高等学校教材

高等数学（理工类）

（下册）

主编 徐兵
副主编 杨则燊 贺明峰 王千 杜莹

高等教育出版社

高等数学（理工类）

高等学校教材

高等数学(理工类)

(下　册)

主　编　徐　兵
副主编　杨则燊　贺明峰　王　千　杜　莹

高等教育出版社

内容提要

本书是南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院等十几所院校根据目前独立学院教学现状，结合多年在独立学院的教学经验联合编写而成。本书分为上、下册，下册主要内容有：空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程初步。书中每节配有 A、B 两套习题，并附有习题答案。

本书体现教学改革及教学内容的优化，针对独立学院理工类专业的教学需求，适当降低理论深度，突出数学知识实用的分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求技巧，突出基本训练的题目，解决课程体系的系统性、严密性与应用型人才培养需求的关系，有利于学生的可持续发展，并体现新的教学理念。

本系列教材可作为独立学院理工类专业的大学数学教材，也可供有关人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类．下册／徐兵主编．—北京：高等教育出版社，2008.6

ISBN 978－7－04－023886－0

Ⅰ．高…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 067951 号

策划编辑　宋瑞才　**责任编辑**　张耀明　**封面设计**　于文燕　**责任绘图**　杜晓丹
版式设计　陆瑞红　**责任校对**　俞声佳　**责任印制**　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2008 年 6 月第 1 版
印　　张	15.75	**印　　次**	2008 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	20.00 元

物料号　23886－00

目 录

第六章　空间解析几何

解析几何是用代数方法研究几何图形的学科.若仅限于研究平面上的几何图形,则称为平面解析几何;若仅限于研究三维空间的几何图形,则称为空间解析几何.

解析几何的实质是建立点与实数对间的关系,把代数方程与曲线、曲面对应起来,从而能用代数方法研究几何图形.

借助于解析几何,几何概念可以用代数表示,几何目标可以通过代数达到.反过来,借助于解析几何能给代数语言以几何解释,使人们能直观地掌握代数语言的意义,并启发人们提出新的结论.这两方面构成了解析几何的基本问题.也可以更明确地说,解析几何的基本问题为

(1) 已知点的几何轨迹,如何建立它的代数方程?

(2) 已给代数方程,如何确定它的几何轨迹?

第一节　空间直角坐标系

由平面解析几何学可知,笛卡儿(Descartes)试图建立起一种通用的数学,使算术、代数和几何统一起来.他给出平面上点与实数对(x,y)间的关系,进而将方程与曲线对应起来,将“形”与“数”统一起来.这种能用代数方法研究几何图形的理论是以坐标法为基础的.同样,空间的“形”与“数”联系的媒介是空间直角坐标系.

一、空间直角坐标系

下面先来介绍空间直角坐标系.

所谓空间直角坐标系是指：给定一点 O,过该点引出过这点三条互相垂直的数轴 Ox,Oy,Oz(它们通常具有相同的长度单位). 常称 O 为坐标原点;分别称 Ox,Oy,Oz 三个轴为横轴、纵轴、竖轴. 常记这个坐标系为 $Oxyz$.

如果将一只手的大拇指、食指、中指表为两两垂直的形态,令它们依次表示 Ox,Oy,Oz 轴. 若用的是右手,则称所表示的这个坐标系 $Oxyz$ 为右手系,否则称为左手系. 今后若不加声明,所给坐标系皆为右手坐标系. 通常右手坐标系如图 6.1 所示.

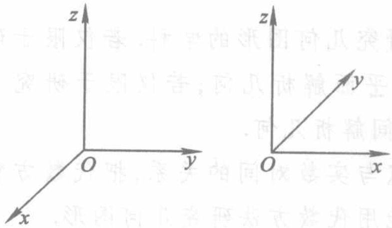

图 6.1

三个坐标轴 Ox,Oy,Oz 两两决定三个互相垂直平面,统称之为坐标平面,由 Ox,Oy 轴组成的坐标平面记为 Oxy. 由 Ox,Oz 轴组成的坐标平面记为 Ozx. 由 Oy,Oz 轴组成的平面记为 Oyz.

设 M 为空间一点,过点 M 作三个平面分别垂直于 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴,与 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的交点依次为 A,B,C. 设 $OA=x,OB=y,OC=z$,则点 M 唯一决定了一组有序的三个数 x,y,z. 反过来,在三个坐标轴上依次给定三个点 A,B,C,且 $OA=x,OB=y,OC=z$,分别过点 A,B,C 作三个平面依次垂直于 Ox 轴 Oy 轴,Oz 轴,则这三个平面相交于一点,即一组有序的三个数 x,y,z 唯一决定了空间一点. 于是空间的点 M 与一组有序的三个数 x,y,z 建立了一一对应关系. 常称这组数 x,y,z 为点 M 的坐标,并称 x 为 M 的横坐标,y 为 M 的纵坐标,z 为 M 的竖坐标,常记为 $M(x,y,z)$. 如图 6.2 所示.

三个坐标平面将空间分为八个部分,称其每个部分为卦限,这八个卦限用下述方法规定其顺序,如图 6.3 所示：

第一卦限　$x>0,y>0,z>0$;

第二卦限　$x<0,y>0,z>0$;

第三卦限　$x<0,y<0,z>0$;

第四卦限　$x>0,y<0,z>0$;

第五卦限　$x>0,y>0,z<0$;

第六卦限　$x<0,y>0,z<0$;

第七卦限　$x<0,y<0,z<0$;

第八卦限　$x>0,y<0,z<0$.

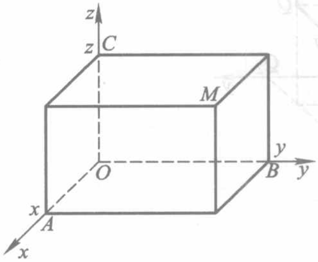

图 6.2

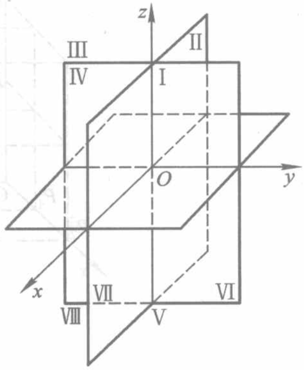

图 6.3

有必要指出,位于坐标平面或坐标轴上的点,我们约定它不属于任何卦限.这些点的坐标有以下特性:

原点的三个坐标都是0,即坐标为(0,0,0).

在 Ox 轴上点的坐标为$(x,0,0)$.

在 Oy 轴上点的坐标为$(0,y,0)$.

在 Oz 轴上点的坐标为$(0,0,z)$.

在 Oxy 平面上的点的坐标为$(x,y,0)$.

在 Oyz 平面上的点的坐标为$(0,y,z)$.

在 Ozx 平面上的点的坐标为$(x,0,z)$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点. 过点 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体,如图6.4所示. 由勾股定理可得

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2,$$

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

注意到

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

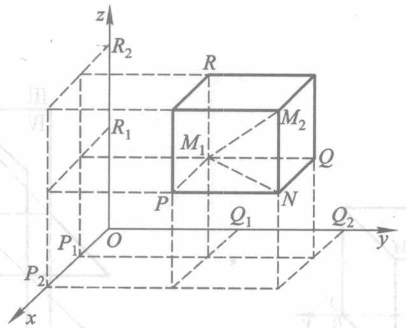

图 6.4

$$|M_1R| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

可知

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

因而

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

上式(1)又称为 M_1, M_2 两点间的距离公式.

特别,点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

例 1 求点 $M(1,-1,2)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离.

解 由点 M 到坐标原点的距离公式(2)可知

$$|OM| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

例 2 求点 $M_1(1,-1,2)$ 到点 $M_2(2,1,0)$ 的距离.

解 由两点间距离公式(1)可知

$$|M_1M_2| = \sqrt{(2-1)^2 + [1-(-1)]^2 + (0-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

例 3 在 Ox 轴上求一点 M,使其到点 $M_1(0,2,-1)$ 与 $M_2(-1,1,3)$ 的距离相等.

解 由于点 M 在 Ox 轴上,可设其坐标为 $(x,0,0)$. 由题意有

$$|MM_1| = |MM_2|,$$

即 $\sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(0-1)^2+(0-3)^2}$.

解此方程可知 $x=-3$. 因此点 M 为 $(-3,0,0)$.

三、曲面方程与空间曲线方程

回忆平面解析几何可以知道,人们利用坐标系将点与数联系起来,由于点动成线,而点变动时,其坐标 x,y 也将随之变动. 当点沿一定几何轨迹移动时,x,y 之间将遵循一定规律 $F(x,y)=0$,因此利用坐标系把曲线与方程联系起来. 相仿,利用空间直角坐标系可以将空间的点与三维数组 (x,y,z) 联系起来,空间点移动时,其点的坐标也遵循一定的规律. 因此可以将曲面、空间曲线与方程联系起来.

1. 曲面方程

与平面解析几何中曲线方程的定义相仿,可以定义空间曲面的方程.

定义 1 若曲面上每一点的坐标都满足某方程,而不在这曲面上的点的坐标都不满足这个方程,则称这个方程是所给曲面的方程.

在这个意义下,三元方程

$$F(x,y,z)=0$$

总表示一张空间曲面.

曲面中也有本章开头提出的解析几何两类问题:

1. 已知一曲面作为点的几何轨迹,建立这曲面的方程.
2. 已知一曲面的方程,研究这曲面的几何形状.

例 4 求与定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 距离等于 R 的几何轨迹的方程.

解 此问题为第一类问题,不妨设 $M(x,y,z)$ 为轨迹上任意一点. 由题意可知

$$|M_0M|=R,$$

即
$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

两端平方得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{3}$$

其几何解释为上述方程(3)表示以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为中心,以 R 为半径的球面方程.

例 5 研究方程

$$x^2+y^2+z^2+Mx+Ny+Sz+Q=0$$

所表示的曲面的几何特性.

解 所给问题为第二类基本问题. 由例 4 可以得到启发. 可以先配方,将所给方程化为方程(3)的形式:

$$x^2 + Mx + y^2 + Ny + z^2 + Sz = -Q,$$

$$\left(x + \frac{M}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{N}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{S}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4} + \frac{N^2}{4} + \frac{S^2}{4} - Q.$$

若$\frac{1}{4}(M^2 + N^2 + S^2) - Q > 0$,则记 $R^2 = \frac{1}{4}(M^2 + N^2 + S^2) - Q$,则所给方程表示以点$\left(-\frac{M}{2}, -\frac{N}{2}, -\frac{S}{2}\right)$为中心,半径为 R 的球面.

若$\frac{1}{4}(M^2 + N^2 + S^2) - Q = 0$,则所给方程化为

$$\left(x + \frac{M}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{N}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{S}{2}\right)^2 = 0.$$

这时只能 $x = \frac{-M}{2}, y = \frac{-N}{2}, z = \frac{-S}{2}$,即所给方程表示一个点$\left(\frac{-M}{2}, \frac{-N}{2}, \frac{-S}{2}\right)$,可称其为点球.

若$\frac{1}{4}(M^2 + N^2 + S^2) - Q < 0$,则所给方程无图形,可称其为虚球.

上述所给方程中关于 x^2, y^2, z^2 系数相等;不含混合项 xy, yz, zx. 由上述推导可知,凡是具有上述两个特点的二次方程所表示的曲面必定为球面.

2. 曲线方程

一般说来,空间两曲面相交,可以得到一条曲线. 设

$$F_1(x, y, z) = 0 \text{ 和 } F_2(x, y, z) = 0$$

为空间两曲面的方程. 若它们相交得到一条曲线 L,则 L 上任一点的坐标必定满足这两个曲面的方程. 反过来,同时满足这两个曲面方程的点也必定在它们的交线 L 上. 因此空间曲线 L 的方程可以表示为

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

常称之为曲线的一般式方程.

习题 6－1

(A)

1. 设 $A(-1,3,2)$，$B(3,3,1)$，求 A，B 两点间的距离.
2. 求与点 $A(-1,3,2)$、点 $B(3,3,1)$ 等距离的点的轨迹方程.
3. 求球心为 $(-1,1,2)$，半径为 4 的球面方程.
4. 方程

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-19=0$$

是否为球面方程？若是球面方程，求出其球心坐标及半径.

5. 判定以 $A(1,2,3)$，$B(3,1,5)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是否为直角三角形？

第二节　向量的概念与向量的代数表示

在空间解析几何中，利用代数方法研究几何图形的基本工具是向量. 下面先介绍向量的概念.

一、向量的概念

在力学、物理学等问题中所遇到的量，可以分为两大类：其中一类在取定一个单位以后完全可以用数值来决定，比如质量、温度、时间、面积、体积等，常称这种量为数量. 另一类量不仅有大小，而且有方向，比如力、速度、加速度等等，常称这类量为**向量**.

可以把向量用具有一定长度和方向的线段来表示. 这种有确定长度和确定方向的线段常称为有向线段. 称这个确定的长度为向量的大小，向量的大小又称为向量的模；称这个确定的方向为向量的方向.

模为 1 的向量称为**单位向量**.

特别定义模为零的向量为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的方向可以看作是任意的.

若 A 为向量的始点，B 为终点，常记为 $\overrightarrow{AB}$. 通常也用小写黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等表

示向量.

若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的模相等,且它们的方向也相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等,而方向相反的向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{a}$.

由向量相等的定义可以看出,它有两个要素:两个向量的模相等,方向相同(与向量的始点与终点无关!).通常称与始点及终点无关的向量为**自由向量**.下面所研究的向量除特殊声明外,概指自由向量.

二、向量的加法

由物理学可以知道:如果有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在某物的同一点上,则合力 $\boldsymbol{F}$ 的方向是如图 6.5 所示的以 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线的方向. $\boldsymbol{F}$ 的大小为该对角线之长.

仿此可以定义向量的加法.设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为不位于同一条直线上的两个向量.将它们的始点移到同一点 O,并记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$.以 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$,如图 6.6(a)所示.则称 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量.记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

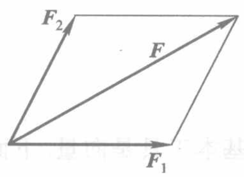

图 6.5

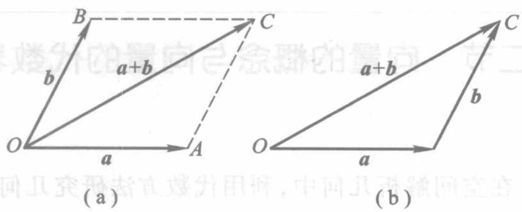

图 6.6

上述用平行四边形对角线确定两个向量和的方法,常称为向量加法的平行四边形法则.

注意图 6.6(a)中 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,可以简化向量的求和:自 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A,作 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,连接 OC,则向量 $\overrightarrow{OC}$ 即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量.如图 6.6(b)所示.这种求和常称为向量加法的三角形法则.

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限多个向量之和的问题中去.若给定了向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$,则从任一点 O 引出向量 $\boldsymbol{a}$,然后从 $\boldsymbol{a}$ 的终点引出 $\boldsymbol{b},\cdots$,从 $\boldsymbol{d}$ 的终点引出 $\boldsymbol{e}$.则以点 O 为始点,以上述向量折线中 $\boldsymbol{e}$ 的终点为终点的向量记为 $\boldsymbol{s}$,则 $\boldsymbol{s}$ 为上述向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}$ 之和,记为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e},$$

如图 6.7 所示.

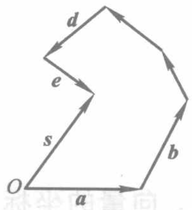

图 6.7

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反时,可称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行. 此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之和可依三角形法则确定. 即当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时,定义其和向量与这两个向量方向相同,其模为这两个向量模的和. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,定义其和向量的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中模较大的向量的方向相同,而和向量的模等于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中较大的模与较小的模之差.

三、向量的减法

定义 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 利用上面求向量和的平行四边形法则可以求出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如图 6.8 所示. 作出 $\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形 $OAC'B'$,其对角线 $\overrightarrow{OC'}$ 即为所求,注意 $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{BA}$,为简化运算,可以定义为

将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的始点移到点 O,记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 则由 $\overrightarrow{OB}$ 的终点 B 到 $\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 的向量 $\overrightarrow{BA}$ 即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,称之为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差.

上述简化运算求向量之差的方法常称为向量减法的三角形法则.

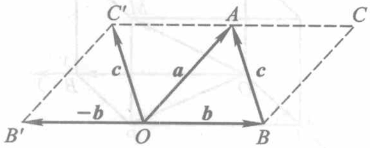

图 6.8

四、向量与数的乘法

若给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和数量 λ,则定义 $\lambda\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{a}\lambda$)为向量与数的乘积,它表示一个向量:

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模等于 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍($|\lambda|$ 为 λ 的绝对值);常记 $|\boldsymbol{a}|$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的模,因此有 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 注意 $|\lambda|$ 表示数 λ 的绝对值, $|\boldsymbol{a}|$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的模.

(2) 当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同.

当 $\lambda<0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

特别,当 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ 时,则 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 常记为

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

可以验证

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a},$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

五、向量的坐标表示式

为了能将向量作为研究几何图形的工具,需要将向量运算用代数表示.因此先建立空间直角坐标系,若将向量的始点移到坐标原点 O,则这个向量完全由其终点所确定.反过来,任给空间一点 M,总可以唯一确定一个向量$\overrightarrow{OM}$,因此可以说,空间的点与始点在原点的向量有一一对应关系.设点 M 的坐标为(x,y,z),即

$$OA=x,\quad OB=y,\quad OC=z,$$

如图 6.9 所示.

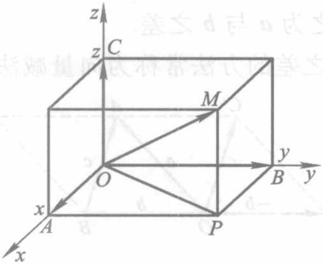

图 6.9

由向量的加法法则可知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

如果在 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴上分别取三个以坐标轴正向为其方向的单位向量,并依次记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,称其为基本单位向量.由向量的数与向量乘法运算可知

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}.$$

称它们为向量$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的分向量.可以记为

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

常称上式为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式或向量在坐标轴上的分解.为了方便,也常记为

$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z).$$

若给定一轴 u 及轴外一点 A.过点 A 引出与轴 u 垂直的平面 π,设轴 u 与平面 π 的交点为 A',如图 6.10 所示,则称 A'为点 A 在轴 u 上的投影.

若给定向量$\overrightarrow{AB}$及轴 u,设 A',B'分别为点 A,B 在轴 u 上的投影,则称 $A'B'$为