●主编　汪江松　熊新华　沈占立

数学培优竞赛

新课标

超级课堂

传播数学文化
激发数学兴趣
提升数学素养
活跃数学思维

9年级

华中师范大学出版社

新课标

数学培优竞赛超级课堂

●主编 汪江松 熊新华 沈占立

9 年级

華中師範大學出版社

新出图证(鄂)字10号

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛超级课堂(9年级)/主编 汪江松 熊新华 沈占立
—武汉：华中师范大学出版社，2007.1

ISBN 978-7-5622-3496-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①汪…②熊…③沈… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第014978号

数学培优竞赛超级课堂(9年级)

主编:汪江松 熊新华 沈占立

责任编辑:陈兰枝 责任校对:罗 艺 封面设计:甘 英

选题设计:第一编辑室(027—67867361)

出版发行:华中师范大学出版社 ©

社址:湖北省武汉市珞喻路152号

销售电话:027—67863040 027—67867076 027—67867371 027—67861549

传真:027—67863291 邮购:027—67861321

网址:http://www.ccnup.com.cn 电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

印刷:湖北孝感日报印刷厂 督印:章光琼

字数:396千字

开本:889mm×1194mm 1/16 印张:17

版次:2007年1月第1版 印次:2007年1月第1次印刷

定价:23.80元

欢迎上网查询、购书

一个数学教研员的责任

发现推进素质教育的每一个坚实脚印

> 教师是一把钥匙，这钥匙应该充满魔力，可以打开许多门，门外的道路至少有三条——实际应用、知识的深入理解和探索性思维的培养。
>
> ——澳大利亚教育学会主席 J. Bacr 教授

这是我所钦佩的。他的人生经验，他为理想而奋斗的心路历程，他的教学实绩，还有他的这本书。

他就是熊新华老师。他和我交往只是近两年的事，见面也只是谈谈数学问题和教学心得，谈外国的波利亚、古代的刘徽，还没有来得及谈我们自己。

他原本在鄂州任教。鄂州的石山中学，大概算不上所谓"重点"、"示范"或曰"优质"学校。人们记不住这个学校的名字，却知道鄂州有个熊新华老师，其声誉传到了求贤若渴且招贤有术的刘敬熹校长那里，他才来到了武汉的武珞路中学。刘校长政绩卓著，把武珞路中学办得如日中天，与他慧眼识才是分不开的。

熊老师说他有些遗憾：正当他在石山中学声誉鹊起的时候，他离开了那个为之付出心血的地方。说来也是，一位教师要想在优质学校出成绩并不难，难的是在教学条件较差的学校出成绩。熊老师在石山那样的学校不仅做出了成绩，而且使武汉的龙头老大都刮目相看，这才是最难最难的呵。

近年来，武珞路中学把 60％的毕业生送进华师一附中、武钢三中等武汉地区最好的高中，并连年囊括全国初中数学联赛武汉赛区三分之一的金奖。这与包括熊新华老师在内的数学组全体同仁的辛勤劳动是分不开的。

因此，湖北省骨干教师培训班请他讲课，介绍武珞路数学教学的成功经验，也介绍他多年来积累的教学心得。

因此，他想到了写一本书。因为培训班只是面对教师的，而他的服务对象应该是学生。

他写书的精神是令人感动的。

为了写这本书，他曾经用两年的时间研究小学的数学教学和数学竞赛。中学的数学教学应该建立在小学的基础之上，这是谁都懂得的道理，但有几位能像熊老师那样真正深入到小学领域中去探寻初中数学教学的出发点呢？

为了写这本书，他从 2005 年开始参加了武汉大学心理咨询师的培训。数学教学应该遵循学生的心理规律，这也是谁都懂得的道理，但有几位能像熊老师那样用这种方式去学习心理学，把自己的教学实践真正建立在心理学的基础之上呢？

为了写这本书，他潜心进行初等数学研究，把"等和"点的 40 步证明推进到了 17 步。数学老师必须有解题的好味口，这是波利亚说的，也是谁都懂得的道理。攻于解题的老师当然不少，但有几位能有这样的视野，能像熊老师那样，在对中考题、竞赛题进行探究的同时还把兴趣延拓到诸如"等和"点上呢？

为了写这本书，他与沈占立、陈起航、熊三华、彭毅、吴四海、汪四友、万怀生、占鳌、刘文建、方超、邵爱玲等朋友一起，办起了教研沙龙。张奠宙的双基理论，郑毓信的哲学分析，罗增儒的解题智慧……都是他们谈论的话题。据说，就连鄙人"代数重形式"的一席奢谈，也曾遭遇过他们的品评。教研本该如此，博采以集思，切磋以明理。这是谁都懂得的道理，但有几位能有这样的闲情逸趣？

熊老师领悟到了著书的真谛：功夫在诗外。这才有了这本书的内涵，这本书与其他书的区别。

现在,大概应该谈谈这本书了。

这本书较好地解决了长期困扰数学教育工作者的问题:如何让学生对数学有兴趣?如何提升学生数学学习的境界?

我很欣赏"与大师(数学)对话"和"研讨乐园"这两个栏目。

"与大师对话",将把我们带进数学家们那激情燃烧的岁月,感知使大师们在孩童时代就产生兴趣的数学问题,模拟一次数学家们的智慧之旅。

在"与数学对话"中,我们可以欣赏到一些历史名题,它们曾以数学本身的魅力,打动过无数探索的心灵。使一代又一代的莘莘学子乐此不疲。也是在这个栏目中,我们还可以领略到许多解题规律,它们是数学智慧的结晶。

与大师对话,与数学对话,是本书的一大特色,是数学文化的重要标志,也是在数学学习领域推进素质教育的有益尝试。

本书的另一特色是"研讨乐园",它包含了很多有趣的问题,这些问题虽然有一定的难度,但只要有自信心、求知欲和独立思考的习惯,利用现有的知识是完全可以解决的。这就给同学们提供了一个机会,自主探索的机会。

本书理所当然的还有一些传统栏目,它们是:"典例剖析"、"能力平台"。它们的效果如何?武珞路中学的教育实践可以作证,我就不多说了。

我最后要说的是:当熊老师请我作序时,我是欣然接受的。因为我始终认为,在教学中发现美,发现创意,发现推进素质教育的每一个坚实脚印,发现有利于学生成长的精神食粮,并把它推介出去,使其发挥更大的效益,是我的责任。面对一位优秀的教师,一部优秀的作品,如果我无所作为,表示沉默,那还要我这个教研员干什么?

裴光亚

于武昌沙湖

目录 Contents

目录 Contents

第1讲　圆的基本性质

与大师对话

瓦莱士(J. Wallis,1616—1703),英国数学家,生于英国肯特,卒于牛津.

他早年在剑桥大学学习神学,同时自修了数学. 20 岁起开始研究各种数学问题. 1649 年后任牛津大学教授,英国"促进自然知识皇家学会"创立委员之一.

他最早提出负指数概念,最早引进连分式概念,且给出了表示圆周率 π 的连积式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times\cdots}{1\times3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times\cdots}.$$

著有《圆锥曲线论》、《无穷小算术》、《代数》等.

测量地球半径

当人类认识到地球是一个球体后,测量并计算它的半径便成了人们梦寐以求的事.

古希腊人利用太阳光对亚历山大和赛尼不同纬度的照射,巧妙地计算出地球的半径的近似值(见前文).

瓦莱士运用几何知识,通过球面(严格地讲是圆)的凸性,给出一个测量地球半径的简单方法:

题　(一个简易测量地球半径或周长的方法)在一条笔直的运河上竖立两根木杆(见图 1-1),其上端点 A、B 间距离可测,且它们到水平面高度均为 h. 在两杆中竖立第三根杆,其上端 D 恰好在 AB 直线上. 若能测量出 h、DH、DB 的长,则可求出地球半径 r.

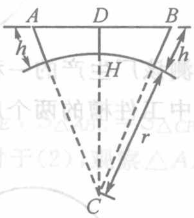


图 1-1

解　因 $AC=r+h=BC$, 则 $AD=BD$.

在 $Rt\triangle DBC$ 中有 $BD^2+DC^2=BC^2$,

即
$$DB^2+(r+DH)^2=(r+h)^2.$$

有
$$DB^2+DH^2-h^2=2rh-2rDH=2r(h-DH),$$

故
$$r=\frac{DB^2+DH^2-h^2}{2(h-DH)}.$$

若忽略 DH^2-h^2(它很小),可有近似公式:

$$r\approx\frac{DB^2}{2(h-DH)}=\frac{AB^2}{8(h-DH)}.$$

超级链接

什么是圆?

我国战国时期的科学家墨翟在《墨经》中写道:"圆,一中同长也."

古希腊的数学家认为:一切立体图形中最美的是球形,一切平面图形中最美的是圆形.

布罗克认为:圆是最简单、最完美的图形.

古希腊哲学家芝诺关于学习知识也是用圆来表达的,他认为:如果用圆代表我们学到的知识,那么圆外的空白就是我们的无知面,圆越大其圆周接触的无知面就越多.

看来数学语言不仅可以表达和研究科学,而且可以精妙地表达人的思想、性格和追求.

你会应用圆的知识吗? 你也会测量地球的半径吗?

典例剖析

例 1 一个点到圆的最小距离是 4cm，最大距离是 9cm，则此圆的半径为(　　).

A. 2.5cm　　B. 2.5cm 或 6.5cm　　C. 6.5cm　　D. 5cm 或 13cm

【试一试】 这个点与圆的位置关系只有两种情况：在圆内或在圆外.

【解】 (1)当点 A 在⊙O 外时，如图 1-2(1)，作直径 BC，则 AB、AC 分别为点 A 到⊙O 的最小距离和最大距离.

∵ $AB=4\text{cm}$，$AC=9\text{cm}$，

∴ 直径 $BC=AC-AB=5\text{cm}$.

∴ ⊙O 的半径为 2.5cm.

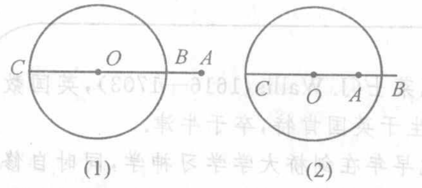


图 1-2

(2)当点 A 在⊙O 内时，如图 1-2(2). 类似可以得到：⊙O 的半径为 6.5cm.

故选 B.

分类讨论是一种重要的数学思想方法，正如美国数学家马丁·加德纳所说："据估计，在科学、事务处理和工业上使用计算机，其四分之一的时间花在分类问题上."

你会分类吗？

对于例 1，我们可按点 A 在圆外、圆上和圆内分三类讨论，因为点 A 不在圆上，所以分两类讨论.

【变式题组】 1. (2002，黄冈市)已知⊙O 中，半径 $r=5\text{cm}$，AB、CD 是两条平行弦，且 $AB=8\text{cm}$，$CD=6\text{cm}$，求 AC 的长.

对于变式题组第 1 题，隐含两个层次的分类讨论：(1)点的位置不确定. 当 A、B 确定后，C、D 有两种不同排列情形；(2)平行线的位置不确定. 即它们可能在圆心的同侧或异侧.

2. (2006，台州市)我们知道，"两点之间线段最短"，"直线外一点与直线上各点连线的所有线段中，垂线段最短". 在此基础上，人们定义了点与点的距离，点到直线的距离. 类似地，如图 1-3，若点 P 是⊙O 外一点，直线 PO 交⊙O 于 A、B 两点，PC 切⊙O 于点 C，则点 P 到⊙O 的距离是(　　).

A. 线段 PO 的长度　　B. 线段 PA 的长度

C. 线段 PB 的长度　　D. 线段 PC 的长度

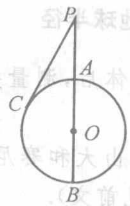


图 1-3

例 2 (2005，河北省)工人师傅为检测该厂生产的一种铁球的大小是否符合要求，设计了一个如图 1-4 的工件槽，其中工件槽的两个底角均为 90°，尺寸如图(单位：cm).

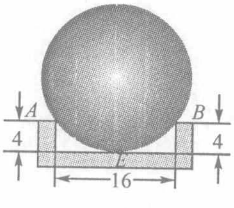


图 1-4

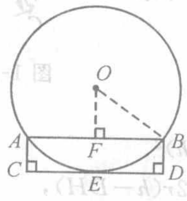


图 1-5

将形状规则的铁球放入槽内时，若同时具有图 1-4 所示的 A，B，E 三个接触点，该球的大小就符合要求.

图 1-5 是过球心 O 及 A，B，E 三点的截面示意图. 已知⊙O 的直径就是铁球的直径，AB 是⊙O 的弦，CD 切⊙O 于点 E，$AC\perp CD$，$BD\perp CD$. 请你结合图 1-4 中的数据，计算这种铁球的直径.

【试一试】 过 O 作 $OF\perp AB$ 于 F，在 Rt△OFB 中考虑构造方程.

垂径定理是解本题的关键. 在解有关圆的问题时，通常是作弦心距构造直角三角形，再应用勾股定理来求圆的半径.

在圆中，你会运用勾股定理吗？

【解】 在图1-5中，作 $OF\perp AB$ 于 F，连结 OB，设⊙O 的半径为 Rcm，

则 $OF=R-4$，$OB=R$，$FB=\frac{1}{2}AB=8$.

在 Rt△OFB 中，$(R-4)^2+8^2=R^2$， 解得 $R=10$cm.

∴ 这种铁球的直径为 20cm.

【变式题组】 3.（2005，天津市）如图1-6所示，已知 AB 是⊙O 的弦，P 是 AB 上一点，若 $AB=10$cm，$PB=4$cm，$OP=5$cm，则⊙O 的半径是________cm.

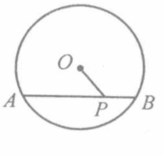


图 1-6

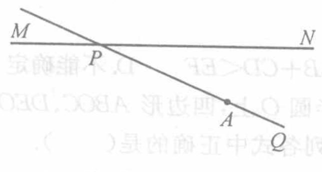


图 1-7

4. 如图1-7所示，公路 MN 和公路 PQ 在 P 处交汇，且 $\angle QPN=30°$，点 A 处有一所中学，$AP=160$m，假设拖拉机在公路 MN 上行驶时，周围 100m 内会有噪声，学校是否会受噪声影响？请说明理由. 如果受影响，那么学校受影响的时间为多长？已知拖拉机的速度为 18km/h.

变式题组第3题是过 O 作 AB 的垂线，在直角三角形中运用勾股定理.

变式题组第4题需把实际问题转化成几何模型，再用垂径定理.

例3 (1)（2005，内江市）如图1-8，⊙O 的半径为 2，弦 $BD=2\sqrt{3}$，A 为弧 BD 的中点，E 为弦 AC 的中点且在 BD 上. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

(2)（2000，全国初中数学竞赛）如图1-9，已知四边形 $ABCD$ 外接⊙O 的半径为 2，对角线 AC 与 BD 的交点为 E，$AE=EC$，$AB=\sqrt{2}AE$，且 $BD=2\sqrt{3}$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

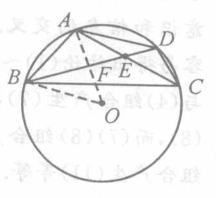


图 1-8

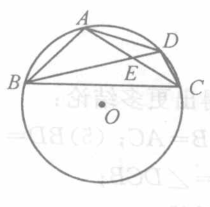


图 1-9

【试一试】 对于(1)，∵ $AE=EC$， ∴ $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDE}$，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBE}$，

∴ $S_{四边形ABCD}=2S_{\triangle ABD}$. 故关键是求 BD 边上的高；对于(2)，观察△ABD，猜想它可能是等腰三角形.

【解】 (1)连结 OA、OB，OA 交 BD 于 F.

∵ A 为 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，且 $BD=2\sqrt{3}$， ∴ $OF\perp BD$，$BF=FD=\sqrt{3}$.

又 $OB=2$， ∴ $OF=\sqrt{OB^2-BF^2}=1$.

即 $AF=OA-OF=2-1=1$， ∴ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AF=\sqrt{3}$.

∵ $AE=CE$， ∴$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDE}$，$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBE}$.

∴ $S_{四边形ABCD}=2S_{\triangle ABD}=2\sqrt{3}$.

(2)由题设得 $AB^2=2AE^2=AE\cdot AC$，有 $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AB}$.

又 ∵$\angle EAB=\angle BAC$， ∴ $\triangle ABE\backsim\triangle ACB$，有 $\angle ABE=\angle ACB$.

∴ $AB=AD$. 以下同(1)可知 $S_{四边形ABCD}=2\sqrt{3}$.

这种从一个形式到另一个形式的转变并不是百无聊赖的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一.

——革命导师 恩格斯

你经常运用转化的思想吗？

例3中，第(1)问求 $S_{四边形ABCD}$ 转化为求 $S_{\triangle ABD}$，而求 $S_{\triangle ABD}$ 转化为求 BD 边上的高，最后转化为用垂径定理；第(2)问转化为证明 $AB=AD$，于是第(2)问转化为第(1)问了.

【变式题组】 5.(江苏省竞赛)如图 1-10,在三个等圆上各自有一条劣弧 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{EF}$,如果$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{EF}$,那么 $AB+CD$ 与 EF 的大小关系是(　　).

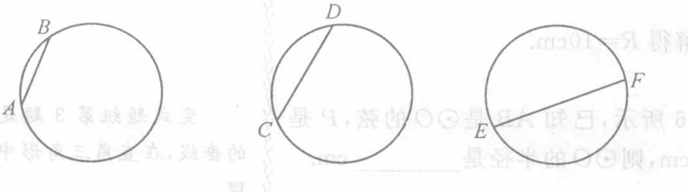


图 1-10

A. $AB+CD=EF$　　B. $AB+CD>EF$　　C. $AB+CD<EF$　　D. 不能确定

6.(2004,北京市)如图 1-11,点 A、D、G、M 在半圆 O 上,四边形 $ABOC$、$DEOF$、$HMNO$ 均为矩形. 设 $BC=a$,$EF=b$,$NH=c$,则下列各式中正确的是(　　).

A. $a>b>c$　　B. $a=b=c$　　C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

变式题组第 5 题. 可重新画圆,把分散的条件集中,使 B 与 C,A 与 E,F 与 D 分别重合,则问题化归成三角形不等边关系问题.

变式题组第 6 题. 连结 OM、OD、OA,问题转化为比较 OM、OD、OA 的大小关系.

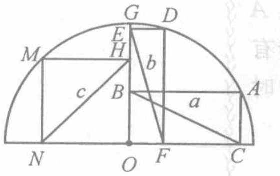


图 1-11

图 1-12

按组成命题的要素分类,开放题可分为:(1)条件开放题;(2)策略开放题;(3)结论开放题;(4)综合开放题.

例 4 (2000,新疆生产建设兵团)已知,如图 1-12,在⊙O 中,AD 是⊙O 的直径,BC 是弦,且 $AD\perp BC$,E 为垂足,由这些条件你能推出哪些结论?(要求:不添加辅助线,不添加字母,不写推理过程,只写出 6 条以上的结论)

【试一试】 充分利用圆的对称性.

【解】 ∵ $AD\perp BC$,且 AD 为直径,

∴ 可以利用垂径定理得出一些结论,由此又能得出更多结论:

(1)$BE=EC$;(2)$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}$;(3)$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$;(4)$AB=AC$;(5)$BD=DC$;

(6)$AO=OD$;(7)$\angle ABC=\angle ACB$;(8)$\angle DBC=\angle DCB$;

(9)$\angle ABD=\angle ACD$;(10)AD 是线段 BC 的中垂线;

(11)$\triangle ABD\cong\triangle ACD$ 等等.

例 4 是一道结论开放题,重点考查考生发散思维能力和创新意识. 对于发散思维的训练,一定要强调组合意识和信息的交叉. 由基本图形,很容易得出结论(1)～(6),由 $AD\perp BC$ 与(4)组合产生(7),与(5)组合产生(8),而(7)(8)组合产生(9),(4)(5)组合产生(11)等等.

【变式题组】 7. 如图 1-13,弦 DC、FE 的延长线交于⊙O 外一点 P,直线 PAB 经过圆心 O,请你根据现有图形添加一个适当的条件:________,使$\angle 1=\angle 2$.

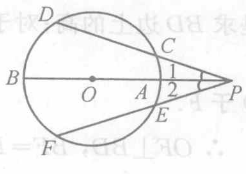


图 1-13

变式题组第 7 题是一道条件开放题. 角平分线的判定定理,圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系定理是添加条件的关键.

研讨乐园

例 5 (第 2 届全澳门校际初中数学竞赛)要将三个边长为 1cm 的正方形放在一个圆碟内,要求这三个正方形不能某部分在碟边以外,且不能重叠,试问:圆碟的半径至少是多少?

【试一试】 你注意到正方形、圆都是轴对称图形了吗? 所作最小的圆的圆心应在对称轴上. 符合条件的图形有几种? 分类讨论,比较大小即可.

实践与综合运用是新数学课程中一个全新的内容. 这一领域沟通了生活中的数学与课堂上数学的联系,使得几何、代数和统计与概率的内容有可能以交织在一起的形式出现.

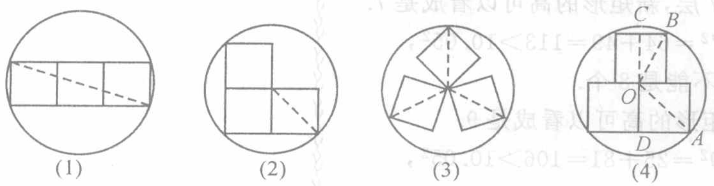


图 1-14

【解】　如图 1-14(1)，$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+1^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$cm；

如图 1-14(2)、(3)，$r_2=r_3=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$cm；

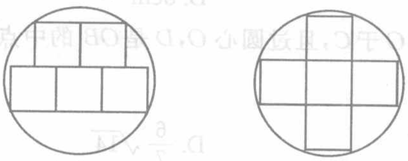
如图 1-14(4)，考虑到它的对称性，圆碟的圆心应在正方形的边 OD 上，设 $OC=x$. 则 $OD=2-x$，

$\therefore OB^2=r^2=\frac{1}{4}+x^2$，$OA^2=r^2=1^2+(2-x)^2$.

$\because OA=OB$，　$\therefore \frac{1}{4}+x^2=1+(2-x)^2$，　解得 $x=\frac{19}{16}$.

从而 $r=\frac{5\sqrt{17}}{16}$，此时圆碟的半径最小.

【变式题组】　8.(1)若在圆碟内放五块边长均为 1cm 的正方形，问圆碟的直径至少是多少？[提示：如图 1-15 两种摆放方案供参考.]



方案一　　方案二

图 1-15

图 1-16

(2)(2003，重庆市)电脑 CPU 芯片由一种叫“单晶硅”的材料制成，未切割前的单晶硅材料是一种薄型圆片，叫“晶圆片”. 现为了生产某种 CPU 芯片，需要长、宽都是 1cm 的正方形小硅片若干. 如果晶圆片的直径为 10.05cm(如图 1-16). 问一张这种晶圆片能否切割出所需尺寸的小硅片 66 张？请说明你的方法和理由.(不计切割损耗)

【解】　(1)把 10 个小正方形排成一排，看成一个长条形的矩形，这个矩形刚好能放入直径为 10.05cm 的圆内，如图 1-17 中的矩形 $ABCD$.

$\because AB=1$，$BC=10$，　$\therefore$ 对角线 $AC^2=100+1=101<10.05^2$.

(2)在矩形 $ABCD$ 的上面和下面可以分别放入 9 个小正方形.

$\because$ 新加入的两排小正方形连同 $ABCD$ 的一部分可看成矩形 $EFGH$，矩形 $EFGH$ 的长为 9，高为 3，

$\therefore$ 对角线 $EG^2=9^2+3^2=81+9=90<10.05^2$.

图 1-17

但是新加入的这两排小正方形不能是每排 10 个，因为 $10^2+3^2=100+9=109>10.05^2$.

(3)同理 $8^2+5^2=64+25=89<10.05^2$，$9^2+5^2=81+25=106>10.05^2$，

$\therefore$ 可以在矩形 $EFGH$ 的上面和下面分别再排下 8 个小正方形(不能是 9 个)，那么现在小正方形已有 5 层；

实践：密切联系数学与生活，数学知识与现实社会需要的实践；

综合：数学各部分知识与表达方式之间的综合；数学学科与其他学科的综合；

应用：以独立思考、自主探索为主体，以探索为主线，加强解决问题的能力.

你喜欢用数学知识解决实际问题吗？

变式题组第 8 题(2)的解决实际上是回到例 5，而例 5 这一实际问题需要开放的思维和知识的灵活运用.

(4)再在原来的基础上,上下再加一层,共7层,新矩形的高可以看成是7.

∵ $7^2+7^2=49+49=98<10.05^2$, $8^2+7^2=64+49=113>10.05^2$,

∴ 新加入的这两排,每排都可以是7个但不能是8个.

(5)在7层的基础上,上下再加入一层,新矩形的高可以看成是9.

∵ $4^2+9^2=16+81=97<10.05^2$, $5^2+9^2=25+81=106>10.05^2$,

∴ 这两层每排可以是4个但不能是5个.

现在总共排了9层,高度达到了9,上下各剩下0.525cm的空间,因为矩形 $ABCD$ 的位置不能调整,故再也放不下一个小正方形了.

综上可知,一张晶圆片共可以切割出

$10+2\times9+2\times8+2\times7+2\times4=66$(个)小硅片.

能力平台

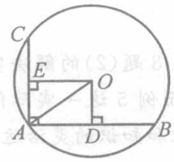
培优训练

1.(2005,四川省)如图,在⊙O中,AB、AC是互相垂直的两条弦,$OD\perp AB$于D,$OE\perp AC$于E,且$AB=8$cm,$AC=6$cm,那么⊙O的半径OA长为(　　).

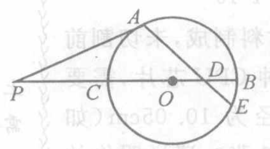
A. 4cm　　B. 5cm　　C. 6cm　　D. 8cm

2.(2005,启东市)已知如图,PA是⊙O的切线,A是切点,PB交⊙O于C,且过圆心O,D是OB的中点,连结AD并延长交⊙O于E,若$\angle P=30°$,$AP=\sqrt{6}$,则AE的长是(　　).

A. $\frac{3}{14}\sqrt{14}$　　B. $\frac{5}{14}\sqrt{14}$　　C. $\frac{5}{7}\sqrt{14}$　　D. $\frac{6}{7}\sqrt{14}$

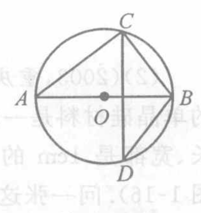


第1题图



第2题图

第3题图



第4题图

3.(2005,临沂市)如图,顺次连结圆内接矩形各边的中点,得到菱形$ABCD$,若$BD=10$,$DF=4$,则菱形$ABCD$的边长为(　　).

A. $4\sqrt{2}$　　B. $5\sqrt{2}$　　C. 6　　D. 9

4.(2005,绍兴市)如图,已知AB是⊙O的直径,CD是弦且$CD\perp AB$,$BC=6$,$AC=8$,则$\sin\angle ABD$的值是(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

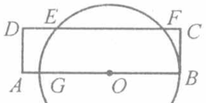
5.(2006,哈尔滨市)在△ABC中,$AB=AC=5$,且△ABC的面积为12,且△ABC外接圆的半径为________.

6.(2006,南京市)如图,矩形$ABCD$与圆心在AB上的⊙O交于点G、B、F、E,$GB=8$cm,$AG=1$cm,$DE=2$cm,则$EF=$________cm.

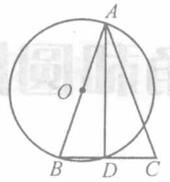
7.(2005,绵阳市)如图,在△ABC中,以AB为直径的⊙O交BC于D,请你添加一个条件,使△ABD≌△ACD.你添加的条件是________.

8.(2006,广东省)如图,AB是⊙O的弦,半径OC、OD分别交AB于点E、F,且$AE=BF$,请你找出线段OE与

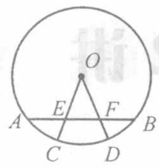
OF 的数量关系，并给予证明.



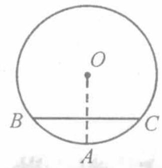
第6题图



第7题图



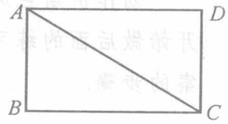
第8题图



第9题图

9.(2006，上海市)本市新建的滴水湖是圆形人工湖，为测量该湖的半径，小杰和小丽沿湖边选取 A、B、C 三根木柱，使得 A、B 之间的距离与 A、C 之间的距离相等，并测得 BC 长为 240 米，A 到 BC 的距离为 5 米，如图所示，请你帮他们求出滴水湖的半径.

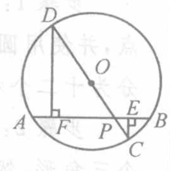
10.已知如图矩形 $ABCD$ 中，$AB=3\text{cm}$，$AD=4\text{cm}$，若以 A 为圆心，使 B、C、D 三点中至少有一点在圆内，且至少有一点在圆外，求⊙A 的半径 r 的取值范围.



第10题图

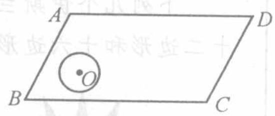
竞赛训练

11.(江苏省竞赛)如图，已知 AB 是⊙O 的一条弦，C 是劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的一个动点(点 C 与 A、B 及 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点均不重合)，作直径 CD，交 AB 于点 P. 作 $CE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AB$ 于 F. 设 $DF-CE=a$. 则 a 值是否随点 C 的移动而改变？若不改变，请加以证明；若改变，请说明理由.



第11题图

12.如图，在一块平行四边形的稻田里有一圆形的水池，其圆心为 O，为了给稻田注水，并使稻田里的水量趋于均匀，现要从水池引一条笔直的水渠(水渠的宽度忽略不计). 请你设计一种方案，使水渠两侧的稻田面积相等，并说明理由.



第12题图

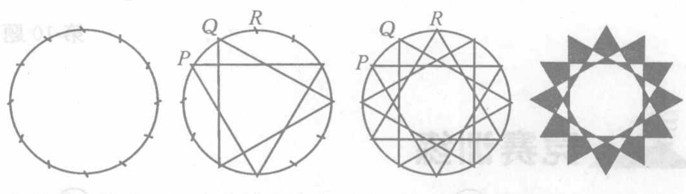
13.(2004，天津市竞赛)已知直线 l 与⊙O 交于不同的两点 E、F，CD 是⊙O 的直径，$CA\perp l$，$DB\perp l$，垂足分别为 A，B. 若 $AB=7$，$BD-AC=1$，$AE=1$. 试问：在线段 AB 上是否存在点 P，使得以点 P、A、C 为顶点的三角形与点 P、B、D 为顶点的三角形相似？若存在，求出 AP 的长；若不存在，请说明理由.

第 2 讲　圆心角和圆周角

与数学对话

伊斯兰艺术富于几何形状.伊斯兰艺术家通过欧几里得、毕达哥拉斯以及其他希腊数学家的著作而熟悉几何学,并且在他们的艺术和建筑设计中广泛应用几何图形.

创作伊斯兰风格的坛场并不困难,下列步骤提供一种作法.在你开始做后面的练习之前,先阅读有关创作一种伊斯兰风格的坛场图案的步骤.



步骤 1　步骤 2　步骤 3　步骤 4

图 2-1

步骤 1:用"雏菊法"把一个圆分为六等份.作出其中一个弧的中点,并使用圆规的同一装置沿着这个圆作出六个新的点.这样便把圆分为十二个相等的弧.

步骤 2:选定其中一点(记作 P),并连结每第四个点,你会得到一个三角形,然后把选定的点以顺时针方向移动到点 Q,并连结每第四个点,你会得到第二个三角形,再把选定的点以顺时针方向移动到点 R,并连结每第四个点,你会再得到一个三角形.

步骤 3:照样再作一次.

步骤 4:在几组区域中,用阴影修饰你的图案.

下列几个伊斯兰风格的坛场图案(如图 2-2),可分别用八边形、十二边形和十六边形作出来.

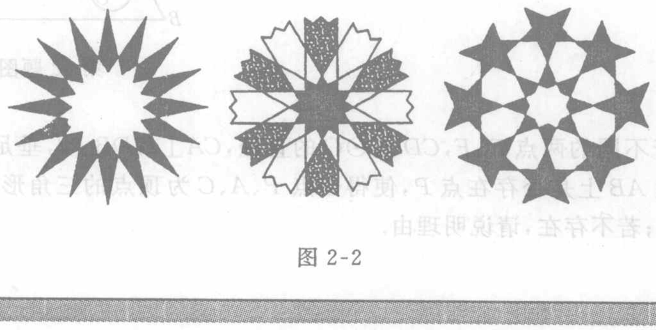


图 2-2

超级链接

我们把顶点在圆心的角叫做圆心角.

根据旋转的性质,我们可以得到:同圆或等圆中,两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等,则它们所对应的其余各组量也相等.

典例剖析

◎例1 如图 2-3，图中实线部分是半径为 9m 的两条等弧组成的游泳池，若每条弧所在的圆都经过另一个圆的圆心，则游泳池的周长为(　　).

A. 12πm　　B. 18πm　　C. 20πm　　D. 24πm

【试一试】 游泳池的周长等于两个圆的周长减去两个虚线部分的弧长.

【解】 设两圆圆心为 O_1、O_2，两圆交点为 A、B，连结 O_1O_2、O_1A、O_2A、O_1B、O_2B.

在$\odot O_1$ 中，$O_1A=O_1O_2=O_1B$.

在$\odot O_2$ 中，$O_2A=O_2B=O_1O_2$.

$\therefore \angle AO_1O_2=\angle O_2O_1B=\angle AO_2O_1=\angle BO_2O_1=60^\circ$，

$\therefore \angle AO_1B=\angle AO_2B=120^\circ$.

$\therefore$ 游泳池周长为 $2\pi\times9\times2-\frac{1}{3}\times2\pi\times9\times2=24\pi(\text{m})$.

故选 D.

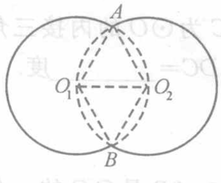


图 2-3

【变式题组】 1. 如图 2-4，在半径为 3 的$\odot O$ 中，B 是劣弧$\overset{\frown}{AC}$的中点，连结 AB 并延长到 D，使 $BD=AB$，已知 $AB=2$，则 $CD=$________.

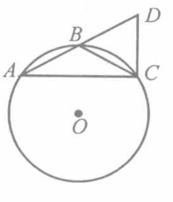


图 2-4

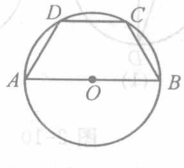


图 2-5

2. (2006，绵阳市)如图 2-5，AB 是$\odot O$ 的直径，BC、CD、DA 是$\odot O$ 的弦，且 $BC=CD=DA$，则$\angle BCD=$(　　).

A. 100°　　B. 110°　　C. 120°　　D. 135°

◎例2 (2005，山西省)如图 2-6，AB 为$\odot O$ 的直径，点 P 为其半圆上任意一点(不含 A、B)，点 Q 为另一半圆上一定点，若$\angle POA$ 为 x°，$\angle PQB$ 为 y°，则 y 与 x 的函数关系是________.

【试一试】 从图上看，y 与 x 没有直接的联系，但通过$\angle POB$，可以沟通 y 与 x 间的关系.

【解】 $\because \angle PQB$、$\angle POB$ 分别是$\overset{\frown}{PB}$所对的圆周角和圆心角，$\therefore \angle PQB=\frac{1}{2}\angle POB$.

又$\because \angle POB=180^\circ-\angle POA$，　$\therefore y=\frac{1}{2}(180-x)$，

即 $y=90-\frac{1}{2}x$.

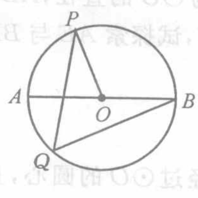


图 2-6

【变式题组】 3. 如图 2-7，已知$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，直线 O_1O_2 分别交两圆于 C、D 两点，$\angle O_1AO_2=20^\circ$，则$\angle CBD$ 等于(　　).

A. 100°　　B. 110°　　C. 120°　　D. 130°

顶点在圆上，并且两边都与圆相交的角叫做圆周角.

(1)在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半；

(2)半圆(或直径)所对的圆周角是直角，90°的圆周角所对的弦是直径.

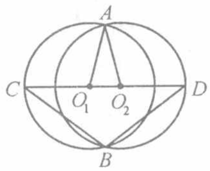


图 2-7

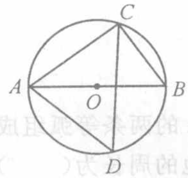


图 2-8

4.(2006,泉州市)如图 2-8,$\triangle ABC$ 为$\odot O$的内接三角形,AB 为$\odot O$的直径,点 D 在$\odot O$上,$\angle BAC=35^\circ$,则$\angle ADC=$________度.

● 例 3 (2005,河源市)如图 2-9,AB 是$\odot O$的一条弦,点 C 为$\widehat{AB}$的中点,CD 是$\odot O$的直径,过 C 点的直线 l 交 AB 所在直线于点 E,交$\odot O$于点 F.

(1)判定图中$\angle CEB$与$\angle FDC$的数量关系,并写出结论;

(2)直线 l 绕 C 点旋转且与 CD 不重合,在旋转过程中,E 点、F 点的位置也随之变化,请在下面两个备用图中分别画出 l 在不同位置时,使(1)结论仍然成立的图形.标上相应的字母,选其中一个图形给予证明.

画出 l 在旋转过程中的不同位置仍使(1)中结论成立的图形时,一定要画出与图 2-9 不同的图形,即 F 在$\widehat{AD}$上移动或画出 F 在$\widehat{BD}$上的图形都不符合要求.

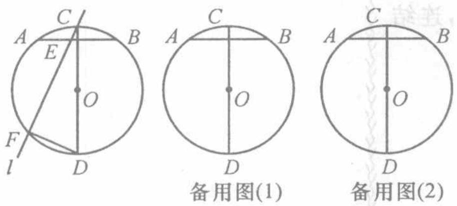


图 2-9

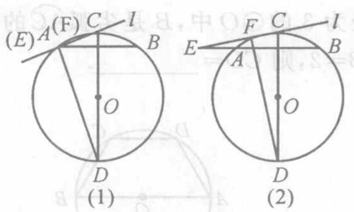


图 2-10

【试一试】 (1)由于 C 为$\widehat{AB}$的中点,CD 为$\odot O$直径,可得 $CD\perp AB$,即有$\angle CEB+\angle FCD=90^\circ$,由 CD 为$\odot O$直径可知 $\angle CFD=90^\circ$,所以有 $\angle FDC+\angle FCD=90^\circ$,于是 $\angle CEB=\angle FDC$;(2)当 l 绕 C 点旋转时,可由 F 点在圆上不同的位置得到不同的图形,即 F 点与 A 点重合,F 点在$\widehat{AC}$上(不包括 A、C 两点)或在$\widehat{CB}$上.

【解】 (1)$\angle CEB=\angle FDC$;

(2)画图如图 2-10(1),(2)所示.

证明:如图 2-10(2), $\because$ CD 是$\odot O$的直径,点 C 是$\widehat{AB}$的中点,

$\therefore$ $CD\perp AB$. $\therefore$ $\angle CEB+\angle ECD=90^\circ$.

$\because$ CD 是$\odot O$的直径, $\therefore$ $\angle CFD=90^\circ$.

$\therefore$____________________. $\therefore$____________________.

依据试一试在横线上把证明补充完整.

【变式题组】 5.如图 2-11,BC 为$\odot O$的直径,$AD\perp BC$,垂足为 D,$\widehat{BA}=\widehat{AF}$,$BF$ 与 AD 交于 E,试探索 AE 与 BE 的关系,并进行证明.

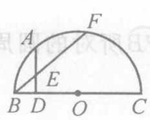


图 2-11

在圆中解有关直径问题时,常需要添加辅助线,以便利用"直径所对的圆周角是直角".

● 例 4 如图 2-12,直线 AB 经过$\odot O$的圆心,且与$\odot O$相交于 A、B 两点,点 C 在$\odot O$上,且$\angle AOC=30^\circ$,点 P 是直线 AB 上一个动点(与点 O 不重合),直线 PC 与$\odot O$相交于点 Q,问:是否存在点 P,使 $QP=QO$?如果存在,那么这样的 P 点共有几个?并求出$\angle OCP$的大小;如果不存在,请说明理由.

【试一试】 由于 C 点是固定的,而点 P 可以在 AB 上运动,因此可观察点 P

在解题时运用数形结合的思想,用建立方程的方法,将几何问题转化为代数问题.

(1)本题通过同圆的半径相等,将圆的问题转化为等腰三角形问题;

(2)本题既是存在性问题,又是