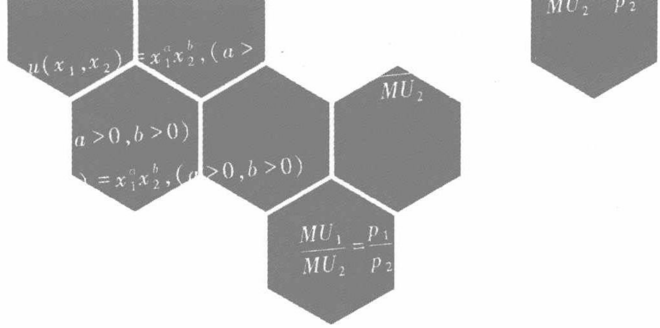
研究生系列教材

中级微观经济学

ZHONGJI WEIGUAN JINGJIXUE

主编 张树民 李毅

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press



研究生系列教材

中级微观经济学

ZHONGJI WEIGUAN JINGJIXUE

主　编　张树民　李　毅

副主编　吴开超　屈改柳

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

中级微观经济学/张树民,李毅主编.—成都:西南财经大学出版社,2008.9
ISBN 978-7-81138-101-6

Ⅰ.中… Ⅱ.①张…②李… Ⅲ.微观经济学—研究生—教材 Ⅳ.F016

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第134937号

中级微观经济学

主编 张树民 李毅

责任编辑:张访 黄霞
封面设计:王正好
责任印制:封俊川

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网 址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电 话:	028-87353785 87352368
印 刷:	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸:	170mm×240mm
印 张:	14.25
字 数:	225千字
版 次:	2008年9月第1版
印 次:	2008年9月第1次印刷
印 数:	1—2000册
书 号:	ISBN 978-7-81138-101-6
定 价:	25.00元

前　言

伴随中国改革开放后持续快速的经济增长，中国经济学教育的现代化也取得了重大进展。进入21世纪，西南财经大学即确定“中级微观经济学”为研究生基础课程，并且以“规范化、国际化”为目标作为重点课程加以建设，本教材即为此项建设工作的阶段性成果。

便于教学使用是我们编写本教材的核心思路。为此，本教材具有了如下特征：①摒弃一些教材章节过多、过于分散的弊病，把全部内容归纳为15章，非常适合在一学期之内教授或学习“中级微观经济学”课程使用。②很多教师在教学中发现，课堂讲授时间不够。实际上，更有效率的教学方式是课堂教学和课后学习相结合。但这就需要所选择的教材表述准确，叙述详尽，易于理解。本教材恰好按照此要求编写而成。③一个最终拿到经济学博士学位的人的求学过程可能依次学习过“微观经济学”、“中级微观经济学”和“高级微观经济学”三门课程。这就要求为“中级微观经济学”课程编写的教材的内容必须适中，能够使初学过微观经济学的人有所收获，而又可为准备学习高级微观经济学的人提供必需的基础。本教材就按此要求编写而成。④掌握“中级微观经济学”的重要方法是做一些必要的练习。为此，我们专门编写了本教材的配套读物《中级微观经济学学习指南》。本教材每章后面的课后思考题都在该学习指南中作为例题给出了详细的分析过程。

本教材的编者张树民、李毅、吴开超长期从事此课程的教学工作，积累了丰富的经验和教学素材，实际上，本教材就是在我们教学讲义的基础上整理而成。另一位编者屈改柳是四川农业大学经济管理学院的教师。本教材的编写分工如下：李毅撰写了1～6章，张树民撰写了7～12章，吴开超与屈改柳撰写了13～15章。在此，我们必须向大量教材的作者致谢，长期以来，这些优秀的教材都是我们积累知识、产生思想灵感的源泉。其中，尤其需要强调指出的是：范里安的《微观经济学：现代观点》，尼科尔森的《微观经济理论：基本原理与扩展》。

本书在出版过程中，得到西南财经大学出版社的支持，在此深表谢意。

由于水平所限，也可能由于疏忽所致，教材中的错误之处可能难以避免，敬请读者批评指正，提供宝贵的修改意见。

编者

2008 年 8 月于光华园

目　录

第一章　最优化方法 ……………………………………………………… (1)
第一节　集合和函数的基本概念 ……………………………………… (1)
第二节　微分和求导 …………………………………………………… (2)
一、一元函数的求导 …………………………………………………… (2)
二、二元函数的求导和微分 …………………………………………… (3)
第三节　最优化 ………………………………………………………… (6)
一、无约束的最优化 …………………………………………………… (6)
二、等式约束下的最优化 ……………………………………………… (9)
复习思考题 ……………………………………………………………… (10)
第二章　偏好与效用 …………………………………………………… (12)
第一节　商品与预算集 ………………………………………………… (12)
一、商品和消费束 ……………………………………………………… (12)
二、预算集和预算线 …………………………………………………… (13)
三、预算线的移动 ……………………………………………………… (14)
第二节　偏好与无差异曲线 …………………………………………… (15)
一、偏好 ………………………………………………………………… (15)
二、无差异曲线——偏好的图形描述 ………………………………… (16)
第三节　效用函数 ……………………………………………………… (22)
一、效用理论的发展 …………………………………………………… (22)
二、效用函数——偏好的数学表示 …………………………………… (23)
三、常见的效用函数 …………………………………………………… (25)
四、边际效用和边际替代率 …………………………………………… (26)
复习思考题 ……………………………………………………………… (27)
第三章　效用最大化和支出最小化 …………………………………… (28)
第一节　效用最大化 …………………………………………………… (28)
一、效用最大化(*UMP*)一阶和二阶条件 ……………………………… (28)

二、马歇尔需求函数 …………………………………………………… (32)
三、间接效用函数 ……………………………………………………… (33)
第二节　支出最小化 …………………………………………………… (35)
一、支出最小化(*EMP*)一阶和二阶条件 ……………………………… (35)
二、希克斯需求函数和支出函数 ………………………………………… (36)
三、效用最大化和支出最小化的关系 …………………………………… (38)
复习思考题 ……………………………………………………………… (40)
第四章　比较静态和福利分析 ……………………………………… (41)
第一节　收入变化和价格变化分析 …………………………………… (41)
一、收入提供曲线和恩格尔曲线 ………………………………………… (41)
二、价格提供曲线和需求曲线 …………………………………………… (43)
第二节　收入效应和替代效应 ………………………………………… (44)
一、价格变化效应的分解 ………………………………………………… (44)
二、斯勒斯基方程 ………………………………………………………… (47)
第三节　弹性 …………………………………………………………… (49)
一、弹性的定义和分类 …………………………………………………… (49)
二、弹性与收益的关系 …………………………………………………… (50)
三、恩格尔加总法则和古诺加总法则 …………………………………… (51)
第四节　消费者福利变化的度量 ……………………………………… (52)
一、消费者剩余及其变化 ………………………………………………… (53)
二、补偿变化和等价变化 ………………………………………………… (54)
复习思考题 ……………………………………………………………… (55)
第五章　具有初始禀赋的消费者行为 ……………………………… (56)
第一节　基本理论 ……………………………………………………… (56)
一、模型和求解 …………………………………………………………… (56)
二、价格变化 ……………………………………………………………… (58)
三、具有禀赋的斯勒斯基方程 …………………………………………… (60)
第二节　劳动供给的选择 ……………………………………………… (62)
一、基本模型 ……………………………………………………………… (62)
二、禀赋变动对消费者选择的影响 ……………………………………… (63)
三、劳动供给曲线 ………………………………………………………… (64)
第三节　跨期选择 ……………………………………………………… (65)

一、基本模型 …………………………………………………… (65)
二、利率变动对消费者的影响 ……………………………………… (66)
三、现值分析与资产市场 ………………………………………… (67)
复习思考题 ……………………………………………………… (69)
第六章　不确定条件下消费者行为选择 ……………………… (70)
第一节　基本概念 ……………………………………………… (70)
第二节　期望效用函数 ………………………………………… (71)
一、不确定条件下的效用函数 …………………………………… (71)
二、期望效用函数形式与消费者的风险态度 ……………………… (72)
三、风险厌恶的度量 …………………………………………… (74)
第三节　不确定性条件下的最优选择 ……………………………… (76)
复习思考题 ……………………………………………………… (79)
第七章　生产者行为理论 ……………………………………… (81)
第一节　生产技术 ……………………………………………… (81)
一、生产技术的描述方法 ……………………………………… (81)
二、生产技术的基本假设 ……………………………………… (82)
三、可变比例与不变比例的生产技术特征 ………………………… (83)
四、常见的生产技术 …………………………………………… (84)
第二节　成本最小化 …………………………………………… (86)
一、成本最小化问题 …………………………………………… (86)
二、成本函数及其特征 ………………………………………… (88)
第三节　利润最大化 …………………………………………… (92)
一、竞争性厂商的供给 ………………………………………… (93)
二、生产者剩余 ………………………………………………… (94)
三、利润最大化与要素需求 …………………………………… (95)
复习思考题 ……………………………………………………… (96)
第八章　完全竞争市场局部均衡与福利 ………………………… (97)
第一节　市场均衡 ……………………………………………… (97)
一、市场需求 …………………………………………………… (97)
二、短期市场供给与市场均衡 …………………………………… (99)
三、长期市场均衡与长期市场供给 ……………………………… (101)
第二节　资源配置与市场福利 …………………………………… (104)

一、资源配置 …………………………………………………… (104)
二、总剩余 …………………………………………………… (104)
三、消费税的无谓损失 ……………………………………… (105)
四、价格管制 ………………………………………………… (107)
复习思考题 ……………………………………………………… (108)
第九章　完全竞争市场一般均衡与福利 ……………………… (110)
第一节　交换 …………………………………………………… (111)
一、埃奇沃斯方盒 …………………………………………… (111)
二、竞争性市场均衡和资源配置 …………………………… (112)
三、帕累托有效率的资源配置 ……………………………… (115)
四、福利经济学基本定理 …………………………………… (119)
第二节　生产 …………………………………………………… (120)
一、鲁滨孙·克鲁索经济 …………………………………… (120)
二、二人世界:鲁滨孙和星期五 …………………………… (123)
第三节　生产与交换 …………………………………………… (125)
一、鲁滨孙经济 ……………………………………………… (125)
二、二人世界:鲁滨孙和星期五 …………………………… (127)
复习思考题 ……………………………………………………… (129)
第十章　垄断 ………………………………………………… (130)
第一节　线性定价模型 ………………………………………… (130)
一、垄断价格与垄断产量 …………………………………… (130)
二、垄断的福利损失 ………………………………………… (133)
第二节　价格歧视 ……………………………………………… (134)
一、一级价格歧视 …………………………………………… (134)
二、二级价格歧视 …………………………………………… (136)
三、三级价格歧视 …………………………………………… (139)
第三节　自然垄断及治理 ……………………………………… (140)
一、自然垄断行业的特征 …………………………………… (140)
二、反垄断中的两难 ………………………………………… (141)
三、管制自然垄断 …………………………………………… (142)
复习思考题 ……………………………………………………… (142)

第十一章　寡头市场 ……………………………………………… (144)
第一节　卡特尔模型 ……………………………………………… (145)
一、卡特尔的定价和产量安排 …………………………………… (145)
二、卡特尔的不稳定性与监督惩罚机制 ………………………… (146)
第二节　一次性互动下的市场均衡 ……………………………… (148)
一、产量竞争与古诺均衡 ………………………………………… (148)
二、价格竞争与伯特兰均衡 ……………………………………… (150)
三、斯塔克尔伯格均衡 …………………………………………… (152)
第三节　无限次重复性的相互作用与默契合谋 ………………… (154)
一、合谋阻止价格竞争 …………………………………………… (154)
二、合谋阻止产量竞争 …………………………………………… (155)
复习思考题 ………………………………………………………… (155)
第十二章　博弈论基础 …………………………………………… (157)
第一节　完全信息静态博弈 ……………………………………… (158)
一、标准式 ………………………………………………………… (158)
二、理性假设与重复剔除严格劣策略均衡 ……………………… (159)
三、纳什均衡 ……………………………………………………… (162)
四、混合策略纳什均衡 …………………………………………… (165)
第二节　完全信息动态博弈 ……………………………………… (166)
一、扩展式博弈 …………………………………………………… (166)
二、动态博弈的策略和策略式 …………………………………… (168)
三、不可置信的威胁和纳什均衡的精炼 ………………………… (169)
四、完美信息动态博弈与反向归纳法 …………………………… (170)
五、三阶段讨价还价模型 ………………………………………… (172)
六、不完美信息动态博弈与子博弈精炼纳什均衡 ……………… (173)
复习思考题 ………………………………………………………… (175)
第十三章　外部性和公共物品 …………………………………… (176)
第一节　生产的外部性 …………………………………………… (177)
一、生产外部性的定义 …………………………………………… (177)
二、生产的外部性与庇古传统 …………………………………… (177)
三、生产的外部性与外部性市场 ………………………………… (180)
四、生产的外部性与科斯定理 …………………………………… (181)

第二节　消费的外部性 …………………………………… (182)
一、消费外部性的定义 …………………………………… (182)
二、存在消费外部性时的消费者偏好 …………………… (182)
三、存在消费外部性的消费可能性与禀赋 ……………… (184)
四、存在消费外部性的交换均衡 ………………………… (185)
五、拟线性偏好与科斯定理 ……………………………… (187)
第三节　公地的悲剧 ……………………………………… (188)
第四节　公共物品 ………………………………………… (189)
一、公共物品的特征 ……………………………………… (189)
二、离散的公共物品供给 ………………………………… (191)
三、连续性公共物品的最优供给数量 …………………… (193)
复习思考题 ………………………………………………… (195)
第十四章　不对称信息 ………………………………… (198)
第一节　次品市场的逆向选择 …………………………… (198)
一、逆向选择和市场均衡 ………………………………… (199)
二、例题 …………………………………………………… (200)
第二节　文凭信号模型 …………………………………… (201)
第三节　道德风险与激励 ………………………………… (203)
一、股东和经理都是风险中性的情况 …………………… (203)
二、股东风险中性、经理风险规避的情况 ……………… (204)
第四节　保险市场 ………………………………………… (205)
一、逆向选择问题 ………………………………………… (205)
二、道德风险 ……………………………………………… (207)
复习思考题 ………………………………………………… (209)
第十五章　社会福利与公共选择 ……………………… (211)
第一节　社会选择 ………………………………………… (211)
第二节　社会福利函数 …………………………………… (214)
一、边沁社会福利函数 …………………………………… (214)
二、罗尔斯社会福利函数 ………………………………… (214)
三、伯格森—萨缪尔森福利函数 ………………………… (214)
第三节　公平配置 ………………………………………… (217)
复习思考题 ………………………………………………… (218)

第一章　最优化方法

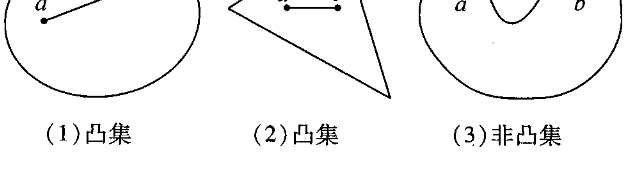
在现代经济学中，会用到一些数学知识，特别是最优化的方法。本章会对本教材用到的一些数学工具加以简单的介绍，特别是关于函数、微积分和最优化理论的相关知识。我们在介绍数学知识的时候，更多地是注重对经济学的应用，不追求数学的完整性和严密性。

第一节　集合和函数的基本概念

集合是指所有对象所组成的全体，集合中的每一个对象称为元素。通常用 X 表示集合，用 x 表示集合中的元素。在经济学中用的最多的集合就是实数集 R，有时候我们也会用到正实数集 R^+。在经济学中往往要用到 n 维的实数集 R^n 和 n 维正实数集 R^n_+，比如在本教材中经常用到的由两种商品组成的商品集 $X=\{\mathrm{x}\mid\mathrm{x}=(x_1,x_2),x_1\geqslant0,x_2\geqslant0\}$ 就是一个二维的实数集。

在经济分析中有一类集合显得非常重要，这类集合为凸集。如果集合 X 中的任意两点 x^a、x^b，对每一个 $t\in[0,1]$，点 $\mathrm{x}^t=t\mathrm{x}^a+(1-t)\mathrm{x}^b$ 也属于集合 X，则称 X 为凸集。

现在以一个二维的集合为例来看看凸集。如果 $X=\{\mathrm{x}\mid\mathrm{x}=(x_1,x_2)\}$ 是凸集，那意味着对点 $\mathrm{x}^a=(x_1^a,x_2^a)\in X$ 和 $\mathrm{x}^b=(x_1^b,x_2^b)\in X$，点 $\mathrm{x}^t=(tx_1^a+(1-t)x_1^b,tx_2^a+(1-t)x_2^b)\in X$。图 1－1 是关于凸集的直观图示：



(1)凸集　　(2)凸集　　(3)非凸集

图 1－1　凸集

(1)、(2)两图都是凸集,而(3)图不是。从图形上判别一个集合是不是凸集,就看这个集合中的任意两点的连线是否都在这个集合内,如果在集合内,那么集合就是凸集,否则就不是。

函数是指数学中的一种对应关系,具体说,设 X 是一个非空集合,Y 是非空数集,f 是个对应法则,若对 X 中的每个 x,按对应法则 f,使 Y 中存在唯一的一个元素 y 与之对应,就称对应法则 f 是 X 上的一个函数,记作 $y=f(x)$,称 X 为函数 $f(x)$ 的定义域,集合 $\{y|y=f(x),x\in X\}$ 为其值域(值域是 Y 的子集),x 叫做自变量,y 叫做因变量,习惯上也说 y 是 x 的函数。

本教材中常用的函数是一元函数 $y=f(x)$ 和二元函数 $y=f(x_1,x_2)$,这些函数在数学中都属于显函数,因为 y 都可以由 x 显性表示出来。还有一类函数称为隐函数,即 y 没有由 x 显性表示出来,其一般形式为 $F(x,y)=0$。

第二节　微分和求导

微分和求导在经济学中的运用非常广泛,在本教材中,用得最多的是一元函数和二元函数的求导和微分,而且经济学中求导一般不超过二阶,所以这里重点讲解一元函数和二元函数的一二阶导数。

一、一元函数的求导

假设一元函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的附近 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 内有定义,当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时函数增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 与自变量增量之比的极限存在且有限,就说函数 f 在 x_0 点可导,称之为 f 在 x_0 点的一阶导数(或变化率)。若函数 f 在定义域内的每一点都可导,便得到一个在定义域上的新函数,记作 $f'(x)$、f'、y' 或者 dy/dx,称之为 f 的导函数,简称为导数。函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义:表示曲线在点 $[x_0,f(x_0)]$ 的切线的斜率。

$y=f(x)$ 的微分表示为 dy,$dy=f'(x)dx$。

下面给出经济学中常见函数的导数:

(1) $y=C$ (C 为常数)　　　$y'=0$

(2) $y = x^a$ $\qquad y' = a\,x^{a-1}$

(3) $y = \ln x$ $\qquad y' = 1/x$

(4) $y = a^x$ $\qquad y' = a^x \ln a$

特别地

$y = e^x$ $\qquad y' = e^x$

以下是函数的和、差、积、商的求导法则：

(1) $y = f(x) + g(x)$ $\qquad y' = f'(x) + g'(x)$

(2) $y = f(x) - g(x)$ $\qquad y' = f'(x) - g'(x)$

(3) $y = f(x)g(x)$ $\qquad y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $y = f(x)/g(x)$ $\qquad y' = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]/ g^2(x)$

复合函数的求导法则：

$y = f(g(x))$ $\qquad y' = f'(g(x))g'(x)$

反函数的求导法则：

如果 $y = f(x)$ 的反函数为 $x = h(y)$，则有

$$f'(x) = \frac{1}{h'(y)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

一元函数 $y = f(x)$ 的一阶导数是所有求导的基础，必须熟练掌握。接下来，我们讨论一元函数的二阶导数。一元函数的一阶导数实际上也是自变量的函数，所以可以对一阶导数再次求导，就可以得到一元函数的二阶导数，我们记为 y''，$f''(x)$，d^2y/dx^2。

同样我们可以得到二阶全微分 $d^2y = f''(x)dx^2$。

二阶导数的直接理解就是变化率的变化率，在曲线上就是斜率的变化率。实际上二阶导数的大小可以用来表征函数或图形的凹凸性。关于函数的凹凸性后面的章节有专门的介绍。

二、二元函数的求导和微分

（一）一阶偏导数和一阶全微分

设有二元函数 $y = f(x_1, x_2)$，因此 y 的变化由 x_1, x_2 的变化所引起，这时对二元函数求导就有两个导数，我们称为一阶偏导数。具体一点说，y 对 x_1 的一阶偏导数是指当 x_2 保持不变时，y 的变化量 Δy 与 x_1 的变化量 Δx_1 的比值的极限，记为 $\partial y/\partial x_1$，$\partial f/\partial x_1$ 或 f_1。同理我们也可以得到 y 对 x_2 的

一阶偏导数，记为$\partial y/\partial x_2$，$\partial f/\partial x_2$ 或f_2。

计算一阶偏导数的方法很简单，只要把其他变量看作常数，剩下的就相当于对要求的自变量求一阶导数。

例 1： 求函数 $z = x/y + y\ln x$ 的偏导数。

解： 求 z 对 x 的偏导数时，把 y 看作常数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x}$$

同理有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \ln x$$

一阶偏导数在经济学中有很强的经济解释。经济学中边际的概念就是用一阶偏导数来表示的。经济学中边际的概念是指在保持其他条件不变的情况下，自变量的变化对因变量变化的影响，这正好对应着数学中一阶偏导的定义。例如经济学中的边际效用无非就是效用函数的一阶偏导，资本的边际收益就是总收益函数对资本量的一阶偏导。

偏导数是指其他变量不变时，某个自变量变化对因变量变化的影响。但因变量变化往往是由多个自变量变化所引起的，为了表示这种情况，就有了全微分的概念。二元函数 $y = f(x_1, x_2)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

例 2： 求例 1 中的函数的全微分。

解： 根据例 1 的结果有

$$dz = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(-\frac{x}{y^2} + \ln x\right)\mathrm{d}y$$

有了二元函数的偏导数和全微分，我们就可以求解隐函数的导数。

设有隐函数 $F(x,y) = 0$，实际上这里隐含着 y 是 x 的函数，那么 y 对 x 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{(\partial F/\partial x)}{(\partial F/\partial y)}$$

证明： 因为 $F(x,y) = 0$

两边求全微分 $d\,F(x,y) = 0$，即

$$\partial F/\partial x\mathrm{d}x + \partial F/\partial y\mathrm{d}y = 0$$

变形后得到上述结论。

（二）二阶偏导数和二阶全微分

二元函数 $y=f(x_1,x_2)$ 的二阶偏导数一共有四个，分别是 y 对 x_1 的二阶偏导数，记为 $\partial^2y/\partial x_1^2$ 或 f_{11}；y 对 x_2 的二阶偏导数，记为 $\partial^2y/\partial x_2^2$ 或 f_{22}；y 对 x_1 和 x_2 的二阶混合偏导数，记为 $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}$ 或 f_{12}；y 对 x_2 和 x_1 的二阶混合偏导数，记为 $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1}$ 或 f_{21}。

杨氏定理：　如果 $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}$ 和 $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1}$ 连续，则两者相等，即

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1} \text{或} f_{12}=f_{21}$$

二阶（偏）导数在经济学中都是表示变化率的变化率，在经济学中就可以用二阶（偏）导数来表示边际的变化率，比如用来表示边际效用递减或者边际产量递增等。

我们也可以得到二阶全微分，用 d^2y 表示，代表 y 的一阶全微分后的再次全微分

$$\mathrm{d}^2y=f_{11}d\,x_1^2+2f_{12}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2+f_{22}d\,x_2{}^2$$

证明：　$\mathrm{d}y=\partial y/\partial x_1\mathrm{d}x_1+\partial y/\partial x_2\mathrm{d}x_2=f_1d\,x_1+f_2\mathrm{d}x_2$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y &= d(\mathrm{d}y)\\ &=(f_{11}\,d\,x_1+f_{12}\,\mathrm{d}x_2)\mathrm{d}x_1+(f_{21}\,d\,x_1+f_{22}\,\mathrm{d}x_2)\mathrm{d}x_2\\ &=f_{11}d\,x_1^2+f_{12}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2+f_{21}\,d\,x_1\mathrm{d}x_2+f_{22}d\,x_2^2\end{aligned}$$

根据杨氏定理，最后得到

$$\mathrm{d}^2y=f_{11}d\,x_1^2+2f_{12}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2+f_{22}d\,x_2{}^2$$

（三）齐次函数

若函数 $y=f(x_1,x_2)$ 对于任意的 $t>0$，有 $f(tx_1,tx_2)=t^kf(x_1,x_2)$，则称函数 $y=f(x_1,x_2)$ 为 k 次齐次函数。在经济学中，常用的齐次函数为零次齐次函数和一次齐次函数。

齐次函数中有一个很重要的定理——欧拉公式在经济学中非常有用，我们这里就来介绍一下。

欧拉公式：　若 $y=f(x_1,x_2)$ 是 k 次齐次函数，则有

$$f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2=k\,f(x_1,x_2)$$

证明：　因为 $f(tx_1,tx_2)=t^kf(x_1,x_2)$

两边同时对 t 求导，得

$$\frac{\partial f(tx_1,tx_2)}{\partial(tx_1)}x_1+\frac{\partial f(tx_1,tx_2)}{\partial(tx_2)}x_2=k\,t^{k-1}f(x_1,x_2)$$

令 $t=1$，则上式变为

$$f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2=k\,f(x_1,x_2)$$

当 $k=1$，$f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2=f(x_1,x_2)$；

当 $k=0$，$f_1\mathrm{d}x_1+f_2\mathrm{d}x_2=0$。

第三节　最优化

在经济学中，经常要碰到效用最大化、成本最小化、利润最大化等问题，这些问题都是要求极（最）大值或极（最）小值，这些统统都可以归结为最优化问题。现在我们就来学习一些基本的最优化的方法。

一、无约束的最优化

（一）一元函数的最优化

一元函数的最优化问题比较简单，但对后面的最优化问题有很强的启示，我们先讨论最大化问题 $\max y=f(x)$。

我们知道，当上式实现最大化时，必须满足一阶条件和二阶条件，一阶条件是必要条件，二阶条件是充分条件。

一阶条件：当 x^* 为最优解时，有 $f'(x^*)=0$

二阶条件：当 x 为 x^* 时，$\mathrm{d}^2y<0$，即 $f''(x^*)<0$

$f''(x)<0$ 实际上要求函数为凹函数。

对于最小化问题 $\min y=f(x)$。

一阶条件：当 x^* 为最优解时，有 $f'(x^*)=0$

二阶条件：当 x 为 x^* 时，$\mathrm{d}^2y>0$，即 $f''(x^*)>0$

$f''(x)>0$ 实际上要求函数为凸函数。

（二）二元函数的最优化

对于最大化问题 $\max y=f(x_1,x_2)$。

一阶条件：当 (x_1^*,x_2^*) 为最优解时，有