课堂、拓展创新的理念下，对新课标教材进行了教学法上的再创造。全书结构严格与现行教材匹配。每节设置了如下栏目：

课标解读

教材是学科教学的蓝本，《课标》是主导教材的灵魂。本栏对本节内容的《课标》要求进行了简明扼要的解读，旨在让学生领悟教学内容的精髓。

知识要点

这是一张“知识点”的清单，也是一个能力发展的基础平台。掌握了它，学生就拥有了一个知识结构，学什么？为什么？也就一清二楚了。

课程探究

这是本书最具特色的栏目之一。编者站在“引领者”的角度，对教学内容的重点和难点，既进行深入浅出的分析，又在学生可接受的前提下，沿着知识结构的“最近发展区”进行了合情的发散。

方法整合

这是本书内容的主体部分。它通过一系列立足基础、新意盎然的例题，辅之以精辟的解析，并提炼隐含于问题中的通性与通法，让学生能从方法论高度整合教材内容，形成能力结构。

课处延伸

这是本书内容的拓展部分，它通过一系列综合例题灵活的解法，使学生更

深入地掌握全面知识。

自主练习

这也是本书的一个特色栏目。栏目内容和教学内容相关，旨在为学生提供一个科学的训练平台。自主练习设基础夯实、能力养成、横向比读等板块。其目的是分层递进，夯实基础，强化能力，发展个性，拓宽视野。选题注重课内外相结合、构建知识与形成能力相结合、整体把握与构建知识模块相结合。它将引领学生从基点起步，以最快的速度攀升，直达能力发展的高峰。

本书意在引导学生以“探究者”的身份学习新课标高中教材。我们期待着读者读完此书后给予恰如其分的评价，并提出宝贵的意见、建议，以便再版时完善。

丛书编写组
2008 年 6 月

目　录

第一章　解三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

课标解读

在本章中，学生应该在已有知识的基础上，通过对任意三角形边角关系的探究，发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系，并认识到运用它们可以解决一些与测量和几何计算有关的实际问题. 对于一些常见的测量问题甚至可以鼓励自己设计应用的程序，得到在实际中可以直接应用的算法. 培养学生在方程思想指导下处理解三角形问题的运算能力；培养学生合情推理探索数学规律的数学思想能力，通过三角形函数、正弦定理、向量的数量积等知识间的联系来体现事物之间的普遍联系与辩证统一.

1.1.1　正弦定理

知识要点

1. 一般地，把三角形的 3 个角 A，B，C 和它们的对边 a，b，c 叫做三角形的元素. 由已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

2. 正弦定理：

形式一：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$；

形式二：$\sin A=\dfrac{a}{2R}$；$\sin B=\dfrac{b}{2R}$；$\sin C=\dfrac{c}{2R}$；（角到边的转换）

形式三：$a=2R\cdot\sin A$，$b=2R\cdot\sin B$，$c=2R\cdot\sin C$；（边到角的转换）

形式四：$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.（求三角形的面积）

解决以下两类问题：

（1）已知两角和任一边，求其他两边和一角；（唯一解）

（2）已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角（从而进一步求出其他的边和角）.

若给出 a，b，A，那么解的个数为：无解（$a<b\sin A$）；一解（$a=b\sin A$ 或者 $a\geqslant b\sin A$）；两解（$b\sin A<a<b$）.

课程探究

【例 1】 在$\triangle ABC$中，已知 $b=\sqrt{2}$，$c=1$，$B=45°$，求 a，A，C.

【分析】 已知两边及一边对角，先判断三角形的情况：由 $b>c$，$B=45°$，故有一解，先由正弦定理求角 C，然后再由三角形内角和定理求角 A，最后再用正弦定理求边 a.

解　∵ $b=\sqrt{2}$，$c=1$，$B=45°$，

由正弦定理得：

$$\sin C=\frac{c\cdot\sin B}{b}=\frac{1\times\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

由 $b>c$，$B=45^\circ$，可知 $C<B$，$\therefore\ C=30^\circ$.

又 $A+B+C=180^\circ$，

$\therefore\ A=180^\circ-(B+C)=105^\circ$.

再由正弦定理：

$$a=\frac{b\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\times\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

【评注】已知两边和其一边对角，若用正弦定理求解，则需判断解的情况.

【例 2】在$\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{3}$，$A=45^\circ$，$C=75^\circ$，求 BC 的长.

【分析】已知两角及一边，可以先由三角形内角和求另一角，再由正弦定理求另两边.

解　由三角形内角和定理得

$B=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$.

再由正弦定理，有

$$BC=\frac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}.$$

【例 3】在$\triangle ABC$中，已知 $\tan A=\frac{1}{2}$，$\tan B=\frac{1}{3}$，且最长边为 1，求：

(1) 角 C 的大小；

(2) $\triangle ABC$ 最短边的长.

解　(1) $\because\ \tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$

$$=-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=-1,$$

$\therefore\ C=\frac{3}{4}\pi$.

(2) $\because\ \tan A=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}=\tan B$，$C=\frac{3}{4}\pi$，

$\therefore\ C$ 为最大角，B 为最小角，$c=1$，最小边为 b 边，

又 $\tan B=\frac{1}{3}$，$\therefore\ \sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

由正弦定理，得 $b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【评注】“大边对大角，大角对大边”是我们判断边角大小时经常要用到的重要工具.

方法整合

【例 1】根据下列条件判断三角形 ABC 的形状：

（1）若 $a^2\tan B=b^2\tan A$；

（2）$b^2\sin^2 C+c^2\sin^2 B=2bc\cos B\cos C$；

（3）$b\sin B=c\sin C$，且 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$.

解　（1）由已知及正弦定理得

$$(2R\sin A)^2\frac{\sin B}{\cos B}=(2R\sin B)^2\frac{\sin A}{\cos A}\Rightarrow$$

$$2\sin A\cos A=2\sin B\cos B\Rightarrow \sin 2A=\sin 2B\Rightarrow$$

$$2A=2B\text{ 或 }2A=180^\circ-2B,$$

即 $A=B$，或 $A+B=90^\circ$.

所以△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

（2）由正弦定理得

$$\sin^2 B\sin^2 C=\sin B\sin C\cos B\cos C.$$

∵　$\sin B\sin C\neq 0$，∴　$\sin B\sin C=\cos B\cos C$，

即 $\cos(B+C)=0$，∴　$B+C=90^\circ$，$A=90^\circ$，

故△ABC 是直角三角形.

（3）由正弦定理得 $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{C}{2R}$，

∴　$b\cdot\dfrac{b}{2R}=c\cdot\dfrac{c}{2R}$，且$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$，

∴　$b^2=c^2$，且 $a^2=b^2+c^2$.

∴　△ABC 为等腰直角三角形.

【评注】解此类题的思想方法是：从条件出发，利用正余弦定理等进行代换、转化、化简、运算，将边角混合全化为角或者全化为边，直到得出边与边的关系或角与角的关系，从而作出正确的判断. 全化为角后常用模型是“$\sin 2A=\sin 2B$”，由此得到三角形为等腰三角形或直角三角形，要防止只得出三角形仅为等腰三角形的遗漏错误.

【例 2】△ABC 中，已知：$AB=2$，$BC=1$，$CA=\sqrt{3}$，分别在边 AB，BC，CA 上取点 D，E，F，使△DEF 是等边三角形（如图 1-1）. 设∠$FEC=\alpha$，问 $\sin\alpha$ 为何值时，△DEF 的边长最短？并求出最短边的长.

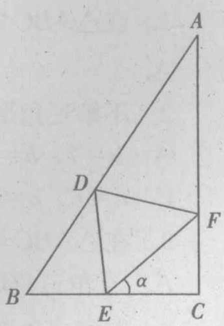


图 1-1

【分析】要求最短边的长，需建立边长关于角 α 的目标函数.

解　设△DEF 的边长为 x，显然 $C=90^\circ$，$B=60^\circ$，故 $EC=x\cdot\cos\alpha$. 因为∠$DEC=$∠$DEF+\alpha=$∠$EDB+B$，所以∠$EDB=\alpha$. 在△BDE 中，由正弦定理得，$\dfrac{x}{\sin 60^\circ}=\dfrac{BE}{\sin\alpha}$，

所以 $BE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot x\cdot\sin\alpha$，因为 $BE+EC=BC$，

所以 $x\cdot\cos\alpha+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot x\cdot\sin\alpha=1$，

所以　$x=\dfrac{1}{\cos\alpha+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\alpha+2\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\left[\dfrac{2}{\sqrt{7}}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\cos\alpha\right]}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sin(\alpha+\varphi)}$.

当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$x_{\min}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，此时 $\sin\alpha=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

【评注】 在三角形中，已知两角一边求其他边，自然应联想到正弦定理.

课外延伸

【例】 在△ABC 中，$B=60°$，$\tan A\cdot\tan C=2+\sqrt{3}$，又知顶点 C 的对边上的高等于 $4\sqrt{3}$，求三角形的三边的长.

解 ∵ $B=60°$，∴ $A+C=120°$，

又 $\tan(A+C)=\dfrac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\cdot\tan C}$，$\tan A\cdot\tan C=2+\sqrt{3}$，

∴ $\tan A+\tan C=3+\sqrt{3}$，

解得 $\tan A=1$，$\tan C=2+\sqrt{3}$ 或 $\tan A=2+\sqrt{3}$，$\tan C=1$，

∴ $A=45°$，$B=60°$，$C=75°$或 $A=75°$，$B=60°$，$C=45°$.

当 $A=45°$，$b=AC=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 45°}=4\sqrt{6}$，$a=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60°}=8$，

$c=4\sqrt{3}\cot 45°+4\sqrt{3}\cot 60°=4\sqrt{3}+4$.

当 $A=75°$，$b=AC=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 75°}=4\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$，$a=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 60°}=8$，

$c=4\sqrt{3}\cot 75°+4\sqrt{3}\cot 60°=8(\sqrt{3}-1)$.

【评注】 已知三角形的两边和其中一边的对角，三角形是不确定的，此类题型需特别注意判断解的个数，注意讨论.

自主练习

一、选择题

1. 在△ABC 中，若 $C=90°$，$a=6$，$B=30°$，则 $c-b$ 等于 （　　）.

A. 1　　B. -1　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $-2\sqrt{3}$

2. 不解三角形，确定下列判断中正确的是 （　　）.

A. $a=7$，$b=14$，$A=30°$有两解　　B. $a=30$，$b=25$，$A=130°$有一解

C. $a=6$，$b=9$，$A=45°$有两解　　D. $b=9$，$c=10$，$B=60°$无解

3. 在△ABC 中，角 A，B 均为锐角，且 $\cos A>\sin B$，则△ABC 的形状是 （　　）.

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形　　C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

4. 等腰三角形一腰上的高是 $\sqrt{3}$，这条高与底边的夹角为 60°，则底边长为 （　　）.

A. 2　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{3}$

5. 在△ABC 中，若 $b=2a\sin B$，则 A 等于 （　　）.

A. 30°或 60°　　B. 45°或 60°　　C. 120°或 60°　　D. 30°或 150°

6. 已知△ABC 中，$a=x$，$b=2$，$B=45°$，若三角形有两解，则 x 的取值范围是 （　　）.

A. $x>2$　　B. $x<2$　　C. $2<x<2\sqrt{2}$　　D. $2<x<2\sqrt{3}$

二、填空题

7. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$C=90^\circ$，则 $\sin A\sin B$ 的最大值是________.

8. 在$\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ$，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，则边长 $c=$________.

9. 在$\triangle ABC$ 中，若 $b=2$，$B=30^\circ$，$C=135^\circ$，则 $a=$________.

10. 在$\triangle ABC$ 中，若 $A:B:C=1:2:3$，则 $a:b:c=$________.

11. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$C=30^\circ$，则 $AC+BC$ 的最大值是________.

三、解答题

12. 已知$\triangle ABC$ 三内角正弦之比为 4∶5∶6，周长为 7.5，求该三角形三边之长.

13. 在$\triangle ABC$ 中，求证：$\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$.

14. 在$\triangle ABC$ 中，$a=10$，$b=5\sqrt{6}$，$A=45^\circ$. 解这个三角形.

1.1.2 余弦定理

知识要点

余弦定理：三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍. 即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

推论：

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}.$$

余弦定理及其推论的基本作用为：

（1）已知三角形的任意两边及它们的夹角就可以求出第三边；

（2）已知三角形的三条边就可以求出其他角.

余弦定理是勾股定理的推广，勾股定理是余弦定理的特例.

课程探究

【例 1】 在$\triangle ABC$中，已知$a=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$B=60°$，求b及A.

（1）**解** ∵ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 45°$

$=12+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=8.$

∴ $b=2\sqrt{2}$.

求A可以利用余弦定理，也可以利用正弦定理：

（2）**解法一** ∵ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times 2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2}$，

∴ $A=60°$.

解法二 ∵ $\sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\sin 45°$，

又∵ $\sqrt{6}+\sqrt{2}>2.4+1.4=3.8$，

$2\sqrt{3}<2\times1.8=3.6$，

∴ $a<c$，即$0°<A<90°$，

∴ $A=60°$.

【评注】 解法二应注意确定A的取值范围.

【例 2】 在$\triangle ABC$中，已知$a=7$，$b=5$，$c=3$，判断$\triangle ABC$的类型.

【分析】 由余弦定理可知

$a^2=b^2+c^2\Leftrightarrow A$是直角$\Leftrightarrow\triangle ABC$是直角三角形

$a^2>b^2+c^2\Leftrightarrow A$是钝角$\Leftrightarrow\triangle ABC$是钝角三角形

$a^2<b^2+c^2\Leftrightarrow A$是锐角$\not\Leftrightarrow\triangle ABC$是锐角三角形

（注意：A是锐角$\not\Leftrightarrow\triangle ABC$是锐角三角形）

解 ∵ $7^2>5^2+3^2$，即$a^2>b^2+c^2$，

∴ $\triangle ABC$是钝角三角形.

【例 3】 已知$\triangle ABC$中，$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$，求A，B，C.

【分析】 由于条件全是边的条件，因此可以考虑用余弦定理.

解 ∵ $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$. 可设$a=x$，$b=\sqrt{3}x$，$c=2x$，

由余弦定理得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3x^2+4x^2-x^2}{4\sqrt{3}x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $A=\frac{\pi}{6}$.

同理：$\cos B=\frac{1}{2}$，$\cos C=0$.

$\therefore\ B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ A=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{2}$.

【评注】本小题设出三边的长，应用余弦定理求解，是解题的关键.

方法整合

【例 1】已知$\triangle ABC$中，$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，解此三角形.

【分析】已知两边及一边对角用正弦定理当然可以解答，不过也可以用余弦定理来解.

解法一 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得

$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}\sin 45^\circ}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\because\ a>b$，$\therefore\ A>B$，$\therefore\ A=60^\circ$ 或 120°.

当$A=60^\circ$时，得$C=75^\circ$，

由正弦定理得：$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

当$A=120^\circ$时，得$C=15^\circ$，

由正弦定理得：$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

解法二 由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$ 得

$2=3+c^2-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}c$，

解得 $c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 或 $c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

当 $c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 时，由余弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}，\therefore\ A=60^\circ.$$

此时$C=75^\circ$.

当 $c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$时，由余弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}，\therefore\ A=120^\circ，$$

此时$C=15^\circ$.

【评注】解三角形时往往同时用到正弦定理与余弦定理，此时要根据题目条件选择先使用哪个定理；一般地，使用正、余弦定理求边，使用余弦定理求角. 若使用正弦定理求角有时要讨论解的个数问题.

【例 2】$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别是a，b，c，已知a，b，c成等比数列，

且 $\cos B=\frac{3}{4}$.

(1) 求 $\cot A+\cot C$ 的值；

(2) 设 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}$，求 $a+c$ 的值.

解　(1) 由 $\cos B=\frac{3}{4}$ 得 $\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

由 $b^2=ac$ 及正弦定理得 $\sin^2 B=\sin A\sin C$,

$$\text{于是 } \cot A+\cot C=\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A\sin C+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}$$

$$=\frac{\sin(A+C)}{\sin^2 B}=\frac{\sin B}{\sin^2 B}=\frac{1}{\sin B}=\frac{4}{7}\sqrt{7}.$$

(2) 由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}$ 得 $ca\cdot\cos B=\frac{3}{2}$，由 $\cos B=\frac{3}{4}$ 可得 $ca=2$，即 $b^2=2$.

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$ 得 $a^2+c^2=b^2+2ac\cdot\cos B=5$,

$$(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=5+4=9,$$

$\therefore\ a+c=3$.

【例 3】 设三角形三边的长是 3 个连续整数，最大角是最小角的 2 倍，求最小角的余弦值.

解　设三角形的三边依次为 a，$a+1$，$a+2$，最小角为 β，最大角为 2β.

由正弦定理得 $\frac{2+a}{\sin 2\beta}=\frac{a}{\sin\beta}$，化简得：$\cos\beta=\frac{a+2}{2a}$，　①

又由余弦定理得 $\cos\beta=\frac{(a+1)^2+(a+2)^2-a^2}{2(a+1)(a+2)}$，　②

由①②联立解得：$a=4$，因此，$\cos\beta=\frac{3}{4}$.

【评注】 做此类题不光要用到正、余弦定理，更要有方程思想，这样才能把问题解决.

课外延伸

【例 1】　已知等腰△ABC 的腰为底的 2 倍，求顶角 A 的正切值.

【分析】 先用余弦定理求出 A 解的余弦，再求正弦，最后求正切.

解　设底边长为 a，则腰长为 $2a$,

由余弦定理得 $\cos A=\frac{4a^2+4a^2-a^2}{2\times 2a\times 2a}=\frac{7}{8}$.

$\because\ \sin^2 A+\cos^2 A=1$，且 $0<A<\pi$，$\therefore\ \sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$\therefore\ \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{15}}{7}$.

【例 2】 在△ABC 中，记 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，若 $9a^2+9b^2-19c^2=0$，则 $\frac{\cot C}{\cot A+\cot B}=$______.

解　由正弦定理 $\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}$，$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}$，由余弦定理 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以

$$\frac{\cot C}{\cot A+\cot B}=\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C}{\sin(A+B)\cdot\sin C}=\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C}{\sin^2 C\cdot}=\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{19}{9}c^2-c^2}{2c^2}=$$

$\frac{5}{9}$. 应填$\frac{5}{9}$.

【评注】2个定理可以实现将"边、角混合"的等式转化成"边或角的单一"等式，这样有利于解题.

【例3】在$\triangle ABC$中，设$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c-b}{b}$，求$A$的值.

解 $\because$ $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c-b}{b}$，根据正弦定理得

$\frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\frac{2\sin C-\sin B}{\sin B}$，

$\therefore$ $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$，

$\therefore$ $\sin(A+B)=2\sin C\cos A$，

$\therefore$ $\sin C=2\sin C\cos A\Rightarrow\cos A=\frac{1}{2}\Rightarrow A=60°$.

【评注】此题既可把条件等式右边的边全化角，也可以把条件等式左边的角用正、余弦定理全化边，同样可以得到结果.

自主练习

一、选择题

1. 在$\triangle ABC$中，$a:b:c=1:2:\sqrt{6}$，则最大角的余弦值等于 （ ）.

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 在$\triangle ABC$中，若角B为钝角，则$\sin B-\sin A$的值 （ ）.

A. 大于零　　B. 小于零　　C. 等于零　　D. 不能确定

3. 在$\triangle ABC$中，若$A=2B$，则a等于 （ ）.

A. $2b\sin A$　　B. $2b\cos A$　　C. $2b\sin B$　　D. $2b\cos B$

4. 在$\triangle ABC$中，若$\lg(\sin A)-\lg(\cos B)-\lg(\sin C)=\lg 2$，则$\triangle ABC$的形状是 （ ）.

A. 直角三角形　　B. 等边三角形　　C. 不能确定　　D. 等腰三角形

5. 在$\triangle ABC$中，若$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$，则$A=$ （ ）.

A. 90°　　B. 60°　　C. 135°　　D. 150°

6. 在$\triangle ABC$中，若$a=7$，$b=8$，$\cos C=\frac{13}{14}$，则最大角的余弦是 （ ）.

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{7}$　　D. $-\frac{1}{8}$

二、填空题

7. 若A，B是锐角三角形的两内角，则$\tan A\tan B$ ______ 1（填>或<）.

8. 在$\triangle ABC$中，若$\sin A=2\cos B\cos C$，则$\tan B+\tan C=$ ________.

9. 在$\triangle ABC$中，若$a=9$，$b=10$，$c=12$，则$\triangle ABC$的形状是 ________

10. 在$\triangle ABC$中，若$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，则$A=$__________.

11. 在锐角$\triangle ABC$中，若$a=2$，$b=3$，则边长c的取值范围是__________.

三、解答题

12. 在$\triangle ABC$中，若$A+B=120°$，求证：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}=1$.

13. 在$\triangle ABC$中，若$a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3b}{2}$，求证：$a+c=2b$.

1.2 应用举例

知识要点

1. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些有关测量距离的实际问题，了解常用的测量相关术语. 在测量中根据测量需要适当确定的线段叫做基线. 在测量过程中，要根据实际需要选取合适的基线长度，使测量具有较高的精确度. 一般来说，基线越长，测量的精确度越高.

2. 能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些有关底部不可到达的物体高度测量的问题.

3. 掌握三角形的面积公式.

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B.$$

课程探究

【例1】已知圆内接四边形$ABCD$的边长分别为$AB=2$，$BC=6$，$CD=DA=4$，求四边形$ABCD$的面积.

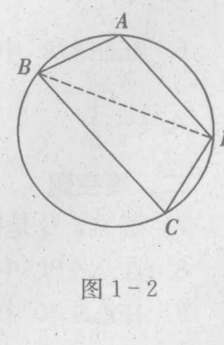


图1-2

【分析】如图1-2，连接对角线BD，将四边形面积转化为三角形面积来求，而要求三角形面积，需求出A，C，这可由余弦定理列方程求得.

解 因为四边形$ABCD$是圆内接四边形，所以$A+C=180°$，所以$\sin A=\sin C$. 连接BD，则四边形$ABCD$的面积$S=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=$

$\frac{1}{2}(AB \cdot AD+BC \cdot CD) \cdot \sin A=16\sin A$. 由余弦定理，在$\triangle ABD$中，$BD^2=AB^2+AD^2-2AB \cdot AD \cdot \cos A=20-16\cos A$， ① 在$\triangle CDB$中，$BD^2=CB^2+CD^2-2CB \cdot CD \cdot \cos C=52-48\cos C$. ②

∵ $A+C=180°$，∴ $\cos C=-\cos A$.

①－②得 $\cos A=-\frac{1}{2}$，∴ $A=120°$.

∴ $S=16\times\sin 120°=8\sqrt{3}$.

【评注】 在应用正弦定理解题时要注意方程思想的运用.

【例 2】 某巡逻艇在A处发现北偏东$45°$相距 9 n mile 的C处有一艘走私船，正沿南偏东$75°$的方向以 10 n mile/h 的速度向我海岸行驶，巡逻艇立即以 14 n mile/h 的速度沿着直线方向追去，问巡逻艇应该沿什么方向去追？需要多少时间才追赶上该走私船？

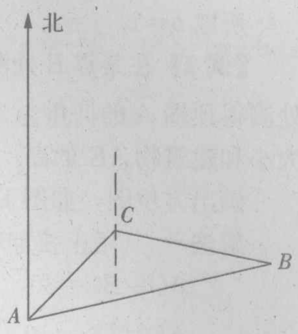


图 1－3

【分析】 这道题的关键是做图建立数学模型后，再计算出三角形的各边，即需要引入时间这个参变量.

解 如图 1－3，设该巡逻艇沿AB方向经过x h 后在B处追上走私船，则$CB=10x$，$AB=14x$，$AC=9$，

$\angle ACB=75°+45°=120°$，

∴ $(14x)^2=9^2+(10x)^2-2\times9\times10x\cos 120°$，

∴ 化简得$32x^2-30x-27=0$，即$x=\frac{3}{2}$或$x=-\frac{9}{16}$(舍去).

∴ $BC=10x=15$，$AB=14x=21$，

又∵ $\sin\angle BAC=\frac{BC\sin 120°}{AB}=\frac{15}{21}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

∴ $\angle BAC=38°13'$或$\angle BAC=141°47'$（钝角不合题意，舍去)，

∴ $38°13'+45°=83°13'$.

答：巡逻艇应该沿北偏东$83°13'$方向去追，经过 1.4 h 才追赶上该走私船.

【评注】 在求解三角形中，我们可以根据正弦函数的定义得到 2 个解，但作为有关现实生活的应用题，必须检验上述所求的解是否符合实际意义，从而得出实际问题的解.

【例 3】 在$\triangle ABC$中，求证：

$$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0.$$

解 因为
$$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=\frac{(2R\sin A)^2-(2R\sin B)^2}{\cos A+\cos B}$$
$$=\frac{4R^2[(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)]}{\cos A+\cos B}$$
$$=\frac{4R^2(\cos^2 B-\cos^2 A)}{\cos A+\cos B}=4R^2(\cos B-\cos A)，$$

同理$\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}=4R^2(\cos C-\cos B)$，

$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=4R^2(\cos A-\cos C)$，