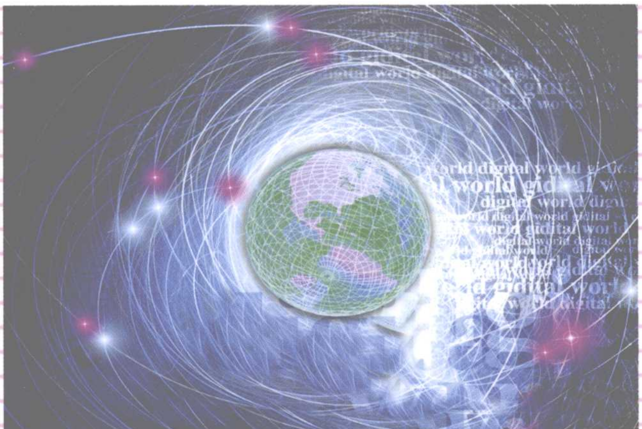
21世纪高等学校规划教材

GAI LU LUN YU SHU LI TONG JI

概率论与数理统计

GAI LU LUN YU
SHU LI TONG JI



谢永钦 主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

GAI LU LUN YU SHU LI TONG JI

21世纪高等学校规划教材

概率论与数理统计

主　编　　谢永钦

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本书介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本理论与方法. 内容包括：概率论基本概念、随机变量与多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析. 每章均配有习题，书后附有习题答案，习题中收集了多届研究生考试试题，既便于教学，又利于考研复习. 本书可作为高等理工科院校（非数学专业）及师范院校概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/谢永钦主编. —北京：北京邮电大学出版社，2009

ISBN 978－7－5635－1656－8

Ⅰ. 概… Ⅱ. 谢… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 029869 号

书　　名	概率论与数理统计
主　　编	谢永钦
责任编辑	付小霞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010－62282185(发行部)　010－62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京忠信诚胶印厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	15.5
字　　数	322 千字
版　　次	2009 年 4 月第 1 版　2009 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5635－1656－8　　定价：23.00 元

前　言

数学是一门重要而应用广泛的学科，被誉为锻炼思维的体操和人类智慧之冠上最明亮的宝石.不仅如此，数学还是各类科学和技术的基础，它的应用几乎涉及所有的学科领域，对于世界文化的发展有着深远的影响.高等学校作为培育人才的摇篮，其数学课程的开设也就具有特别重要的意义.

近年来，随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，高等教育进入了一个飞速发展时期，已经突破了以前的精英式教育模式，发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造和再创性的基础学科教育.高等学校教育教学观念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大，数学课程开设的专业覆盖面也不断增大.为了适应这一发展需要，众多高校的数学教师多次研究讨论，经多次修改，完成了本教材的编写.

本教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的，也可为各类需要提高数学素质和能力的人员使用.教材中，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性.习题中划横线以下的题是往届研究生入学考试题和较难的题，对非考研学生不作要求.

本教材的主要内容有：概率论的基本概念、随机变量、多维随机变量、随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等.

本教材由谢永钦主编，参加讨论和编写的人员有陈新美、韩旭里、梁小林、秦桂香、杨韵生、晏小兵、岳月梅、张宏伟、赵人可、赵晓芹等.在教材编写过程中，一些一线教师提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢.

教材中难免有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见.

编　者

目　录

第一章 概率论的基本概念

在自然界以及生产实践和科学实验中，人们观察到的现象大体可归结为两类现象：一类是在一定条件下必然发生或必然不发生的现象.例如，“纯水在一个标准大气压下温度持续达到100℃时必然沸腾”是必然发生的现象，“同性电荷相互吸引”是必然不发生的现象，等等.这类现象统称为确定性现象或必然现象.另一类现象，它们在一定条件下，可能出现多种不同的结果，而究竟出现哪一种结果，事先又不能完全确定.此类现象称为随机现象或偶然现象.例如，测量一个物体的长度，其测量误差的大小；从一批电视机中随便取一台，被选取的这台电视机的寿命长短等都是随机现象.

这里我们注意到，随机现象是与一定的条件密切联系的.例如，在城市交通网中的某一路口，指定的一小时内，汽车流量的多少就是一个随机现象，而“指定的一小时内”就是条件，若换成2 h内，5 h内，流量就会不同.如将汽车的流量换成自行车流量，差别就会更大，故随机现象与一定的条件是有密切联系的.随机现象在某种条件下实现时，出现什么结果呈现出偶然性(或称随机性)，从表面上看似乎是不可捉摸的.实际上并不是这样，人们通过长期的观察和实践发现，随机现象发生时出现哪种结果，虽然事前不能预言，却呈现出一种固有的规律性，这种规律性称为统计规律性.例如，大量重复地抛掷质地均匀对称的硬币时，出现正面向上和出现反面向上的比例总是接近一比一的.概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门基础学科，它从数量角度给出随机现象的描述，为人们认识和利用随机现象的规律性提供了有力的工具.因此概率论与数理统计这门学科应用相当广泛，几乎渗透到所有科学技术领域，工业、农业、国防与国民经济的各个部门都要用到它.例如，在工业生产中，人们应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品的抽样检查等.还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预报等.另外，概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透，产生了各种边缘性的应用学科，如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等.

第一节 样本空间、随机事件

1. 随机试验

人们是通过试验去研究随机现象的，为对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为

试验. 若一个试验具有下列 3 个特点：

1）**可以在相同的条件下重复地进行；**

2）**每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验所有可能出现的结果；**

3）**进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现，**

则称这一试验为随机试验(random trial)，记为 E.

下面举一些随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况.

E_2：掷两颗骰子，观察出现的点数.

E_3：在一批电视机中任意抽取一台，测试它的使用寿命.

E_4：城市某一交通路口，指定 1 h 内的汽车流量.

E_5：记录某一地区一昼夜的最高温度和最低温度.

2. 样本空间与随机事件

在一个试验中，不论可能的结果有多少，总可以从中找出一组基本结果，满足：

1）**每进行一次试验，必然出现且只能出现其中的一个基本结果；**

2）**任何结果，都是由其中的一些基本结果所组成.**

随机试验 E 的所有基本结果组成的集合称为样本空间(sample space)，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个基本结果，称为样本点.

下面写出前面提到的试验 $E_k(k=1,2,3,4,5)$ 的样本空间 Ω_k：

Ω_1：$\{H,T\}$；

Ω_2：$\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$；

Ω_3：$\{t\mid t\geqslant 0\}$；

Ω_4：$\{0,1,2,3,\cdots\}$；

Ω_5：$\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1.

随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件(random event)，简称事件①，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在掷骰子的试验中，可以用 A 表示“出现点数为偶数”这个事件，若试验结果是“出现 6 点”，就称事件 A 发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$，$\{T\}$；试验 E_2 有 36 个基本事件 $\{(1,1)\}$，$\{(1,2)\}$，$\cdots$，$\{(6,6)\}$.

---

① 严格地说，事件是指 Ω 中满足某些条件的子集. 当 Ω 是由有限个元素或由无穷可数个元素组成时，每个子集都可作为一个事件. 若 Ω 是由无穷不可数个元素组成时，某些子集必须排除在外. 幸而这种不可容许的子集在实际应用中几乎不会遇到. 今后，我们讲的事件都是指它是容许考虑的那种子集.

每次试验中都必然发生的事件,称为必然事件.样本空间Ω包含所有的样本点,它是Ω自身的子集,每次试验中都必然发生,故它就是一个必然事件.因而必然事件我们也用Ω表示.在每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件.空集$\varnothing$不包含任何样本点,它作为样本空间的子集,在每次试验中都不可能发生,故它是一个不可能事件.因而不可能事件我们也用$\varnothing$表示.

3. 事件之间的关系及其运算

事件是一个集合,因而事件之间的关系与运算可以用集合之间的关系与集合的运算来处理.

下面我们讨论事件之间的关系及运算.

1) **如果事件A发生必然导致事件B发生,则称事件A包含于事件B(或称事件B包含事件A),记作$A\subset B$(或$B\supset A$).**

$A\subset B$的一个等价说法是,如果事件B不发生,则事件A必然不发生.

若$A\subset B$且$B\subset A$,则称事件A与B相等(或等价),记为$A=B$.

为了方便起见,规定对于任一事件A,有$\varnothing\subset A$.显然,对于任一事件A,有$A\subset\Omega$.

2) **"事件A与B中至少有一个发生"的事件称为A与B的并(和),记作$A\cup B$.**

由事件并的定义,立即得到:

对任一事件A,有

$$A\cup\Omega=\Omega;\quad A\cup\varnothing=A.$$

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个事件发生"这一事件.

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示"可数无穷多个事件$A_i$中至少有一个发生"这一事件.

3) **"事件A与B同时发生"的事件称为A与B的交(积),记作$A\cap B$或AB.**

由事件交的定义,立即得到:

对任一事件A,有

$$A\cap\Omega=A;\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_i$表示"$B_1,\cdots,B_n$这$n$个事件同时发生"这一事件.

$B=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}B_i$表示"可数无穷多个事件$B_i$同时发生"这一事件.

4) **"事件A发生而B不发生"的事件称为A与B的差,记作$A-B$.**

由事件差的定义,立即得到:

对任一事件A,有

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;\quad A-\Omega=\varnothing.$$

5) **如果两个事件A与B不可能同时发生,则称事件A与B为互不相容(互斥),记作$A\cap B=\varnothing$.**

显然基本事件之间是互不相容的. 如果一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个事件都是互不相容的,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容.

6) **若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件). A 的逆事件记为 $\overline{A}$,$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件,它表示"A 不发生"这样一个事件. 显然 $\overline{A}=\Omega-A$.**

在一次试验中,若 A 发生,则 $\overline{A}$ 必不发生(反之亦然),即在一次试验中,A 与 $\overline{A}$ 两者只能发生其中之一,并且必然发生其中之一. 显然有 $\overline{\overline{A}}=A$.

对立事件必为互不相容事件,然而,互不相容事件未必为对立事件.

以上事件之间的关系及运算可以用文氏(Venn)图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω,矩形内的点表示样本点,圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B,则 A 与 B 的各种关系及运算如下列各图所示(见图 1-1~图1-6).

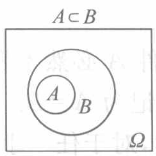


图 1-1

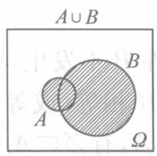


图 1-2

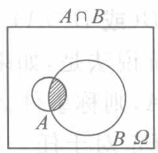


图 1-3

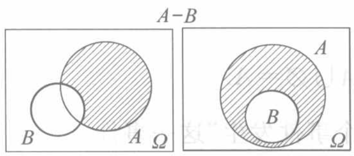


图 1-4

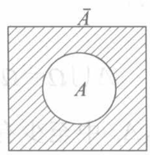


图 1-5

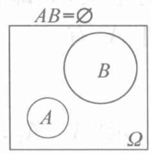


图 1-6

可以验证一般事件的运算满足如下关系:

1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$;

2) **结合律**　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

3) **分配律**　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

分配律可以推广到有穷或可数无穷的情形,即

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),\quad A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i);$$

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i),\quad A\cup(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i).$$

4) $A-B=A\overline{B}=A-AB$;

5) **对有穷个或可数无穷个 A_i,恒有**

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例 1.1 设 A,B,C 为 3 个事件，用 A,B,C 的运算式表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生：$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2) A,B 都发生而 C 不发生：$AB\overline{C}$或 $AB-C$.

(3) A,B,C 至少有一个事件发生：$A\cup B\cup C$.

(4) A,B,C 至少有两个事件发生：$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

(5) A,B,C 恰好有两个事件发生：$(AB\overline{C})\cup(AC\overline{B})\cup(BC\overline{A})$.

(6) A,B,C 恰好有一个事件发生：$(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(B\overline{A}\,\overline{C})\cup(C\overline{A}\,\overline{B})$.

(7) A,B 至少有一个发生而 C 不发生：$(A\cup B)\overline{C}$.

(8) A,B,C 都不发生：$\overline{A\cup B\cup C}$或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 1.2 在数学系的学生中任选一名学生. 若事件 A 表示被选学生是男生，事件 B 表示该生是三年级学生，事件 C 表示该生是运动员.

(1) 叙述 $AB\overline{C}$的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立？

(3) 在什么条件下 $\overline{A}\subset B$ 成立？

解 (1) 该生是三年级男生，但不是运动员.

(2) 全系运动员都是三年级男生.

(3) 全系女生都在三年级.

例 1.3 设事件 A 表示"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，求其对立事件 $\overline{A}$.

解 设 $B=$"甲种产品畅销"，$C=$"乙种产品滞销"，则 $A=BC$，故

$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=$"甲种产品滞销或乙种产品畅销".

第二节 概率、古典概型

除必然事件与不可能事件外，任一随机事件在一次试验中都有可能发生，也有可能不发生. 人们常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小. 为此，我们首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而我们再导出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1. 频率

定义 1.1 设在相同的条件下，进行了 n 次试验. 若随机事件 A 在 n 次试验中发生了 k 次，则比值$\dfrac{k}{n}$称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率(frequency)，记作 $f_n(A)=\dfrac{k}{n}$.

由定义 1.1 容易推知，频率具有以下性质：

1)　**对任一事件 A，有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；**

2)　**对必然事件 Ω，有 $f_n(\Omega)=1$；**

3)　**若事件 A,B 互不相容，则**

$$f_n(A \cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

一般地，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} f_n(A_i).$$

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 表示 A 发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生就越频繁，在一次试验中，A 发生的可能性也就越大. 反之亦然. 因而，直观的想法是用 $f_n(A)$ 表示 A 在一次试验中发生可能性的大小. 但是，由于试验的随机性，即使同样是进行 n 次试验，$f_n(A)$ 的值也不一定相同. 但大量实验证实，随着重复试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某个常数附近，而发生较大偏离的可能性很小. 随机事件的频率的这一性质就是所谓的频率稳定性. 频率具有"稳定性"这一事实，说明了刻画事件 A 发生可能性大小的数——概率具有一定的客观存在性①.

历史上有一些著名的试验，德·摩根(De Morgan)、蒲丰(Buffon)和皮尔逊(Pearson)曾进行过大量掷硬币试验，所得结果如表 1-1 所示.

表 1-1

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面的频率
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可见，出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数增加，它逐渐稳定于 0.5. 这个数 0.5 就反映正面出现的可能性的大小.

每个事件都存在着一个这样的常数与之对应，因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋向稳定的这个常数定义为事件 A 发生的概率. 这就是概率的统计定义.

定义 1.2　设事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 k，当 n 很大时，频率 $\frac{k}{n}$ 在某一数值 p 的附近摆动，而随着试验次数 n 的增加，发生较大摆动的可能性越来越小，则称数 p 为事件 A 发生的概率，记作 $P(A)=p$.

要注意的是，上述定义并没有提供确切计算概率的方法，因为我们永远不可能依据它确

①　严格说来，这是一个理想的模型，因为我们在实际上并不能绝对保证在每次试验时，条件都保持完全一样，这只是一个理想的假设.

切地定出任何一个事件的概率. 在实际中,我们不可能对每一个事件都做大量的试验,况且我们不知道 n 要取多大才行. 如果 n 取很大,不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有理由认为,取试验次数为 $n+1$ 来计算出的频率,总会比取试验次数为 n 来计算出来的频率会更准确、更逼近所求的概率.

为了理论研究的需要,我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发,给出概率的公理化定义.

2. 概率的公理化定义

定义 1.3 设 Ω 为样本空间,A 为事件,对于每一个事件 A 赋予一个实数,记作 $P(A)$,如果 $P(A)$满足以下条件:

1) **非负性**:$P(A)\geqslant 0$;

2) **规范性**:$P(\Omega)=1$;

3) **可数可加性:对于两两互不相容的可数无穷多个事件** $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,**有**

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称实数 $P(A)$为事件 A 的概率(probability).

在第五章中将证明,当 $n\to\infty$时,频率 $f_n(A)$在一定意义下接近于概率$P(A)$. 基于这一事实,我们就有理由用概率 $P(A)$来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

由概率公理化定义,可以推出概率的一些性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证 令
$$A_1=\Omega, A_n=\varnothing \quad (n=2,3,\cdots),$$
则
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\Omega, \quad 且\ A_iA_j=\varnothing \quad (i\neq j, i,j=1,2,\cdots).$$
由概率的可数可加性及规范性得

$$1=P(\Omega)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=1+\sum_{n=2}^{\infty} P(\varnothing),$$

故
$$\sum_{n=2}^{\infty} P(\varnothing)=0.$$
而由 $P(\varnothing)\geqslant 0$ 及上式知 $P(\varnothing)=0$.

这个性质说明:不可能事件的概率为 0. 但逆命题不一定成立,我们将在第二章中加以说明.

性质 2(有限可加性) **若** $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **为两两互不相容事件,则有**

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则 $A_iA_j=\varnothing$. 当 $i\neq j, i,j=1,2,\cdots$时,由可数可加性,得

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

性质 3　设 A,B 为两事件，

(i) $P(B-A)=P(B)-P(AB)$；

(ii) 若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

且

$$P(A)\leqslant P(B).$$

证　(i) 由 $AB\subset B$，知 $B=(AB)\cup(B-A)$ 且 $(AB)\cap(B-A)=\varnothing$. 再由概率的有限可加性有

$$P(B)=P((AB)\cup(B-A))=P(AB)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(AB);$$

(ii) 若 $A\subset B$，则 $AB=A$，$P(AB)=P(A)$，故

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

又由 $P(B-A)\geqslant 0$，得 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 4　对任一事件 A，$P(A)\leqslant 1$.

证　因为 $A\subset\Omega$，由性质 3 得 $P(A)\leqslant P(\Omega)=1$.

性质 5　对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

证　因为 $\overline{A}\cup A=\Omega$，$\overline{A}\cap A=\varnothing$，由有限可加性，得

$$1=P(\Omega)=P(\overline{A}\cup A)=P(\overline{A})+P(A),$$

即

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 6（加法公式）　对于任意两个事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证　因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$ 且 $A\cap(B-AB)=\varnothing$. 由性质 2、性质 3 得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A\cup(B-AB))\\&=P(A)+P(B-AB)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

性质 6 还可推广到 3 个事件的情形. 例如，设 A_1,A_2,A_3 为任意 3 个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意 n 个事件，可由归纳法证得

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+$$

$$(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1.4 设 A,B 为两事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.1$，求：

(1) A 发生但 B 不发生的概率；

(2) A 不发生但 B 发生的概率；

(3) 至少有一个事件发生的概率；

(4) A,B 都不发生的概率；

(5) 至少有一个事件不发生的概率.

解 (1) $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4$；

(2) $P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=0.2$；

(3) $P(A\cup B)=0.5+0.3-0.1=0.7$；

(4) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$；

(5) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.1=0.9$.

3. 古典概型

定义 1.4 若随机试验 E 满足以下条件：

1) **试验的样本空间 Ω 只有有限个样本点，即**

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}；$$

2) **试验中每个基本事件的发生是等可能的，即**

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}),$$

则称此试验为古典概型，或称为等可能概型.

由定义可知 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$ 是两两互不相容的，故有

$$1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\})=P(\{\omega_1\})+\cdots+P(\{\omega_n\}).$$

又每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}),$$

故

$$1=nP(\{\omega_i\}),$$

从而

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

设事件 A 包含 k 个基本事件，即

$$A=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\},$$

则有

$$P(A)=P(\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\})=P(\{\omega_{i_1}\})+P(\{\omega_{i_2}\})+\cdots+P(\{\omega_{i_k}\})$$

$$=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{k\text{个}}=\frac{k}{n}.$$

由此，得到古典概型中事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}. \tag{1-1}$$

称古典概型中事件 A 的概率为古典概率. 一般地，可利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识计算 k 和 n，进而求得相应的概率.

例 1.5　将一枚硬币抛掷 3 次，求：

(1) 恰有一次出现正面的概率；

(2) 至少有一次出现正面的概率.

解　将一枚硬币抛掷 3 次的样本空间

$$\Omega=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}.$$

Ω 中包含有限个元素，且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同.

(1) 设 A 表示"恰有一次出现正面"，则

$$A=\{HTT,THT,TTH\},$$

故有

$$P(A)=\frac{3}{8}.$$

(2) 设 B 表示"至少有一次出现正面"，由 $\overline{B}=\{TTT\}$，得

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

当样本空间的元素较多时，我们一般不再将 Ω 中的元素一一列出，而只需分别求出 Ω 中与 A 中包含的元素的个数(即基本事件的个数)，再由(1-1)式求出 A 的概率.

例 1.6　一口袋装有 6 个球，其中 4 个白球，2 个红球. 从袋中取球两次，每次随机地取一个. 考虑两种取球方式：

(a) 第一次取一个球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再任取一球. 这种取球方式叫做有放回抽取.

(b) 第一次取一球后不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一球. 这种取球方式叫做不放回抽取.

试分别就上面两种情形求：

(1) 取到的两个球都是白球的概率；

(2) 取到的两个球颜色相同的概率；

(3) 取到的两个球中至少有一个是白球的概率.

解　(a)有放回抽取的情形：

设 A 表示事件"取到的两个球都是白球"，B 表示事件"取到的两个球都是红球"，C 表示事件"取到的两个球中至少有一个是白球"，则 $A\cup B$ 表示事件"取到的两个球颜色相同"，而 $C=\overline{B}$.

在袋中依次取两个球，每一种取法为一个基本事件，显然此时样本空间中仅包含有限个元素，且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同，因而可利用(1-1)式来计算事件的概率.

第一次从袋中取球有 6 个球可供抽取，第二次也有 6 个球可供抽取. 由乘法原理知共有 6×6 种取法，即基本事件总数为 6×6. 对于事件 A 而言，由于第一次有 4 个白球可供抽取，第二次也有 4 个白球可供抽取，由乘法原理知共有4×4种取法，即 A 中包含 4×4 个元素. 同理，B 中包含 2×2 个元素，于是

$$P(A)=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9},$$

$$P(B)=\frac{2\times2}{6\times6}=\frac{1}{9}.$$

由于 $AB=\varnothing$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9},$$

$$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{8}{9}.$$

(b)不放回抽取的情形：

第一次从 6 个球中抽取，第二次个能从剩下的 5 个球中抽取，故共有 6×5 种取法，即样本点总数为 6×5. 对于事件 A 而言，第一次从 4 个白球中抽取，第二次从剩下的 3 个白球中抽取，故共有 4×3 种取法，即 A 中包含 4×3 个元素，同理 B 中包含 2×1 个元素，于是

$$P(A)=\frac{4\times3}{6\times5}=\frac{\mathrm{P}_4^2}{\mathrm{P}_6^2}=\frac{2}{5},$$

$$P(B)=\frac{2\times1}{6\times5}=\frac{\mathrm{P}_2^2}{\mathrm{P}_6^2}=\frac{1}{15}.$$

由于 $AB=\varnothing$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15},$$

$$P(C)=1-P(B)=\frac{14}{15}.$$

在不放回抽取中，一次取一个，一共取 m 次也可看作一次取出 m 个，故本例中也可用组合的方法，得

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{2}{5},$$

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_6^2}=\frac{1}{15}.$$

例 1.7 箱中装有 a 个白球，b 个黑球，现作不放回抽取，每次一个. 求：

(1) 任取 $m+n$ 个，恰有 m 个白球，n 个黑球的概率($m\leqslant a,n\leqslant b$)；

(2) 第 k 次才取到白球的概率($k\leqslant b+1$)；

(3) 第 k 次恰取到白球的概率.

解 (1)可看作一次取出 $m+n$ 个球，与次序无关，是组合问题. 从 $a+b$ 个球中任取