针对“联赛一试”，兼顾“数学高考”

高中数学联赛一试
知识与方法

全国高中数学联赛试题研究组 编

针对一试 兼顾高考

方法延伸 能力提高

课内补充 方便实用

视角全面 内容丰富

选材经典 体例科学

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

编写说明

从2008年起，全国大部分省份都开始实行新一轮的课程改革。然而，目前市场上能与新课程标准相匹配的，适合课堂教学模式的竞赛类辅导用书几乎没有。为了更好地帮助广大数学爱好者进一步学习高中数学奥林匹克竞赛的知识和方法，同时也为了给广大教师和参加高考的优秀学生提供优质的教学资源和学习资源，提高教师的教学水平和学生解决问题、分析问题的能力，我们组织了全国各地数学奥林匹克高级教练与特级教师，精心编写了这套丛书(共五种)。

本套丛书主要特色是：

一、同步辅导、循序渐进

从竞赛的实际需要出发，将传统的竞赛内容与新教材内容，讲解与训练等有机地结合起来。其中，基础知识部分与现行模块教材同步，是教材的补充和延伸；专题部分是高中竞赛必须掌握的重要思想和方法，选题难度控制在全国联赛二试水平，部分题目与CMO、IMO试题水平相当。

二、方法创新、培养能力

丛书注重解题方法创新，新颖题目多视角分析，经典题目新视角分析，新颖的解题思路对学生具有一定的启发性和思考性，也为教师教学提供了良好的素材。同时，丛书也吸收了新课标改革成果，编拟了许多创新的题目。

三、源于实践、重在实用

丛书大多数内容是作者在讲义的基础上逐步修改与完善的，因此它可以直接应用到课堂教学中，是一套经得起推敲的竞赛辅导丛书。

由于编写时间仓促，编者水平有限，书中纰漏在所难免，敬请专家与读者批评指正。

前 言

学会科学的解题方法，总结正确的解题规律，可以起到举一反三、事半功倍的效果.《高中数学联赛一试知识与方法》主要针对数学竞赛中常用的解题技巧，归纳、总结具有代表性的解题方法. 学会运用这些解题方法，不但能帮助你在奥林匹克数学竞赛的初赛和复赛中一展身手，更能帮助你在高考中实现自己的梦想！

本书以“学会科学的解题方法，总结正确的解题规律”，针对“联赛一试”，兼顾“数学高考”为宗旨，以新教学大纲为指导，以“突出方法讲解、培养解题技能、拓展创新思维”为重点，按照新教材的全部知识和联赛的测试范围编写. 本书编写基本体例：

知识方法扫描——以简短的篇幅介绍本节学习哪些方法，如何运用，达到什么目标.

经典例题解析——列举几个经典、新颖的例题，解析并归纳解题的方法和技巧.

同步思维演练——相似题型实战演练，弥补不足，提升能力并附答案.

阅读和使用本书可以开拓思路，增强学习数学的兴趣和意志，提高逻辑思维和创造性思维的能力. 全书共有十四讲，虽是相辅相成、互相联系，但各节都具有相对的独立性，可以独立运用，因此本书介绍下列四种用法：

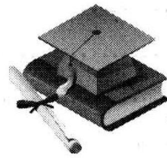
(1) 读者根据自己的学习进度，选择使用；

(2) 按自己的兴趣先浏览全书，然后细读；

(3) 按需要查阅有关方法和例题；

(4) 系统学习全书或书中的某一部分.

学习时要认真研读有关解释，仔细揣摩例题，以收举一反三之功.



目　录

第一讲

集合与常用逻辑用语

数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏得极深. 数学是科学之王.

高 斯

知识方法扫描

轻轻地告诉你：

梳一梳，理一理，基本方法的梳理与积累，永远是学习的第一生命！

1. 集合的概念及其运算

(1) 元素与集合之间的关系是“属于”与“不属于”的关系，分别用符号“$\in$”和“$\notin$”表示；而集合与集合的关系则是“包含”与“不包含”的关系，表示它们关系的符号有“$\subseteq$”，“$\subsetneqq$”，“$\not\subseteq$”，“$=$”等.

特别注意：对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，并且 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；对于集合 A，B，C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

(2) 若有限集 A 有 n 个元素，则 A 的子集有 2^n 个，真子集有 2^n-1 个，非空子集有 2^n-1 个.

(3) 集合的运算是每年高考和竞赛的热点之一，其内容多为对子集、交集、并集、全集、补集概念的理解和转化，集合运算性质的运用. 求解集合问题时要注意：① 分清集合类别(数集、点集、图形集等)，然后确定求解方法：与点集、抽象型集合有关的问题常采用韦恩图法或特殊集合法；与不等式相关的集合运算问题常结合数轴(要关注端点的取舍). ② 理解集合语言，特别是解决新定义集合问题时，要深刻理解所给集合的含义，合理处理集合信息.

2. 四种命题

用 p，q 表示一个命题的条件和结论，$\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示条件和结论的否定，那么原命

题：若 p 则 q；逆命题：若 q 则 p；否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

3. 四种命题的真假关系

(1) 两命题互为逆否命题，它们同真或同假(如原命题和逆否命题，逆命题和否命题).

(2) 两命题互为逆命题，或否命题，它们的真假性是否一致不确定.

4. 充要条件

(1) 若 $p \Rightarrow q$ 成立，则 p 是 q 成立的充分条件，q 是 p 成立的必要条件.

(2) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 p 的必要不充分条件.

(3) 若 $p \Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分必要条件.

5. 逻辑联结词

(1) 或：两个简单命题至少一个成立.

(2) 且：两个简单命题都成立.

(3) 非：对一个命题的否定.

6. 真值表

p	q	p 或 q	p 且 q	非 p
真	真	真	真	假
真	假	真	假	假
假	真	真	假	真
假	假	假	假	真

7. 全称量词和存在量词

(1) 全称量词："所有"、"任意一个"、"一切"、"每一个"、"任给".

(2) 存在量词："存在一个"、"至少一个"、"有一个"、"至少有一个"、"某个"、"有的".

8. 和"非"相关的几个重要结论

(1) 非命题和否命题的区别：非命题是对一个简单命题的否定，而否命题是对命题条件和结论的同时否定.

(2) p 或 q 的否定：$\neg p$ 且 $\neg q$；p 且 q 的否定：$\neg p$ 或 $\neg q$.

(3) 常见词语的否定：

词　语	等于	大于	小于	是	都是	至多有一个	至少有一个	一定
词语的否定	不等于	不大于	不小于	不是	不都是	至少有两个	一个也没有	不一定

经典例题解析

真诚地教诲你：

看一看，悟一悟，流畅的思维方法，规范的解题步骤，准确无误的答案，是永恒的学习主旋律.

1. 集合的基本题型和运算方法

(1) 集合概念与基本运算型

这类题型主要考查集合、子集、交集、并集、补集等基本概念及相关的基本运算. 解答此类问题要注意以下三点：① 先弄清集合中的元素是什么(是数，还是点，等)，即弄清楚集合中元素的特性；② 一般抽象集合问题往往借助于韦恩图求解，数集之间的运算常用数轴直观显示，对于有限集问题常用穷举法求解；③ 因集合运算的题目多以选择题的形式出现，所给集合又常常是非具体的集合，因此特例法也是解决这类问题的常用方法.

例 1 设集合 $U=\{1, 2, 3, 4\}$，$A=\{1, 2\}$，$B=\{2, 4\}$，则 $\complement_U(A\cup B)$ 等于(　　).

(A) $\{2\}$　　(B) $\{3\}$　　(C) $\{1, 2, 4\}$　　(D) $\{1, 4\}$

解读 $\because$ $A\cup B=\{1, 2, 4\}$，$\therefore$ $\complement_U(A\cup B)=\{3\}$. 故选 B.

评注 本题主要考查集合的运算. 这种以整数数字为元素的集合问题通常在高考试题中出现. 解答此类题型的关键是明确集合的元素及正确把握集合的运算关系.

例 2 设 $A=\left\{(x, y)\,\middle|\,\begin{cases}y=x\\ y=x+1\end{cases}\right\}$，$B=\left\{(x, y)\,\middle|\,\begin{cases}y=2x\\ y=-2x+4\end{cases}\right\}$，判断 A 是否是 B 的子集.

解读 如图 1-1，正比例函数 $y=x$ 与一次函数 $y=x+1$ 的图象为两条直线，并且这两条直线互相平行，

所以 $A=\left\{(x, y)\,\middle|\,\begin{cases}y=x\\ y=x+1\end{cases}\right\}=\varnothing$.

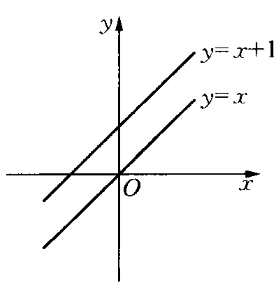


图 1-1

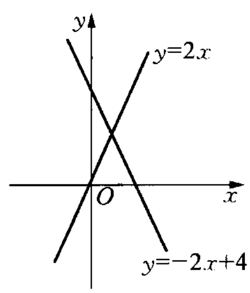


图 1-2

如图 1-2，正比例函数 $y=2x$ 与一次函数 $y=-2x+4$ 的图象都是直线，方程组 $\begin{cases}y=2x,\\ y=-2x+4\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}$

所以 $B=\left\{(x, y) \middle| \begin{cases} y=2x \\ y=-2x+4 \end{cases}\right\}=\{(1, 2)\}$.

综上，知 $A\subseteq B$.

评注 $A\subseteq B$ 型集合关系的判定：

方法 1：若 $A=\varnothing$，则 $A\subseteq B$ 恒成立.

方法 2：若 $A\neq\varnothing$，则需证明对任意的 $x\in A$，都有 $x\in B$ 成立.

例 3 设 $A=\{x \mid 2m-1<x<m+3\}$，$B=\{x\in \mathbf{R} \mid x^2+1=0\}$，问：$m$ 为何值时，$A=B$?

解读 由题意，知 $B=\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+1=0\}=\varnothing$. 欲使 $A=B$，必须且只需 $A=\varnothing$.

因此，由 $2m-1\geqslant m+3$，可得 $m\geqslant 4$，此时 $A=\{x \mid 2m-1<x<m+3\}=\varnothing$.

综上，当 $m\geqslant 4$ 时，有 $A=B$.

评注 $A=B$ 型集合关系的判定：

判断集合 $A=B$，根据集合相等和子集的定义常采用互相包含法，具体表现为：

方法 1：若 $A=\varnothing$，且 $B=\varnothing$，则 $A=B$.

方法 2：若 $A=\varnothing$，且 $B\neq\varnothing$，则需证明 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$.

例 4 已知集合 $A=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid x^2-5x+6\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$，求证：$B\subsetneqq A$.

解读 由 $A=\{x \mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，得 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$.

由 $B=\{x \mid x^2-5x+6\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$，得 $B=\{2, 3\}$.

因为 $2, 3\in B$，且 $-1<2<3=3$，所以，$B\subseteq A$.

又因为 $-1\in A$，但 $-1\notin B$，所以 $B\subsetneqq A$.

评注 本例中，在证明 $B\subseteq A$ 之后，还要找到一个 $x\in A$，但 $x\notin B$，我们把 x 取作 -1，即 $x=-1$ 时即满足此条件. 此类问题，找 x 是比较随意的，只要找到一个就可以了，如本例中 x 还可以取 $0, 1, \dfrac{3}{2}$ 等.

评注 $A\subsetneqq B$ 型集合关系的判定：

方法 1：若 $A=\varnothing$，则只需证明 $B\neq\varnothing$.

方法 2：若 $A\neq\varnothing$，则需证明 $A\subseteq B$，且至少有一个 $x\in B$ 满足 $x\notin A$.

(2) 集合与函数结合型

此类试题主要考查集合运算及函数的定义域、值域、图象及性质，解答此类问题要注意以下四点：① 解决集合与函数的综合问题时，要注意灵活运用集合的相关知识，掌握函数定义域、值域的求法及图象与性质的应用；② 要充分利用数形结合的思想；③ 要弄清集合中元素是什么(自变量 x、函数值 y 还是图象上的点)；④ 对于含参数的集合问题，一般需要对参数进行讨论，要特别注意检验集合的元素是否满足“三性”，还要提防“空集”这一陷阱.

例 5 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的定义域为 M，$g(x)=\ln(1+x)$ 的定义域为 N，则 $M\cap N$ 等于(　　).

(A) $\{x \mid x>-1\}$　　　　(B) $\{x \mid -1<x<1\}$

(C) $\{x \mid x<1\}$ (D) $\varnothing$

解读 首先将集合 M 与 N 具体化,即集合 $M=\{x \mid 1-x>0\}=\{x \mid x<1\}$,集合 $N=\{x \mid 1+x>0\}=\{x \mid x>-1\}$,则 $M \cap N=\{x \mid -1<x<1\}$. 故选 B.

评注 此题主要考查集合的运算、函数的定义域及不等式的解法. 解答此题的步骤:① 通过解不等式求出函数的定义域确定集合 M, N;② 根据交集的运算法则求 $M \cap N$.

例 6 给定自然数 $a \geqslant 2$,集合 $A=\{y \mid y=a^x,\ x \in \mathbf{N}^*\}$, $B=\{y \mid y=(a+1)x+b,\ x \in \mathbf{N}^*\}$,试问在区间$[1, a]$上是否存在实数 b,使 $C=A \cap B \neq \varnothing$. 若存在,求出 b 的一切可能的取值及相应的集合 C;若不存在,试说明理由.

解读 设存在实数 $b \in [1, a]$,使 $C=A \cap B \neq \varnothing$.

设 $m_0 \in C$,则 $m_0 \in A$,且 $m_0 \in B$.

又设 $m_0=a^t(t \in \mathbf{N}^*)$, $m_0=(a+1)s+b\ (s \in \mathbf{N}^*)$,

则 $a^t=(a+1)s+b$. $\therefore\ s=\dfrac{a^t-b}{a+1}$.

$\because\ a, t, s \in \mathbf{N}^*$,且 $a \geqslant 2$, $\therefore\ a^t-b$ 能被 $a+1$ 整除.

① 当 $t=1$ 时, $s=\dfrac{a^t-b}{a+1} \in \mathbf{N}^*$;

② 当 $t=2n\ (n \in \mathbf{N}^*)$ 时,当且仅当 $b=1$, a^t-b 能被 $a+1$ 整除;

③ 当 $t=2n+1\ (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, $s=\dfrac{a^{2n+1}-b}{a+1}=\dfrac{a\left(a^{2n}-\dfrac{b}{a}\right)}{a+1}$,当且仅当 $\dfrac{b}{a}=1$,即 $b=a$, a^t-b 能被 $a+1$ 整除.

故在区间$[1, a]$上存在实数 b,使 $C=A \cap B \neq \varnothing$ 成立,且当 $b=1$ 时, $C=\{y \mid y=a^{2x},\ x \in \mathbf{N}^*\}$;当 $b=a$ 时, $C=\{y \mid y=a^{2x+1},\ x \in \mathbf{N}^*\}$.

(3) 集合与三角函数结合的开放型问题

解答此类试题的关键是要熟悉各种三角变换.

例 7 设集合 $M=\left\{x \middle| x=2\cos^2\dfrac{5m\pi}{6}-1,\ m \in \mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{x \middle| x=1-2\sin^2\dfrac{n\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}\right\}$,试确定集合 M, N 之间的关系.

解读 $\because$

$$\begin{aligned} M&=\left\{x \middle| x=2\cos^2\frac{5m\pi}{6}-1,\ m \in \mathbf{Z}\right\}\\ &=\left\{x \middle| x=\cos\frac{5m\pi}{3},\ m \in \mathbf{Z}\right\}\\ &=\left\{x \middle| x=\cos\left(2m\pi-\frac{m\pi}{3}\right),\ m \in \mathbf{Z}\right\}\\ &=\left\{x \middle| x=\cos\frac{m\pi}{3},\ m \in \mathbf{Z}\right\}, \end{aligned}$$

又$\because$ $N=\left\{x \middle| x=1-2\sin^2\dfrac{n\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}\right\}$

$$=\left\{x\,\middle|\,x=\cos\frac{m\pi}{3},\ m\in\mathbf{Z}\right\},$$

$\therefore\quad M=N.$

(4) 集合与不等式结合型

由于集合与不等式的解集紧密联系，因此，高考和竞赛命题者常常借助不等式的解集来给出集合. 解答此类问题要注意以下四点：① 能化简的集合先化简，以便使问题进一步明朗化，同时掌握求解各类不等式的解题方法，如穿针引线法、零点分区间法、平方法、换元法等；② 在进行集合的运算时，不等式解集端点值的合理取舍是难点之一，可以采用验证的方法进行取舍；③ 如果集合中的元素具有一定的几何意义，则可合理运用数形结合思想，在明确弄清了集合中元素的几何意义后，可分别用韦恩图、数轴或坐标平面表示出相应的集合；④ 合理运用数轴来表示集合是解决含参数不等式与集合问题的常用方法.

例 8 记关于 x 的不等式 $\dfrac{x-a}{x+1}<0$ 的解集为 P，不等式 $|x-1|\leqslant 1$ 的解集为 Q.

(1) 若 $a=3$，求 P；

(2) 若 $Q\subseteq P$，求正数 a 的取值范围.

解读 (1) 由 $\dfrac{x-3}{x+1}<0$，得 $P=\{x\mid -1<x<3\}$.

(2) $Q=\{x\mid |x-1|\leqslant 1\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$.

由 $a>0$，得 $P=\{x\mid -1<x<a\}$.

又 $Q\subseteq P$，

所以 $a>2$，即 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

评注 本题主要考查集合的运算、绝对值不等式与分式不等式的解法. 在高考和竞赛中集合与不等式、方程等知识相交汇的小型选择题、填空题通常是考查的重点，此类题型只要能正确解出各个不等式，再结合数轴就可解决了.

(5) 集合与数列结合的开放型问题

解答此类试题时，要注意集合元素的无序性，而数列的各项是有序的.

例 9 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_4=90$，前 4 项和 $S_4=120$；等差数列 $\{b_n\}$ 中，$b_2+b_4=34$，前 4 项和 $T_4=60$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设集合 $A=\{a_1^2,a_2^2,\cdots,a_n^2,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，试判断集合 A 与集合 B 之间存在什么关系.

解读 (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q.

由题意，得 a_1，q 满足方程组 $\begin{cases}a_1q(1+q^2)=90,\\ \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=120.\end{cases}$

解方程组，得 $\begin{cases}a_1=3,\\ q=3.\end{cases}$ 所以 $a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$.

设等差数列 $\{b_n\}$ 的首项为 b_1，公差为 d.

由题意,得 b_1, d 满足方程组 $\begin{cases}2b_1+4d=34,\\ 4b_1+\dfrac{3\times 4}{2}d=60.\end{cases}$

解方程组,得 $\begin{cases}b_1=9,\\ d=4.\end{cases}$

所以 $b_n=9+4(n-1)=5+4n$.

(2) 显然 $b_n\in A$ 不一定成立,如取 $n=2$, 有 $b_2=13$ 不能表示成 3^{2n} 的形式,所以 $b_2\notin A$.

$a_n^2=3^{2n}$ 能否表示成 $5+4m(m\in\mathbf{N}^*)$ 的形式呢? 直接变形有困难,可考虑用数学归纳法来讨论.

① 当 $n=1$ 时, $a_1^2=9=5+4$, 所以 $a_1^2\in B$ 成立.

② 假设 $n=k$ 时, $a_k^2\in B$ 成立,即 $a_k^2=3^{2k}=5+4p(p\in\mathbf{N}^*)$. 那么 $n=k+1$ 时, $a_{k+1}^2=3^{2(k+1)}=9\times 3^{2k}=9(5+4p)=45+36p=5+40+36p=5+4(10+9p)$.

由 $p\in\mathbf{N}^*$, 知 $10+4p\in\mathbf{N}^*$.

令 $m=10+4p\in\mathbf{N}^*$, 所以 $a_{k+1}^2=5+4m\in B$.

综合①②,知对任意的正整数 n,都有 $a_n^2\in B$.

所以集合 A 与集合 B 之间存在的关系是 $A\subsetneqq B$.

(6) 集合与解析几何结合型

此类试题主要考查直线、圆及圆锥曲线上的点所构成的集合问题.解答此类问题要注意以下三点:① 利用所涉及的曲线画出满足条件的点构成的图形(直线或圆锥曲线或区域等)进行求解;② 当涉及直线与圆锥曲线的位置关系的集合问题时,一般要转化为一元二次方程,并利用其判别式及根与系数的关系等相关知识进行求解;③ 注意集合语言与解析几何语言间的相互转化.

例 10 设 m 为实数,若 $\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x-2y+5\geqslant 0\\ 3-x\geqslant 0\\ mx+y\geqslant 0\end{cases}\right\}\subseteq\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 25\}$, 则 m 的取值范围是________.

解读 本题实质就是这三条直线确定的可行域在圆形区域内(包括边界).因为三条直线确定的可行域是一个三角形区域,三个顶点坐标为 $(3,4)$, $(3,-3m)$, $\left(-\dfrac{5}{2m+1},\dfrac{5m}{2m+1}\right)$, 所以

$$\begin{cases}9+9m^2\leqslant 25\Rightarrow -\dfrac{4}{3}\leqslant m\leqslant\dfrac{4}{3},\\ \left(-\dfrac{5}{2m+1}\right)^2+\left(\dfrac{5m}{2m+1}\right)^2\leqslant 25\Rightarrow m\geqslant 0,\text{或 } m\leqslant -\dfrac{4}{3},\\ -m<\dfrac{1}{2}\Rightarrow m>-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

解得 $\quad 0\leqslant m\leqslant\dfrac{4}{3}$.

故 m 的取值范围为 $0 \leqslant m \leqslant \frac{4}{3}$.

评注 本题主要考查线性规划及圆的相关知识.理解集合主要是抓住其中的代表元素,注意区分不同代表元素的实际意义,它也是解决集合类问题的一个关键.易错点是不能正确理解集合的含义.

例 11 设 a, b 是两个实数,集合 $A=\{(x, y) \mid x=n, y=na+b, n \in \mathbf{Z}\}$, $B=\{(x, y) \mid x=m, y=3m^2+15, m \in \mathbf{Z}\}$, $C=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 144\}$,讨论是否存在 a 和 b,使得:(1) $A \cap B \neq \varnothing$;(2) $(a, b) \in C$ 同时成立.

解读 如果 a 和 b 使得条件(1)成立,于是存在整数 m 和 n,使得 $(n, na+b)=(m, 3m^2+15)$,即 $\begin{cases} n=m, \\ na+b=3m^2+15. \end{cases}$

由此得出,存在整数 n,使得 $na+b=3n^2+15$,即 $na+b-3n^2-15=0$.

这个等式表明点 $P(a, b)$ 在直线 l: $nx+y-3n^2-15=0(n \in \mathbf{Z})$ 上.

又若 a 和 b 使得条件(2)成立,于是 $a^2+b^2 \leqslant 144$ 成立,即 $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant 12$.

记从原点(即圆心)到直线 l 的距离为 d,于是

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{3(n^2+1)+12}{\sqrt{n^2+1}} \geqslant \frac{2\sqrt{3(n^2+1) \times 12}}{\sqrt{n^2+1}}=12.$$

当且仅当 $3(n^2+1)=12$,即 $n^2=3$ 时,上式中等号才成立.

由于 $n \in \mathbf{Z}$,因此 $n^2 \neq 3$,即上式中等号不能成立.

所以 $d>12$,即 $\sqrt{a^2+b^2}>12$.

故同时满足条件(1),(2)的 a 和 b 不存在.

2. 处理充分与必要条件的常用策略

(1) 直接利用定义进行判定

① 若 $p \Rightarrow q$,且 $q \nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分而不必要条件,q 是 p 的必要而不充分条件;

② 若 $q \Rightarrow p$,且 $p \nRightarrow q$,则 p 是 q 的必要而不充分条件,q 是 p 的充分而不必要条件;

③ 若 $p \Rightarrow q$,且 $q \Rightarrow p$,则 p 是 q 的充要条件(此时 q 也是 p 的充要条件);

④ 若 $p \nRightarrow q$,且 $q \nRightarrow p$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

例 12 “$\sin A=\frac{1}{2}$”是“$A=30^\circ$”的________条件.

解读 记条件为 p: $\sin A=\frac{1}{2}$,结论为 q: $A=30^\circ$. 由条件 p 得 $A=k \cdot 360^\circ+30^\circ$ 或 $A=k \cdot 360^\circ+150^\circ(k \in \mathbf{Z})$,而 $A=30^\circ$ 仅为其中的一个值,则 $p \nRightarrow q$;但是,当 $A=30^\circ$ 时,$\sin A=\frac{1}{2}$ 成立,即 $q \Rightarrow p$,故 p 是 q 的必要而不充分条件.

(2) 利用命题的四种形式进行判定

① 如果原命题成立,逆命题不成立,则原命题的条件是结论的充分而不必要条件;

② 如果原命题不成立，逆命题成立，则原命题的条件是结论的必要而不充分条件；

③ 如果原命题和它的逆命题都成立，则原命题的条件是结论的充要条件；

④ 如果原命题和它的逆命题都不成立，则原命题的条件是结论的既不充分也不必要条件.

例 13 已知数列 $\{a_n\}$，那么"对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上"是"$\{a_n\}$ 为等差数列"的________条件.

解读 构造原命题："若对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上，则 $\{a_n\}$ 为等差数列"，此命题为真. 其逆命题："若 $\{a_n\}$ 为等差数列，则对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上"，此命题为假. 所以"对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，点 $P_n(n, a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上"是"$\{a_n\}$ 为等差数列"的充分而不必要条件.

(3) 利用集合的子集关系进行判定

① 若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；

② 若 $A\subsetneqq B$，则 A 是 B 的充分而不必要条件，B 是 A 的必要而不充分条件；

③ 若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件；

④ 若 $A\not\subseteq B$，且 $A\not\supseteq B$，则 A 是 B 的既不充分也不必要条件.

例 14 若非空集合 $M\subsetneqq N$，则"$a\in M$ 或 $a\in N$"是"$a\in(M\cap N)$"的________条件.

解读 由于 $M\subsetneqq N$，所以 $M\cup N=N$，$M\cap N=M$. 又由并集的定义知：$a\in M$ 或 $a\in N\Leftrightarrow a\in(M\cup N)=N\Leftrightarrow a\in N$，$a\in(M\cap N)=M\Leftrightarrow a\in M$，而 $M\subsetneqq N$，所以"$a\in M$ 或 $a\in N$"是"$a\in(M\cap N)$"的必要而不充分条件.

(4) 利用一些反例进行判断

例 15 给出如下三个命题：

① 四个非零实数 a, b, c, d 依次成等比数列的充要条件是 $ad=bc$；

② 设 $a, b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq 0$，若 $\frac{a}{b}<1$，则 $\frac{b}{a}>1$；

③ 若 $f(x)=\log_2 x$，则 $f(|x|)$ 是偶函数.

其中假命题的序号是(　　).

(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ①③　　(D) ①②③

解读 对于①，四个非零实数 a, b, c, d 依次成等比数列，能推出 $ad=bc$，但由 $ad=bc$ 不能推出四个非零实数 a, b, c, d 依次成等比数列，如当 $a=-1$，$b=2$，$c=4$，$d=-8$ 时，$ad=bc$，但此时 a, b, c, d 不成等比数列，故①为假命题. 对于②，令 $a=-2$，$b=1$，则 $\frac{a}{b}=-2<1$，但 $\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}<1$，故②为假命题. 对于③，$f(|x|)$ 是偶函数，为真命题. 综上，应选 A.

评注 判定充分条件与必要条件常常需要对条件与结论能否相互推出作出判断，而对于条件与结论较抽象的问题，常常通过举反例作出判断.

(5) 利用数形结合进行判断

例 16 已知 p 是 r 的充分条件而不是必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. 现有下列命题：