高等数学解题思想分析与研究

编著：翁莉娟　熊令纯

原子能出版社

高等数学解题思想分析与研究

编著：翁莉娟　熊令纯

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题思想分析与研究 / 翁莉娟,熊令纯编著.
北京:原子能出版社,2008.6

ISBN 978-7-5022-3817-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.①翁…②熊…　Ⅲ.高等数学—解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 094530 号

高等数学解题思想分析与研究

出版发行	原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号　100037)
责任编辑	张　琳
特约策划	师　潭
封面设计	王大龙
印　　刷	北京长阳汇文印刷厂
经　　销	全国新华书店
开　　本	850×1168 毫米　1/32
印　　张	12
版　　次	2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5022-3817-9
定　　价	18.00 元

　网址:http://www.aep.com.cn

前　言

《高等数学》是高等学校理工科各专业的一门基础理论课。它不仅是理工科学生的必修课，而且是考研的必考课程。《高等数学》的理论、思想和方法在自然科学和社会科学的各个领域有着广泛的应用。因此《高等数学》在教学、科研乃至社会活动实践中有着特别重要的地位。

本书在多年教学实践的基础上，为正在学习和复习《高等数学》的读者编写，也可供大学数学教师参考。考虑到大部分高等数学的学习者对如何将高等数学的定义、定理、命题合理地应用到解题中感到困惑，本书着重论述高等数学的解题思想方法和技巧。

本书有如下特点：

1. 假设读者已掌握或基本掌握《高等数学》的基本概念、定理和命题，本书对各章节的主要内容和要求只作简短的总结归纳。个别读者对于个别内容的证明不够清楚，建议查阅《高等数学》教科书。

2. 力求在内容的先后顺序上和传统教材保持一致。然而，考虑到学生，特别是准备考研或参加《高等数学》竞赛的学生对所学内容综合提高的要求，本书的诸章节部分题目的求解会用到后续章节的知识，解题方法的总结也会将后续章节的方法提前。

3. 鼓励读者跨学科、跨门类解题。引导学生将别的学科的知识合理地应用到高等数学的解题过程中来。如书中的用高等代数的矩阵的 Jordan 标准型知识证明或求解迭代序列的极限，就是在这方面的一个尝试。显然，这样对于培养学生综合运用已学知识的能力，将

所学知识有机地结合起来，进而巩固《高等数学》的知识是有意义的。

4.简述高等数学解题的思想和方法在社会生活中的应用，以及数学方法和生活方法的联系与区别。如书中极限证明中的适当放大法和语言学中的夸张修辞法的联系和区别，就是这方面的尝试。我们这样做旨在帮助学生掌握理解高等数学的思想，同时增强高等数学的趣味性，进而提高学生的学习兴趣。

由于作者水平所限，书中谬误在所难免。希望同行和读者批评指正。

作者

2008.6

目　录

第一章　函数与极限，函数的连续性 …………………………… (1)
　第一节　函　数 ………………………………………………… (1)
　第二节　极　限 ………………………………………………… (3)
　第三节　函数的连续性 ………………………………………… (28)
第二章　一元函数微分学 ……………………………………… (39)
　第一节　导数与微分 …………………………………………… (39)
　第二节　微分中值定理 ………………………………………… (50)
　第三节　函数的单调性及其极(最)值问题 ……………… (61)
　第四节　函数的凸凹性，拐点及函数作图 ………………… (70)
　第五节　L'Hospital 法则与 Taylor 公式 ………………… (76)
　第六节　一元函数微分学的综合应用 ……………………… (83)
第三章　一元函数积分学 ……………………………………… (105)
　第一节　不定积分 ……………………………………………… (105)
　第二节　定积分 ………………………………………………… (122)
　第三节　变限定积分，微积分基本定理，定积分的
　　　　　换元法与分部积分法 ………………………………… (130)
　第四节　定积分的应用 ………………………………………… (157)
　第五节　反常积分 ……………………………………………… (162)

第四章　级　数 …………………………………………………… (170)
第一节　数项级数 …………………………………………… (170)
第二节　函数列与函数项级数 ……………………………… (182)
第三节　幂级数 ……………………………………………… (191)
第四节　傅立叶级数 ………………………………………… (202)
第五章　多元函数微分学 ……………………………………… (213)
第一节　多元函数的极限与连续 …………………………… (213)
第二节　多元函数的偏导与微分 …………………………… (217)
第三节　复合函数的偏导与微分 …………………………… (224)
第四节　隐函数的偏导与微分 ……………………………… (228)
第五节　变量代换 …………………………………………… (234)
第六节　多元微分的应用 …………………………………… (239)
第七节　多元函数的极值 …………………………………… (245)
第六章　含参量积分 …………………………………………… (252)
第一节　含参量正常积分 …………………………………… (252)
第二节　含参量反常积分 …………………………………… (260)
第三节　欧拉积分 …………………………………………… (269)
第七章　曲线积分和曲面积分 ………………………………… (272)
第一节　曲线积分与高斯公式 ……………………………… (272)
第二节　曲面积分 …………………………………………… (285)
第八章　多元函数积分学 ……………………………………… (298)
第一节　二重积分 …………………………………………… (298)
第二节　三重积分 …………………………………………… (319)
第九章　综合题分析 …………………………………………… (329)

第一章　函数与极限，函数的连续性

第一节　函　数

对于函数的概念、函数的三要素（定义域、值域和对应规律），我们假设读者已熟知. 本节强调如下几类特殊的函数，因为其一，这几类函数在中学课本中没有出现过，其二，这几类函数对于大家掌握高等数学的概念，巩固高等数学的知识是不可缺少的.

1. 符号函数（工程上又叫开关函数）

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1, x>0,\\0, x=0,\\-1, x<0.\end{cases}$$

2. 取整函数

$$f(x)=[x].$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数部分.

3. 上取整函数

$$g(x)=\lceil x\rceil$$

这里 $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数部分.

4. Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

这里 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

此外我们还要注意周期函数、奇函数、偶函数、（严格）单调增函数、（严格）单调减函数、复合函数、有（无）界函数等的概念和性质，因为这些函数的概念和性质对于处理某些高等数学的题目是有用的.

作为本节的结束，我们还要对于初等函数的有关问题说点什么.

所谓基本初等函数是指常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 现在让我们再温习一下初等函数的定义:

初等函数的定义 若函数 $f(x)$ 能由基本初等函数经过有限次四则运算和经过有限次复合并能用一个式子表达,则函数 $f(x)$ 称为初等函数.

注: 定义中所用的两个"能"字应该引起我们的注意. 你不能我不能说不定他能,昨天不能今天不能说不定明天能. 如

$$f(x)=|x|, x\in \mathbf{R}$$

是初等函数,因为 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}, x\in \mathbf{R}$. 再如

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n, x\in(-1,1)$$

是初等函数,因为 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, x\in(-1,1)$. 分段定义的函数也有可能是初等函数. 总之,我们除了知道在其定义区间上不连续的函数不是初等函数外,对于其他非初等函数的例子,我们知道的不多.

练习题

1. 设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$. 求证

(1) $f(x)$ 是周期函数.

(2) $|f(x)|\leqslant 2$.

(3) 求 $(\underbrace{f\cdot f\cdots f}_{n个})(x)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义, $a,b>0$. 求证

(1) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调下降,则 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

(2) 若 $\dfrac{f(x)}{x}$ 单调上升,则 $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$.

3. 利用上题证明:当 $a,b>0$ 时,有

(1) 若 $p>1$,则 $(a+b)^p\geqslant a^p+b^p$.

(2) 当 $p\in(0,1)$ 时, $(a+b)^p\leqslant a^p+b^p$.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且 $f(f(x))=x$.

(1) 问这种函数有几个?

(2) 若 $f(x)$ 还是单调增的,问这种函数有几个?

5. 若设奇函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且其图象关于直线 $x=b(>0)$ 对称. 证明 $f(x)$ 是周期函数并求其周期.

第二节 极 限

一 极限的定义

数列极限定义 设 $\{x_n\}$ 是一实数列, a 是一实数. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbf{N}$, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

则称数列 $\{x_n\}$ 在 $n\to\infty$ 时以 a 为极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

或

$$x_n\to a(n\to\infty).$$

定义 设 $\{x_n\}$ 是一实数列. 若 $\forall M>0$, $\exists n_0\in\mathbf{N}$, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$x_n>M.$$

则称数列 $\{x_n\}$ 在 $n\to\infty$ 时以 $+\infty$ 为极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$$

或

$$x_n\to+\infty(n\to\infty).$$

类似地, 可定义

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$$

和

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$$

注: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$(或 $-\infty$, 或 ∞), 则称 x_n(在 $n\to\infty$ 时) 为无穷大量.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 则称 x_n(在 $n\to\infty$ 时) 为无穷小量, 记为 $x_n=$

$o(1)(n\to\infty)$.

函数极限定义 设有常数 $\delta_1>0$，函数 $f(x)$ 在 $N^0(x_0,\delta_1)=(x_0-\delta_1,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_1)$ 上有定义. a 是一实数. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists 0<\delta<\delta_1$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-a|<\varepsilon.$$

则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以 a 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，或 $f(x)\to a(x\to x_0)$.

类似地，可定义函数极限

$$\lim_{x\to x_0+(x_0-,+\infty,-\infty,\infty)}f(x)=a(+\infty,-\infty,\infty).$$

注：若 $\lim\limits_{x\to x_0(x_0+,x_0-,+\infty,-\infty,\infty)}f(x)=+\infty(-\infty,\infty)$，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0(x_0+,x_0-,+\infty,-\infty,\infty)$ 时为无穷大量.

若 $\lim\limits_{x\to x_0(x_0+,x_0-,+\infty,-\infty,\infty)}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0(x_0+,x_0-,+\infty,-\infty,\infty)$ 时为无穷小量，记为 $f(x)=o(1)(x\to x_0(x_0+,x_0-,+\infty,-\infty,\infty))$.

练习题

1. 给出数列 $\{x_n\}$ 发散（不收敛）的定义.

2. 给出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq 2$ 的定义.

3. 下列各论述哪一个可作为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义. 可以的加以证明，不可以的举出反例.

(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0\in\mathbf{N}$. 当 $n>n_0$ 时有

$$|x_n-a|\leqslant 4\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0\in\mathbf{N}$. 当 $n>n_0$ 时有

$$|x_n-a|\leqslant 4\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0\in\mathbf{N}$. 当 $n>n_0$ 时有

$$|x_n-a|<\frac{1}{n}\varepsilon.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0\in\mathbf{N}$. 当 $n>n_0$ 时有

$$|x_n - a| < \frac{n}{n+2}\varepsilon.$$

(5) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$. 当 $n > n_0$ 时有

$$|x_n - a| < \sqrt{n}\varepsilon.$$

4. 给出函数 $f(x)$ 在 $x \to 1+$ 时发散(不收敛) 的定义.

5. 给出 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \neq 2$ 的定义.

二　实数六大定理

极限的理论和运算是高等数学的基础. 极限的理论建立在实数的六大定理上. 为给出实数的六大定理,我们先给出

上确界定义　设集合 $E \subset \mathbf{R}$,若实数 M 满足

(1) $\forall x \in E \Rightarrow x \leqslant M$(即 M 为 E 的一个上界);

(2) 若 M_1 是 E 的一个上界,则 $M_1 \geqslant M$(即 M 为 E 的一个最小上界),则称 M 为实数集 E 的上确界,记作 $M = \sup(E)$ 或 $M = \sup_{x \in E}(x)$.

上确界定理　非空有上界的实数集必有上确界.

类似地可以给出下确界的定义和下确界定理.

单调有界定理　有上(下) 界的单调增(减) 数列必有极限.

区间套定理　设

(1) $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \cdots$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty}(\beta_n - \alpha_n) = 0$,

则存在唯一的 ξ 使得 $\xi \in [\alpha_n, \beta_n], n = 1, 2, \cdots$ 且

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = \xi.$$

子数列定理　有界数列必有收敛的子数列.

有限开覆盖定理　若闭区间$[a,b]$ 为开区间族 $\{I_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 所覆盖,则 $\{I_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 中必有有限个开区间覆盖$[a,b]$.

Cauchy **收敛准则**　数列$\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$,当 $m, n > n_0$ 时,有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

三　极限的性质

定理 1　若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(a \in (-\infty, +\infty))$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$，则$a = b$.

定理 2　若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a(a \in (-\infty, +\infty))$，则$\{x_n\}$必有界.

定理 3　若$\lim\limits_{n\to\infty} x_0 = a > 0$，则$\exists n_0 \in \mathbf{N}$，当$n > n_0$时，有$x_n > 0$.

定理 4　若$\exists n_0 \in \mathbf{N}$，当$n > n_0$时，有$x_n > 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$a \geqslant 0$.

定理 5　若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，$a$、$b \in (-\infty, +\infty)$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b, \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$

且$b \neq 0$时，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

定理 6(迫敛性)　若$\exists n_0 \in \mathbf{N}$，当$n > n_0$时，$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. 则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

定理 7(Heine 定理)　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}$，满足$x_n \neq x_0$ $(n \geqslant 1)$以及$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，均有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

函数极限的性质和数列极限的性质类似，这里从略.

四　两类重要极限

1.
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

五　数列极限典型题型与例题分析

1. 适当放大法

例 1　证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 + 4n + 3}{5n^3 + 6n^{\frac{5}{2}} + 7n} = 0.$$

证：$\forall \varepsilon > 0$，取 $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$. 当 $n > n_0$ 时，有

$$\left|\frac{n^2+4n+3}{5n^3+6n^{\frac{5}{2}}+7n} - 0\right| = \frac{n^2+4n+3}{5n^3+6n^{\frac{5}{2}}+7n} < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

证：因为

$$\begin{aligned} 1 \leqslant n^{\frac{1}{n}} &= (\sqrt{n}\sqrt{n}\,\overbrace{1\cdots1}^{n-2个})^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-2个}}{n} = \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} \\ &\leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$，取 $n_0 = 1 + \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$. 当 $n > n_0$ 时便有

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

例 3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

证：对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $i(n+1-i) \geqslant n$. 于是 $\forall \varepsilon > 0$，取 $n_0 = 1 + \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$. 当 $n > n_0$ 时便有

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} - 0\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n} = 0$.

证：因为

$$\sqrt{2n+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{2^2-1}{2}\cdot\frac{4^2-1}{4}\cdots\frac{(2n)^2-1}{2n},$$

故

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$，取 $n_0 = 1 + \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$. 当 $n > n_0$ 时便有

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} - 0\right| < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

注：使用适当放大法证明极限，读者应结合语文中的夸张修辞法深刻地理解“适当”二字. 在写作中应用夸张修辞法，如果夸张得不够或不到位可导致夸张无趣. 如果夸张得过分便会令读者对你所描述的事情产生怀疑（当然在辩论中，辩手可利用过分夸张以反唇相讥，即语言学中的归谬法）. 用放大法证明极限，放大得适当很关键. 如果放大得不够或不到位可导致 n_0 求解的困难. 例如在例 1 的证明中放大的不够，便有

$$\left|\frac{n^2+4n+3}{5n^3+6n^{\frac{5}{2}}+7n} - 0\right| = \frac{n^2+4n+3}{5n^3+6n^{\frac{5}{2}}+7n} < \varepsilon$$

而要从

$$\frac{n^2+4n+3}{5n^3+6n^{\frac{5}{2}}+7n} < \varepsilon$$

求出合适的 n_0 显然困难. 如果放大得过分更导致荒谬的结果. 如

$$\left|\frac{n^2+4n+3}{5n^3+6n^{\frac{5}{2}}+7n} - 0\right| = \frac{n^2+4n+3}{5n^3+6n^{\frac{5}{2}}+7n} < n < \varepsilon$$

2. 利用迫敛性定理

例 1　证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 (a > 0).$$

证：取 $b = \max\{1, a\}$，便有 $0 < \frac{a^n}{n!} \leqslant \frac{b^n}{n!} \leqslant \frac{b^{[b]}}{[b]!}\ \frac{b}{n}$ 而

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{b^{[b]}}{[b]!}\ \frac{b}{n} = 0.$$

故由迫敛性定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0.$$

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

解:显然 $1 \leqslant \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{n}$. 而

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

故由迫敛性定理,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1.$$

例 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}}$.

解:因为 $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \leqslant 1$,故

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}} \leqslant 1.$$

而

$$\lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}} = 1.$$

故由迫敛性定理,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}} = 1$$

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

解:因为 $n > 2$ 时,

$$\begin{aligned} n! &< 1!+2!+\cdots+(n-2)!+(n-1)!+n! \\ &< (n-2)(n-2)!+(n-1)!+n! < 2(n-1)!+n!. \end{aligned}$$

因此,当 $n > 2$ 时,

$$1 < \frac{1!+2!+\cdot+n!}{n!} < 1+\frac{2}{n}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} = 1.$$

注:学习掌握进而应用夹逼定理,和日常生活结合理解定理内容会加深我们对定理的理解. 如前轿夫和后轿夫都进房间了,则坐轿者

必定也进了这个房间.

3. 利用单调有界原理

例 1 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

解:令 $x_n=\frac{2^n n!}{n^n}$,便有$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\leqslant 1$. 从而 $x_n\downarrow(n)$. 又

$$x_n>0\Rightarrow\exists\lim_{n\to\infty}x_n.$$

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则由 $x_{n+1}=\frac{2x_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ 得 $a=\frac{2a}{\mathrm{e}}\Rightarrow a=0$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0.$$

例 2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解:$\sqrt[n+1]{n+1}\leqslant\sqrt[n]{n}\Leftrightarrow(n+1)^n\leqslant n^{n+1}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant n\Leftarrow n\geqslant 3$. 故 $n\geqslant 3$ 时,$\{\sqrt[n]{n}\}\downarrow(n)$. 而$\sqrt[n]{n}\geqslant 0$. 于是 $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=a$,则由 $\sqrt[2n]{2n}=2^{\frac{1}{2n}}\sqrt[2n]{n}$ 得 $a=\sqrt{a}\Rightarrow a=0$ 或 $a=1$. 但 $a\geqslant 1\Rightarrow a=1$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例 3 设$\{a_n\}\downarrow(n)$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 定义 $b_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,则

(1)$\{b_n\}\downarrow(n)$;

(2)$b_{2n}\leqslant\frac{1}{2}(a_n+b_n)$;

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

(1) **证明**:由定义以及$\{a_n\}\downarrow(n)$,

$$b_{n+1}-b_n=\frac{na_{n+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n(n+1)}\leqslant 0\Rightarrow b_{n+1}\leqslant b_n.$$

(2) 的证明和(1) 的证明类似.

(3) **解**:由题设 $\forall n\in\mathbf{N},a_n\geqslant 0\Rightarrow b_n\geqslant 0$,再由$\{b_n\}\downarrow(n)$ 知