

武汉大学理科教材

模糊(Fuzzy)数学导论

欧阳绵
彭祖赠 等
李必祥

武汉大学出版社

Fuzzy 数 学 导 论

(以编写章次为序)

欧阳绵	彭祖赠	唐旭章
陈贻源	李必祥	邓聚龙
栗载福	黄振德	蔡训武
卢灵镒	裴礼文	

武汉大学出版社

内 容 提 要

Fuzzy数学是研究和处理Fuzzy性现象和事物的数学。自1965年诞生以来获得了迅速的发展，它的应用相当广泛，几乎渗透到自然科学、工程技术以及社会科学的各个领域。因此，它具有强大的生命力，正在茁壮成长为一个新的数学分支。

本书深入浅出地介绍了Fuzzy集的基本概念和理论、基本方法以及在一些领域中的应用，并在每章之后附有相当数量的习题，可作为理工科院校高年级选修课的教材，也可作为科研工作者、工程技术人员以及大专院校有关专业师生的自学读物。

责任编辑 陈礼璿

Fuzzy数学导论

欧阳绵 彭祖赠 李必祥等

*

武汉大学出版社出版

(武昌 珞珈山)

新华书店湖北发行所 武汉大学出版社总印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 12.5印张 317千字

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

印数1—1400

ISBN 7-307-00277-9/O·26

定价：2.50元

前 言

Fuzzy*数学从1965年L·A·Zadeh发表第一篇论文“Fuzzy集”开始,十多年来获得了迅速的发展,它的应用范围已逐步伸向国民经济和科学技术的各个领域。同时,它那新颖的思想已渗透到经典数学的各个分支,不断地推广和丰富着经典数学的概念和理论,已初步显示出它强大的生命力,而正在茁壮成长为一个新的数学分支。

全书共分十七章,主要内容包括:预备知识;Fuzzy集的概念及理论;Fuzzy集理论的应用(如,Fuzzy模式识别,Fuzzy聚类分析,Fuzzy综合评判,Fuzzy控制,Fuzzy规划等)以及关于经典数学部分分支的Fuzzy化。其目的是为了力求系统而全面地介绍Fuzzy数学的基础理论及其应用,作为理工院校高年级学生选修课的教材。在学生掌握了这些基础知识后,可以考虑联系实际,着手解决实际问题,或进一步阅读有关文献进行研究工作,都不致有太大困难。本书也可作为科研工作者、工程技术人员以及大专院校有关专业师生的自学读物。

在编写时,对于重要概念的引进,力求做到前后联系,要求明确,有本有源,使初学者容易接受而不觉突然。例如,Fuzzy集概念的引入,首先简明扼要地叙述了普通集有明确的边界,它所研究的对象是分明的事物和现象,而Fuzzy集没有明确的边界,它所研究的对象是那些Fuzzy的事物和现象。

对于文字叙述力求做到简明扼要、通俗易懂,推理尽可能详

* “Fuzzy”一词,目前有多种译名,如“模糊”、“不分明”、“弗晰”、“乏晰”等,使初学者阅读很感不便。本书不译,采用原名。

尽，对所引用的理论，特殊的都有交待，无需参考其它书刊，以减少读者自学的困难。因为是介绍基础理论，所以对某些专门知识而关系不大的内容，均未列入；而对一些基本理论除了详细证明外，还举例加以说明，这样既可对已学的基础理论加深理解，同时，又培养了实践能力。

本书系集体编写的，参加人员有：（以编写章次为序）欧阳绵（前言、第一章、第二章、参考文献）、彭祖赠（第三章、第四章、第六章、第七章、第十四章）、唐旭章（第五章）、陈贻源（第八章）、李必祥（第九章、第十章）、邓聚龙（第十一章、第十二章）、栗载福（第十三章）、黄振德（第十四章）、蔡训武（第十五章）、卢灵镒（第十六章）、裴礼文（第十七章）等。本书是从1981年开始编写的。当时作为讲习班及理工科院校高年级选修课的讲义。经过试用以后，于1982年大多数担任编写工作的同志，对自己所写部分作了一次修改，增加了内容，补充了章节，继续作为讲习班和选修课的讲义。此次他们对原稿又作了修改，最后由欧阳绵、彭祖赠、李必祥三同志负责进行全面修改定稿，调整了内容，统一了语调和符号，补充了习题和参考文献，但由于时间匆促，水平所限，书中错误和不妥之处自属难免，敬希广大读者惠予指正。

欧阳绵

一九八三年九月

目 录

前言

第一章 预备知识

§ 1 · 1	集的概念及其运算	1
§ 1 · 2	关系与映射	5
§ 1 · 3	凸集	10
§ 1 · 4	格	12
§ 1 · 5	同态与同构	17

第二章 Fuzzy集

§ 2 · 1	Fuzzy集的概念及其表示法	24
§ 2 · 2	Fuzzy集的运算及其性质	32
§ 2 · 3	Fuzzy关系	39
§ 2 · 4	凸Fuzzy集	45

第三章 Fuzzy原理

§ 3 · 1	分解定理	49
§ 3 · 2	扩张原理	53
§ 3 · 3	Fuzzy数	56
§ 3 · 4	I_1 -单调族	60
§ 3 · 5	Fuzzy集的表现定理	67

第四章 Fuzzy集的贴近度与模式识别

§ 4 · 1	Fuzzy集间的贴近度	76
§ 4 · 2	Fuzzy集间的距离	84
§ 4 · 3	Fuzzy模式识别的基本方法	87

§ 4 · 4	刻划模型的方法举例	91
第五章 Fuzzy矩阵		
§ 5 · 1	Fuzzy矩阵的概念及运算	96
§ 5 · 2	Fuzzy矩阵的基本定理	103
§ 5 · 3	Fuzzy分块矩阵	106
§ 5 · 4	广义Fuzzy逆矩阵	109
第六章 Fuzzy图		
§ 6 · 1	图与Fuzzy图	121
§ 6 · 2	最优匹配问题	124
§ 6 · 3	连通强度与最大树	132
第七章 Fuzzy聚类分析		
§ 7 · 1	Fuzzy等价关系	141
§ 7 · 2	Fuzzy聚类方法	145
§ 7 · 3	实际问题的聚类方法	150
§ 7 · 4	Fuzzy分划与最优聚类	154
第八章 Fuzzy综合评判与Fuzzy关系方程		
§ 8 · 1	Fuzzy综合评判	160
§ 8 · 2	Fuzzy关系方程	162
§ 8 · 3	Fuzzy关系方程的Tsukamoto的解法	164
§ 8 · 4	Fuzzy关系方程的消去解法	170
§ 8 · 5	Fuzzy关系方程的简要解法	178
第九章 Fuzzy语言与Fuzzy文法		
§ 9 · 1	Fuzzy语言	186
§ 9 · 2	Fuzzy文法	190
§ 9 · 3	Fuzzy文法的代数表示	193
§ 9 · 4	Fuzzy语言与Fuzzy自动机	196
§ 9 · 5	Fuzzy算子	203
第十章 Fuzzy逻辑		
§ 10 · 1	Fuzzy逻辑公式	208

§ 10 · 2	Fuzzy公式的化简·····	213
§ 10 · 3	Fuzzy组合回路·····	217
§ 10 · 4	Fuzzy推理·····	219
§ 10 · 5	一个弱谓词演算系统·····	222
§ 10 · 6	一个Fuzzy诊断模型·····	228
第十一章 Fuzzy控制与系统		
§ 11 · 1	控制系统·····	236
§ 11 · 2	Fuzzy控制·····	237
§ 11 · 3	Fuzzy控制表·····	246
§ 11 · 4	局势隶属度·····	255
第十二章 Fuzzy规划		
§ 12 · 1	Fuzzy规划·····	261
§ 12 · 2	Fuzzy对策·····	269
§ 12 · 3	Fuzzy动态规划·····	273
第十三章 可能性理论及其应用		
§ 13 · 1	可能性分布的概念·····	281
§ 13 · 2	可能性测度与可能性信息·····	284
§ 13 · 3	N阶可能性分布·····	290
§ 13 · 4	边缘可能性分布、条件可能性分布及可能性限定·····	292
§ 13 · 5	可能性理论的一些应用·····	295
第十四章 Fuzzy测度与Fuzzy积分		
§ 14 · 1	测度概念·····	302
§ 14 · 2	Fuzzy测度·····	306
§ 14 · 3	Fuzzy积分·····	313
第十五章 Fuzzy概率		
§ 15 · 1	Fuzzy事件的概率·····	322
§ 15 · 2	Fuzzy事件的语言概率·····	327
§ 15 · 3	语言变量的线性组合·····	332

第十六章 Fuzzy群

§ 16 · 1	Fuzzy子广群和Fuzzy子群胚	338
§ 16 · 2	Fuzzy子群	343
§ 16 · 3	Fuzzy正规子群	353
§ 16 · 4	Fuzzy商群	358

第十七章 Fuzzy拓扑空间

§ 17 · 1	Fuzzy拓扑空间	363
§ 17 · 2	重域	371
§ 17 · 3	闭包与聚点	376
§ 17 · 4	F-连续性	380

参考文献

第一章 预备知识

本章扼要介绍普通集的内容，主要包括集的概念及其运算、关系与映射、同态与同构、凸集、格等，作为今后讨论Fuzzy集的基础。

§ 1.1 集的概念及其运算

集是近代数学中最基本的概念之一，一般说来，把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来研究时，这个整体就叫做由这些事物所构成的集合，简称为集。例如，一个学校所有的学生组成一个集，所有的整数也组成一个集，…。组成集的每个事物，称为这个集的元素，简称为元。

类、族、丛等都是集的同义语。

通常用大写字母 $A, B, C, X, Y, Z, \dots$ 表示集；用小写字母 $a, b, c, x, y, z, \dots$ 表示元。

设 A 是集， a 是一个事物。若 a 是 A 中的一个事物，则称 a 为 A 的元，记为 $a \in A$ ，读作“ a 属于 A ”。若 a 不是 A 的元，记为 $a \notin A$ ，读作“ a 不属于 A ”。显然，任何一个元 a 对一个集 A 而言，属于或不属于，二者必居其一且仅居其一。

当集 A 的所有元可列出时，则通过穷举法将元排列起来，并用花括号括起来表示这个集。例如， $\{a, b, c, d\}$ 表示由 a, b, c, d 四个字母所组成的集。 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 表示由

全体自然数所组成的集。这类集中至多只有可数个元。

另外，我们用 $\{x | p(x)\}$ 表示那些使得命题 $p(x)$ 为真的所有 x 组成的集。例如

$$\{x | -2 \leq x \leq 2, \text{ 且 } x \text{ 是实数} \}$$

表示由大于等于 -2 ，且小于等于 2 的全体实数所组成的集。

常用 R 表示实数集， N 表示自然数集。

下面定义集间的关系与运算。

两集间的关系

1° 设在集 A, B 中，若 $x \in A$ ，则 $x \in B$ ，且若 $x \in B$ ，则 $x \in A$ ，即 A, B 具有相同的元，称 A 与 B 相等，记作 $A = B$ 。

2° 设在集 A, B 中，若 $x \in A$ ，则 $x \in B$ ，即 A 的所有元都属于 B ，称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ ，读成“ A 包含于 B 或 B 包含 A ”。显然 $A \subseteq A$ ，即 A 本身是 A 的子集。

又若 $A \subseteq B$ ，且至少存在一个元 $b \in B$ ，而 $b \notin A$ ，称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subset B$ 。

不包含任何元的集称为空集，记作 $\emptyset$ 。显然，对任何集 A 都有 $\emptyset \subseteq A$ 。

容易证明， $A = B$ 的充要条件是 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

设 A 是一给定集，由 A 的所有子集所组成的集，称为 A 的幂集，用符号 $\mathcal{P}(A)$ 表示。

例 设 $A = \{a, b, c\}$ ，则

$$\mathcal{P}(A) = \{ \{ \emptyset \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\} \}.$$

由有限个元构成的集称为有限集，不空的非有限集称为无限集。

不难证明，若 A 是有限集，且含有 n 个元，则 $\mathcal{P}(A)$ 含有 2^n 个不同元。必须注意， $\mathcal{P}(A)$ 的元是集。因此，若 $a \in A$ ，应有 $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ ，不能写成 $\{a\} \subset \mathcal{P}(A)$ ，而对 A 来说， $\{a\} \subset A$ ，不能写成 $\{a\} \in A$ 。 A 的幂集 $\mathcal{P}(A)$ ，也常记作 2^A 。

集间的运算

1° 由集 A , B 中元的全体所组成的集, 称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

2° 由同时属于集 A , B 的元的全体所组成的集, 称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

若 A 与 B 的交集为空集, 即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 不相交.

一般地, 设 A_t ($t \in T$) 是 U 的子集, 定义所有 A_t 的并集为

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x | \exists t \in T, x \in A_t, x \in U\},$$

所有 A_t 的交集为

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x | \forall t \in T, x \in A_t, x \in U\},$$

其中 T 是集 A_t 的所有下标 t 组成的集, 叫做指标集. 符号 $\exists$ 表示“存在”或“有”, $\forall$ 表示“任一个”或“一切”.

特别, 当指标集 $T = \emptyset$ 时, 规定

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \emptyset, \quad \bigcap_{t \in T} A_t = U.$$

3° 由属于集 A 而不属于集 B 的元的全体所组成的集, 称为 A 与 B 的差集, 记为 $A - B$, 即

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}.$$

我们常把所需要考虑的事物的全体构成的集称为全域或论域, 记为 U , 有时也记作 X , Y 等.

设 U 为论域, $A \in \mathcal{P}(U)$, 将 $U - A$ 记为 $\overline{A}$ 或 A^c , 称为 A 的补集或余集, 即

$$\overline{A} = A^c = \{x | x \notin A, x \in U\}.$$

集的并、交、补运算也可通过Venn (或Euler) 图来形象地表示 (见图1.1).

集运算的基本性质

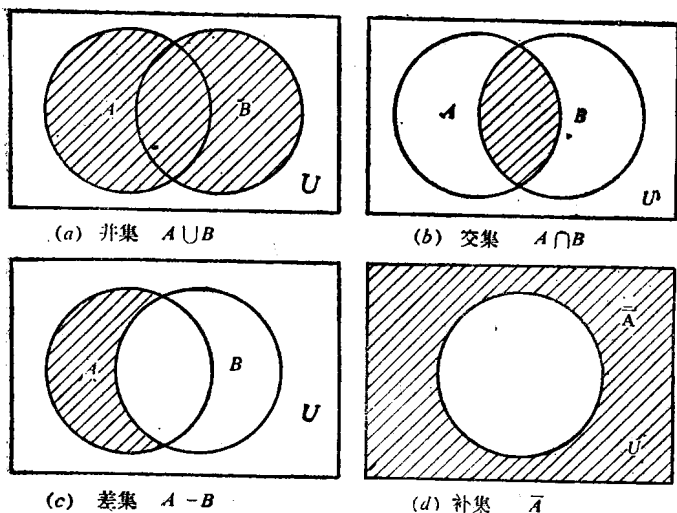


图 1.1 Venn图

设 U 为论域, $A, B, C \in \mathcal{P}(U)$, 则对集的并、交、补运算满足下列性质

(1) 幂等律

$$A \cup A = A, A \cap A = A.$$

(2) 交换律

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$$

(3) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(4) 吸收律

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$$

(5) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

一般地, 设 $A, A_t \in \mathcal{P}(U)$, $t \in T$, 则

$$\bigcup_{t \in T} (A \cap A_t) = A \cap \left(\bigcup_{t \in T} A_t \right),$$

$$\bigcap_{t \in T} (A \cup A_t) = A \cup \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right).$$

(6) 对合律或复归律

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

(7) 互补律

$$A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

(8) 0-1律

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A,$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

(9) 对偶律或De Morgan律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

一般地, 设 $A_t \in \mathcal{P}(U)$, $t \in T$, 则

$$\overline{\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t},$$

$$\overline{\left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}.$$

§ 1.2 关系与映射

直积

设 X, Y 是任意两个集, 则序偶 (x, y) 的全体所组成的集称为 X, Y 的直积, 记为 $X \times Y$, 即

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}.$$

一般来说, $X \times Y \neq Y \times X$.

例如, 设 $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, 则

$$X \times Y = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3),$$

$$\begin{aligned} & (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}, \\ Y \times X = & \{ (1, a), (1, b), (2, a) \\ & (2, b), (3, a), (3, b) \}. \end{aligned}$$

从而可以看出, 除 $X=Y$ 外, 显然 $X \times Y \neq Y \times X$.

例 1 设 $X=Y=R$ (实数集), 则

$$X \times Y = R \times R = \{ (x, y) \mid x \in R, y \in R \}$$

为通常的坐标平面.

两个集的直积可推广到 n 个集上去. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是任意 n 个集, 则

$\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i=1, 2, \dots, n \}$ 叫做

$n_1, n_2, \dots, n_n$ 的直积, 记为 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, 或写成 $\prod_{i=1}^n X_i$,

其中 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 n 元序组.

关系

$X \times Y$ 的子集 R 称为 X 与 Y 之间的二元关系或简称关系, 记作 R . 当 $(x, y) \in R$ 时, 说 x 与 y 具有关系 R , 记为 xRy ; 当 $(x, y) \notin R$ 时, 说 x 与 y 不具有关系 R , 记为 $x \not R y$. 若 $X=Y$, 则 $X \times X$ 的子集 R 称为 X 上的二元关系. 一般 $\overbrace{X \times X \times \dots \times X}^{n \uparrow}$ 的子集 R 称为 X 上的 n 元关系.

例 2 设 N 是自然数集, 则

$$N \times N = \{ (m, n) \mid m, n \in N \}$$

$$R = \{ (m, n) \mid m-n=\text{偶数}, (m, n) \in N \times N \}.$$

显然 $R \subset N \times N$, 所以 R 是 N 上的关系.

下面我们介绍常用的偏序关系和等价关系

1° 设 X 是集, $\leq$ 是 X 上的关系, 且具有下列性质

- (1) 自反性 $x \leq x, \forall x \in X$,
- (2) 反对称性 $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in X$,
- (3) 传递性 $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z, \forall x, y, z \in X$,

称关系 $\leq$ 是 X 上的一个偏序关系, 简称偏序(或半序)。

例如, 设 R 是实数集, 则 $\leq$ 是 R 上通常的小于或等于关系。读者可以验明, 对于直角坐标平面上的任意两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 规定 $(x_1, y_1) \leq^* (x_2, y_2)$, 当且仅当 $x_1 \leq x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$, 则此 $\leq^*$ 是 $R \times R$ 上的一个偏序关系。

又若 $\leq$ 是 X 上的偏序, 且对任意 $x, y \in X$, $x \leq y$ 或 $y \leq x$ 至少有一个成立, 则称 $\leq$ 是 X 上的全序关系, 简称全序。

不难验证, 通常的 $\leq$ 是 R 上的全序。上述 $R \times R$ 上的 $\leq^*$ 关系只是偏序不是全序。事实上 $(2, 3)$ 和 $(3, 2)$ 之间就不存在我们所规定的偏序。

定义了偏序关系的集 X 称为偏序集, 记作 $\langle X, \leq \rangle$ 。如上例 $\langle R, \leq \rangle$ 和 $\langle R \times R, \leq^* \rangle$ 都是偏序集(或半序集)。

读者还可以自己验证, 对任意非空集 X , $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ 是偏序集, 其中 $\subseteq$ 是集间的包含关系。

2° 设 X 是集, $\sim$ 是 X 上的关系, 且具有下列性质

(1) 自反性 $x \sim x, \forall x \in X$,

(2) 对称性 $x \sim y \Rightarrow y \sim x, \forall x, y \in X$,

(3) 传递性 $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z, \forall x, y, z \in X$,

称 $\sim$ 为 X 上的等价关系。

例如, 任意集 X 上的“等于”关系, 是一个等价关系。

映射

设 X, Y 是两个集, 若有一对应关系或法则, 使得对于集 X 的任一元 x , 有 Y 中唯一的一个元 y 与之对应, 则此对应称为 X 到 Y 的映射, 记为

$$f: X \rightarrow Y,$$

且用 $f: x \mapsto y$ 或 $y = f(x)$

表示元 x 与元 y 对应, 其中 $x \in X, y \in Y$ 。又 X 叫做 f 的定义域, 而

$$f(X) = \{ y \mid y = f(x), x \in X \}$$

称为 f 的值域。

实际上,映射是一种特殊的关系,因此,又可以定义为
设 X, Y 是两个集, f 是 $X \times Y$ 上的一个关系,且具有下列性质

$$(1) \quad \forall x \in X, \exists y \in Y \text{ 使得 } (x, y) \in f,$$

(2) $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2, \forall x \in X,$
称此关系 f 为 X 到 Y 的映射。

下面定义以后将常提到的几种映射。

1° 若 f 是映射,且 $f(X) = Y$,则称 f 是全射(见图1·2(a))。全射也称满射。

2° 若 f 是映射,且当 $x \neq x'$ 时,有 $f(x) \neq f(x')$,则称 f 是单射(见图1·2(b))。单射也称内射。

3° 若映射 f 既是全射,也是单射,则称 f 是全单射(见图1·2(c))。全单射也称双射。

4° 设 $f: X \rightarrow Y$, 令

$$f^{-1}(y) = \{x | f(x) = y, x \in X\}$$

称为 y 关于 f 的逆像。设 f 是全单射,对于任何 $y \in Y$,若 $y = f(x)$ 则记 $x = f^{-1}(y)$,称映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 为 f 的逆映射(见图1·2(d))。

例3 $y = x^2$ 是 R 到 R 的单射,而不是全射,因为 $y = x^2$ 的值,只能是非负数。

而 $y = x^3$ 是 R 到 R 的全单射,因为它既是全射,又是单射。

映射合成

设有三个非空集 X, Y, Z , $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$,由 f, g 确定的 X 到 Z 的映射 $h: X \rightarrow Z$,叫做映射 f, g 的合成映射,记为 $h = g \circ f$ (见图1·3)。取 $h(x) = g(f(x)), \forall x \in X$ 。

映射的合成满足结合律,即

设 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: X \rightarrow Z$,

则有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ 。