武汉大学理科教材

模糊(Fuzzy)数学导论

欧阳绵
彭祖赠 等
李必祥

武汉大学出版社

Fuzzy 数学导论

（以编写章次为序）
欧阳绵 彭祖赠 唐旭章
陈贻源 李必祥 邓聚龙
栗森福 黄振德 蔡训武
卢灵镒 裴礼文

武汉大学出版社

内 容 提 要

Fuzzy数学是研究和处理Fuzzy性现象和事物的数学。自1965年诞生以来获得了迅速的发展。它的应用相当广泛，几乎渗透到自然科学、工程技术以及社会科学的各个领域。因此，它具有强大的生命力，正在茁壮成长为一个新的数学分支。

本书深入浅出地介绍了Fuzzy集的基本概念和理论、基本方法以及在一些领域中的应用，并在每章之后附有相当数量的习题。可作为理工科院校高年级选修课的教材，也可作为科研工作者、工程技术人员以及大专院校有关专业师生的自学读物。

责任编辑 陈礼瑢

Fuzzy数学导论

欧阳绵 彭祖赠 李必祥等

*

武汉大学出版社出版

（武昌 珞珈山）

新华书店湖北发行所 武汉大学出版社总印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 12.5印张 317千字

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

印数1—1400

ISBN 7-307-00277-9/O·26

定价：2.50元

前　　言

Fuzzy*数学从1965年L·A·Zadeh发表第一篇论文“Fuzzy集”开始，十多年来获得了迅速的发展，它的应用范围已逐步伸向国民经济和科学技术的各个领域。同时，它那新颖的思想已渗透到经典数学的各个分支，不断地推广和丰富着经典数学的概念和理论，已初步显示出它强大的生命力，而正在茁壮成长为一个新的数学分支。

全书共分十七章，主要内容包括：预备知识；Fuzzy集的概念及理论；Fuzzy集理论的应用（如，Fuzzy模式识别，Fuzzy聚类分析，Fuzzy综合评判，Fuzzy控制，Fuzzy规划等）以及关于经典数学部分分支的Fuzzy化。其目的是为了力求系统而全面地介绍Fuzzy数学的基础理论及其应用，作为理工院校高年级学生选修课的教材。在学生掌握了这些基础知识后，可以考虑联系实际，着手解决实际问题，或进一步阅读有关文献进行研究工作，都不致有太大困难。本书也可作为科研工作者、工程技术人员以及大专院校有关专业师生的自学读物。

在编写时，对于重要概念的引进，力求做到前后联系，要求明确，有本有源，使初学者容易接受而不觉突然。例如，Fuzzy集概念的引入，首先简明扼要地叙述了普通集有明确的边界，它所研究的对象是分明的事物和现象，而Fuzzy集没有明确的边界，它所研究的对象是那些Fuzzy的事物和现象。

对于文字叙述力求做到简明扼要、通俗易懂，推理尽可能详

---

* “Fuzzy”一词，目前有多种译名，如“模糊”、“不分明”、“弗晰”、“乏晰”等，使初学者阅读很感不便。本书不译，采用原名。

尽，对所引用的理论，特殊的都有交待，无需参考其它书刊，以减少读者自学的困难。因为是介绍基础理论，所以对某些专门知识而关系不大的内容，均未列入；而对一些基本理论除了详细证明外，还举例加以说明，这样既可对已学的基础理论加深理解，同时，又培养了实践能力。

本书系集体编写的，参加人员有：（以编写章次为序）欧阳绵（前言、第一章、第二章、参考文献）、彭祖赠（第三章、第四章、第六章、第七章、第十四章）、唐旭章（第五章）、陈贻源（第八章）、李必祥（第九章、第十章）、邓聚龙（第十一章、第十二章）、栗载福（第十三章）、黄振德（第十四章）、蔡训武（第十五章）、卢灵镒（第十六章）、裴礼文（第十七章）等。本书是从1981年开始编写的。当时作为讲习班及理工科院校高年级选修课的讲义。经过试用以后，于1982年大多数担任编写工作的同志，对自已所写部分作了一次修改，增加了内容，补充了章节，继续作为讲习班和选修课的讲义。此次他们对原稿又作了修改，最后由欧阳绵、彭祖赠、李必祥三同志负责进行全面修改定稿，调整了内容，统一了语调和符号，补充了习题和参考文献，但由于时间匆促，水平所限，书中错误和不妥之处自属难免，敬希广大读者惠予指正。

欧阳绵

一九八三年九月

目　　录

第一章 预备知识

本章扼要介绍普通集的内容，主要包括集的概念及其运算、关系与映射、同态与同构、凸集、格等，作为今后讨论Fuzzy集的基础。

§1.1 集的概念及其运算

集是近代数学中最基本的概念之一，一般说来，把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来研究时，这个整体就叫做由这些事物所构成的集合，简称为集。例如，一个学校所有的学生组成一个集，所有的整数也组成一个集，…。组成集的每个事物，称为这个集的元素，简称为元。

类、族、丛等都是集的同义语。

通常用大写字母A，B，C，X，Y，Z，…表示集；用小写字母a，b，c，x，y，z，…表示元。

设A是集，a是一个事物·若a是A中的一个事物，则称a为A的元，记为$a\in A$，读作“a属于A”。若a不是A的元，记为$a\notin$ A，读作“a不属于A”。显然，任何一个元a对一个集A而言，属于或不属于，二者必居其一且仅居其一。

当集A的所有元可列出时，则通过穷举法将元排列起来，并用花括号括起来表示这个集。例如，$\{a, b, c, d\}$表示由a，b，c，d四个字母所组成的集。$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$表示由

全体自然数所组成的集。这类集中至多只有可数个元。

另外，我们用 $\{x \mid p(x)\}$ 表示那些使得命题 $p(x)$ 为真的所有 x 组成的集。例如

$$\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\text{，且}x\text{是实数}\}$$

表示由大于等于 -2，且小于等于 2 的全体实数所组成的集。

常用 R 表示实数集，N 表示自然数集。

下面定义集间的关系与运算。

两集间的关系

1^0 设在集 A，B 中，若 $x \in A$，则 $x \in B$，且若 $x \in B$，则 $x \in A$，即 A，B 具有相同的元，称 A 与 B 相等，记作 $A = B$。

2^0 设在集 A，B 中，若 $x \in A$，则 $x \in B$，即 A 的所有元都属于 B，称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，读成"A 包含于 B 或 B 包含 A"。显然 $A \subseteq A$，即 A 本身是 A 的子集。

又若 $A \subseteq B$，且至少存在一个元 $b \in B$，而 $b \notin A$，称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subset B$。

不包含任何元的集称为空集，记作 $\varnothing$。显然，对任何集 A 都有 $\varnothing \subseteq A$。

容易证明，$A = B$ 的充要条件是 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

设 A 是一给定集，由A的所有子集所组成的集，称为 A 的幂集，用符号 $\mathscr{P}(A)$ 表示。

例　设 $A = \{a, b, c\}$，则

$$\mathscr{P}(A) = \{\{\varnothing\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}.$$

由有限个元构成的集称为有限集，不空的非有限集称为无限集。

不难证明，若 A 是有限集，且含有 n 个元，则 $\mathscr{P}(A)$ 含有 2^n 个不同元。必须注意，$\mathscr{P}(A)$ 的元是集。因此，若 $a \in A$，应有 $\{a\} \in \mathscr{P}(A)$，不能写成 $\{a\} \subset \mathscr{P}(A)$，而对 A 来说，$\{a\} \subset A$，不能写成 $\{a\} \in A$。A 的幂集 $\mathscr{P}(A)$，也常记作 2^A。

集间的运算

1^0　由集A，B中元的全体所组成的集，称为A与B的并集，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

2^0　由同时属于集A，B的元的全体所组成的集，称为A与B的交集，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

若A与B的交集为空集，即$A\cap B=\varnothing$，则称A与B不相交。

一般地，设A_t（$t\in T$）是U的子集，定义所有A_t的并集为

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{x\mid \exists t\in T,\ x\in A_t,\ x\in U\},$$

所有A_t的交集为

$$\bigcap_{t\in T}A_t=\{x\mid \forall t\in \mathrm{T},\ x\in A_t,\ x\in U\},$$

其中T是集A_t的所有下标t组成的集，叫做指标集。符号$\exists$表示"存在"或"有"，$\forall$表示"任一个"或"一切"。

特别，当指标集$T=\varnothing$时，规定

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\varnothing,\quad \bigcap_{t\in T}A_t=U.$$

3^0　由属于集A而不属于集B的元的全体所组成的集，称为A与B的差集，记为$A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in \mathrm{A},\ x\notin B\}.$$

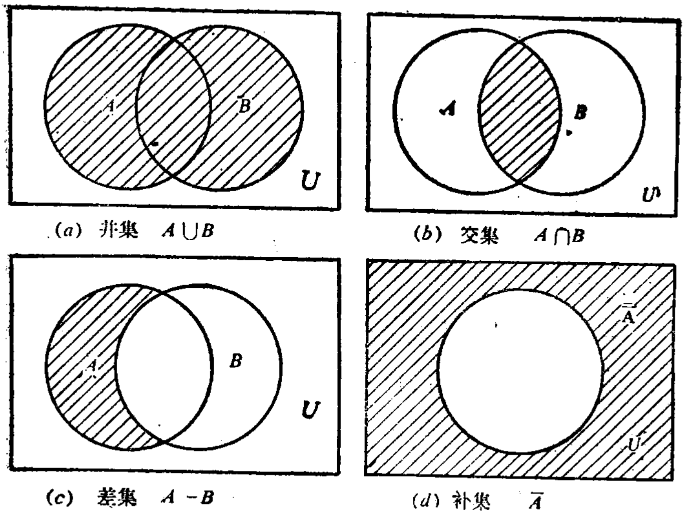
我们常把所需要考虑的事物的全体构成的集称为全域或论域，记为U，有时也记作X，Y等。

设U为论域，$A\in\mathscr{P}(U)$，将$U-A$记为$\overline{A}$或A^c，称为A的补集或余集，即

$$\overline{A}=A^c=\{x\mid x\notin A,\ x\in U\}.$$

集的并、交、补运算也可通过Venn（或Euler）图来形象地表示（见图1·1）。

集运算的基本性质



(a) 并集 $A\cup B$　(b) 交集 $A\cap B$

(c) 差集 $A-B$　(d) 补集 $\bar{A}$

图 1·1 Venn图

设U为论域，A，B，$C\in\mathscr{P}(U)$，则对集的并、交、补运算满足下列性质

（1） 幂等律

$$A\cup A=A，A\cap A=A.$$

（2） 交换律

$$A\cup B=B\cup A，A\cap B=B\cap A.$$

（3） 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

（4） 吸收律

$$A\cup(A\cap B)=A，A\cap(A\cup B)=A.$$

（5） 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

一般地，设A，$A_t\in\mathscr{P}(U)$，$t\in T$，则

$$\bigcup_{t\in T}(A\cap A_t)=A\cap(\bigcup_{t\in T}A_t),$$

$$\bigcap_{t\in T}(A\cup A_t)=A\cup(\bigcap_{t\in T}A_t).$$

（6） 对合律或复归律

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

（7） 互补律

$$A\cup\overline{A}=U,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

（8） 0-1律

$$A\cup U=U,\quad A\cap U=A;$$

$$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

（9） 对偶律或De Morgan律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

一般地，设$A_t\in\mathscr{P}(U)$，$t\in T$，则

$$\overline{(\bigcup_{t\in T}A_t)}=\bigcap_{t\in T}\overline{A}_t,$$

$$\overline{(\bigcap_{t\in T}A_t)}=\bigcup_{t\in T}\overline{A}_t.$$

§1.2 关系与映射

直积

设X，Y是任意两个集，则序偶(x,y)的全体所组成的集称为X，Y的直积，记为$X\times Y$，即

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,\ y\in Y\}.$$

一般来说，$X\times Y\neq Y\times X$.

例如，设$X=\{a,b\}$，$Y=\{1,2,3\}$，则

$$X\times Y=\{(a,1),(a,2),(a,3),$$

$(b,\ 1),\ (b,\ 2),\ (b,\ 3)\},$

$$Y\times X=\{(1,a),\ (1,b),\ (2,a)\ (2,b),\ (3,a),\ (3,b)\}.$$

从而可以看出，除$X=Y$外，显然$X\times Y\neq Y\times X$。

例 1　设$X=Y=R$（实数集），则

$$X\times Y=R\times R=\{(x,\ y)\mid x\in \mathrm{R},\ y\in \mathrm{R}\}$$

为通常的坐标平面。

两个集的直积可推广到n个集上去。设X_1，X_2，…，X_n是任意n个集，则

$$\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mid x_i\in X_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$ 叫做

n_1，n_2，…，n_n的直积，记为$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$，或写成$\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$，

其中$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$称为n元序组。

关系

$X\times Y$的子集R称为X与Y之间的二元关系或简称关系，记作R。当$(x,y)\in R$时，说x与y具有关系R，记为xRy；当$(x,y)\notin R$时，说x与y不具有关系R，记为$x\not R y$。若$X=Y$，则$X\times X$的子集R称为X上的二元关系。一般$\overbrace{X\times X\cdots\times X}^{n个}$的子集$R$称为$X$上的$n$元关系。

例 2　设N是自然数集，则

$$N\times N=\{(m,\ n)\mid m,\ n\in N\}$$

$$R=\{(m,\ n)\mid m-n=\text{偶数},\ (m,\ n)\in N\times N\}.$$

显然$R\subset N\times N$，所以R是N上的关系。

下面我们介绍常用的偏序关系和等价关系

1^0　设X是集，$\leqslant$是X上的关系，且具有下列性质

(1)　自反性　$x\leqslant x,\ \forall x\in X,$

(2)　反对称性　$x\leqslant y,\ y\leqslant x\Longrightarrow x=y,\ \forall x,\ y\in X,$

(3)　传递性　$x\leqslant y,\ y\leqslant z\Longrightarrow x\leqslant z,\ \forall x,\ y,\ z\in X,$

称关系$\leqslant$是X上的一个偏序关系，简称偏序（或半序）。

例如，设R是实数集，则$\leqslant$是R上通常的小于或等于关系。读者可以验明，对于直角坐标平面上的任意两点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)，规定$(x_1, y_1)\leqslant^*(x_2, y_2)$，当且仅当$x_1\leqslant x_2$且$y_1\leqslant y_2$，则此$\leqslant^*$是$R\times R$上的一个偏序关系。

又若$\leqslant$是X上的偏序，且对任意$x, y\in X$，$x\leqslant y$或$y\leqslant x$至少有一个成立，则称$\leqslant$是X上的全序关系，简称全序。

不难验证，通常的$\leqslant$是R上的全序。上述$R\times R$上的$\leqslant^*$关系只是偏序不是全序。事实上$(2, 3)$和$(3, 2)$之间就不存在我们所规定的偏序。

定义了偏序关系的集X称为偏序集，记作$\langle X, \leqslant\rangle$。如上例$\langle R, \leq\rangle$和$\langle R\times R, \leq^{*\prime}\rangle$都是偏序集(或半序集)。

读者还可以自己验证，对任意非空集X，$\langle \mathscr{P}(X), \subseteq\rangle$是偏序集，其中$\subseteq$是集间的包含关系。

2^0　设X是集，$\sim$是X上的关系，且具有下列性质

(1)　自反性　$x\sim x, \ \forall x\in X$,

(2)　对称性　$x\sim y\Rightarrow y\sim x, \ \forall x, y\in X$,

(3)　传递性　$x\sim y, \ y\sim z\Rightarrow x\sim z, \ \forall x, y, z\in X$,

称$\sim$为X上的等价关系。

例如，任意集X上的“等于”关系，是一个等价关系。

映射

设X，Y是两个集，若有一对应关系或法则，使得对于集X的任一元x，有Y中唯一的一个元y与之对应，则此对应称为X到Y的映射，记为

$$f: X\to Y,$$

且用　$f: x\mapsto y$或$y=f(x)$

表示元x与元y对应，其中$x\in X$，$y\in Y$。又X叫做f的定义域，而

$$f(X)=\{y \mid y=f(x), \ x\in X\}$$

称为f的值域。

实际上，映射是一种特殊的关系，因此，又可以定义为

设X，Y是两个集，f是$X\times Y$上的一个关系，且具有下列性质

(1) $\forall x\in X$，$\exists y\in Y$ 使得$(x, y)\in f$，

(2) $(x, y_1)\in f$，$(x, y_2)\in f\Rightarrow y_1=y_2$，$\forall x\in X$，

称此关系f为X到Y的映射。

下面定义以后将常提到的几种映射。

1^0 若f是映射，且$f(X)=Y$，则称f是全射（见图1·2(a)）。全射也称满射。

2^0 若f是映射，且当$x\neq x'$时，有$f(x)\neq f(x')$，则称f是单射（见图1·2(b)）。单射也称内射。

3^0 若映射f既是全射，也是单射，则称f是全单射（见图1·2(c)）。全单射也称双射。

4^0 设f：$X\to Y$，令

$$f^{-1}(y)=\{x \mid f(x)=y,\ x\in X\}$$

称为y关于f的逆像。设f是全单射，对于任何$y\in Y$，若$y=f(x)$则记$x=f^{-1}(y)$，称映射f^{-1}：$Y\to X$为f的逆映射（见图1·2(d)）。

例3 $y=x^2$是R到R的单射，而不是全射，因为$y=x^2$的值，只能是非负数。

而$y=x^3$是R到R的全单射，因为它既是全射，又是单射。

映射合成

设有三个非空集X，Y，Z，f：$X\to Y$，g：$Y\to Z$，由f，g确定的X到Z的映射h：$X\to Z$，叫做映射f、g的合成映射，记为$h=g\circ f$（见图1·3）。取$h(x)=g(f(x))$，$\forall x\in X$。

映射的合成满足结合律，即

设f：$X\to Y$，g：$Y\to Z$，h：$X\to Z$，

则有 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$。