高考完全解读

王后雄考案

丛书策划：熊　辉

数学

课标本

丛书主编：王后雄
本册主编：马春华

2009新高考
江苏专用

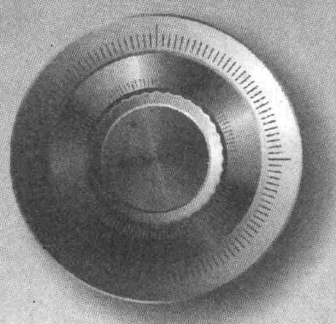
X导航 丛书系列

中国青年出版社

高考完全解读

王后雄考案

丛书策划：熊　辉



数学

课标本

丛书主编：王后雄
本册主编：马春华
编　　委：李学富　陈延刚
孙　翊　章雄钢
陈　锟　周建国
左建华　吴海林
胡福民　程　林
姚火生　黄光文
张　莹　张新平
肖建章　王新佑

导航 丛书系列

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

高考完全解读：课标版. 数学/ 王后雄主编.
—3版.—北京：中国青年出版社，2008
（“X”导航丛书系列）
ISBN 978-7-5006-6809-1

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第030138号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：小　河

高考完全解读　课标本
数　学

中国青年出版社 出版发行
社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034328
读者服务热线：（027）61883306
武汉市精彩印务有限公司印制　新华书店经销
889 × 1194　1/16　25 印张　676 千字
2008 年 5 月北京第 3 版　2008 年 5 月湖北第 3 次印刷
印数：10001 — 15000 册
定价：53.70 元
本书如有任何印装质量问题，请与承印厂联系调换
联系电话：（027）61883355

备考指南

2009年高考题型预测与答题技术指要

一、高考命题特点和趋势

随着新课程标准的实施，高考改革也必然随之而来，由于教材即将“一标多本”，因此高考也不可能“一卷考天下”. 加之各地教育发展本来就不平衡，近千万考生同一卷的风险太大等因素，高考改革势在必行. 综合分析近两年各地高考试题，可总结出如下特点和趋势.

1. 考题覆盖全面，考点重点凸现

国家考试中心数学科负责同志在“命题设计与考核能力要求”中有这么两段话：“重点知识是支撑学科知识体系的主要内容，考查时要保持较高的比例，并达到必要的深度，构成数学试题的主体. ”“对数学基础知识的考查，要求全面，但不刻意追求知识点的百分比，对支撑数学科知识体系的主干知识，考查时保证较高的比例，并保持必要的深度. 即重点知识重点考查，如函数关系及性质，空间线面关系，坐标方法的运用等内容的考查都应保持较高的比例，并达到必要的深度……显示出重点知识在试卷中的突出位置. ”

从近两年的 31 套试题中出题的频数来看，最高的依次是函数、立体几何、圆锥曲线、三角函数、概率与统计、平面向量、导数、数列、不等式等章节；从考点来看，考题频数较多的是：集合与运算，简易逻辑与充要条件，反函数，指数函数与对数函数，函数的图象与变换，函数的最值，等差数列与等比数列，两角和与差的三角函数，三角函数图象及性质，平面向量的数量积，均值不等式，简单的线性规划，直线与圆锥曲线的位置关系，轨迹方程，平面与平面的位置关系，空间角和空间距离，二项式定理，互斥事件、对立事件与相互独立事件的概率，离散型随机变量的期望，数列极限，导数的应用等考点.

从笔者参与高考阅卷的情况分析，近几年来相当一部分考生在答题中的一些失误并不是因缺乏灵活的思维和敏锐的感觉，而恰恰是因为对数学大纲中规定的基础知识、基本理论掌握还存在某些欠缺，甚至有所偏废所致. 虽然重点考点，重点章节凸现，但全面复习，全面备考是稳妥之策，热与冷应辩证对待.

2. 新增内容的整合，成为考查的热点

由于高考试题有区分选拔功能，在考查基础知识的同时，还要注重能力的考查，确立以能力立意命题是命题的指导思想，因此命题时，特别注意知识之间的交叉、渗透与整合，命题者常常在知识的整合、交汇点上设计试题. 在这方面，新增内容：逻辑初步，平面向量，线性规划，概率与统计，函数的连续与导数，又成为命题者整合与交汇的热点. 2005 年、2006 年这两年的高考试卷中这些新增内容所占的题率分别约为 28% 和 27%，这一比例超过了该内容的课时比例，若加上立体几何中的空间向量的解法，此比例还将大大提高.

(1) 平面向量与其他知识点的整合

由于平面向量具有代数与几何双重形式的身份，具有极其丰富的数与形的数学背景和很强的工具性能，因此成为高考中能力考查的一大新热点.

①平面向量与代数的整合

例如：(2006 年湖南卷，理 5) 已知 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|\neq 0$，且关于 x 的方程 $x^2+|\boldsymbol{a}|x+|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=0$ 有实根，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角的取值范围是______.

答案：$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

②平面向量与三角函数的整合

例如：(2005 年山东卷，17) 已知向量 $\boldsymbol{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta)$，$\theta\in(\pi,2\pi)$，且 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\frac{8\sqrt{2}}{5}$，求$\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$的值.

答案：$-\frac{4}{5}$.

③平面向量与解析几何的整合

例如：(2005 年全国卷Ⅰ，21) 已知椭圆的中心为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，斜率为 1，且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A、B 两点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$与 $\boldsymbol{a}=(3,-1)$ 共线.

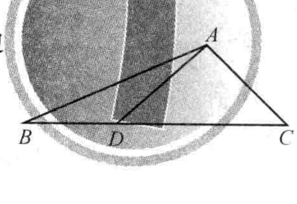
(Ⅰ) 求椭圆的离心率；

(Ⅱ) 设 M 为椭圆上任意一点，且$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

答案略.

④平面向量与平面几何的整合

例如：(2007 年天津卷理，15) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$，D 是边 BC 上一点，$DC=2BD$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$______.



答案：$-\frac{8}{3}$

又如：(2005 年江苏卷，18) 在 $\triangle ABC$ 中，O 为中线 AM 上的一个动点，若 $AM=2$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 的最小值是______.

答案：-2.

(2) 数学期望与其他知识的整合

数学期望，作为新增加的教学内容，既是教学重点，又是教学难点. 近年来出现的数学期望与其他知识点整合的高考试题，让人耳目一新.

①数学期望与函数的整合

例如：(2005 年湖南卷，18) 某城市有甲、乙、丙 3 个旅游景点，一位客人游览这 3 个景点的概率分别是 0.4，0.5，0.6 且客人是否游览哪个景点互不影响，设 ξ 表示客人离开该城市游览的景点数与没游览的景点数之差的绝对值.

(Ⅰ) 求 ξ 的分布及数学期望；

(Ⅱ) 记"函数 $f(x)=x^2-3\xi x+1$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递增"为事件 A，求事件 A 的概率.

答案略.

②数学期望与解析几何的整合

例如：(2005 年全国卷Ⅲ，15) 设 l 为平面上过点 $(0,1)$ 的直线，l 的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，$-\frac{\sqrt{5}}{2}$，0，$\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\sqrt{3}$，$2\sqrt{2}$，用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离，则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi=$______.

答案：$\frac{4}{7}$.

③数学期望与数列的整合

例如：(2005 年广东卷，18) 箱中装有大小相同的黄、白两种颜色的乒乓球，黄、白乒乓球的数量比为 $s:t$. 现在从箱中每次任意取出一个球，若取出的是黄球则结束，若取出的是白球，则将其放回箱中，并继续从箱中任意取出一个球，但取球的次数最多不超过 n 次，以 ξ 表示取球结束时已取到白球的次数.

(Ⅰ) 求 ξ 的分布列；(Ⅱ) 求 ξ 的数学期望.

答案略.

(3) 导数与其他知识的整合

导数是研究函数的重要工具，近两年来已出现导数在研究不等式及向量、三角函数等方面的综合试题.

①导数与不等式的整合

例如：(2004 年湖南卷，12) 设 $f(x)$、$g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数. 当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，且 $g(-3)=0$. 则不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是______.

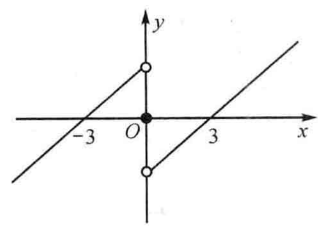
解析：设 $F(x)=f(x)g(x)$，$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，

依题意知　$F(-x)=f(-x)g(-x)=-F(x)$，即 $F(x)$ 为奇函数.

由 $x<0$ 时，$F'(x)>0$，知 $F(x)$ 为增函数，故由奇函数性质知，$x>0$ 时，$F(x)$ 也为增函数.

又由 $g(-3)=0$ 知 $g(3)=0$，$F(-3)=F(3)=0$，

由奇函数的性质知 $F(0)=0$. 依此可勾画 $F(x)$ 的大概图象如右图，故 $f(x)g(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(0,3)$.



②导数与向量的整合

例如：(2005 年江西卷，18) 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(2\cos\frac{x}{2},\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$，

令 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，是否存在实数 $x\in[0,\pi]$，使 $f(x)+f'(x)=0$（其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数函数）？若存在，则求出 x 的值；若不存在，则证明之.

简解：由 $f(x)=\sin x+\cos x$，$f(x)+f'(x)=2\cos x=0$，得 $x=\frac{\pi}{2}\in[0,\pi]$，但此时 $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ 无意义，故不存在这样的实数 x.

(4) 新增内容成为应用题的主要载体

自新增内容进入高考范围以来，一改过去应用问题局限于函数及不等式的范畴，在线性规划、导数及概率、期望中两年内就出现许多内容新颖、贴近生活的优秀试题.

①利用线性规划求最值

例如：(2005 年湖北卷，16) 某实验室需购某种化工原料 106kg，现在市场上该原料有两种包装，一种是每袋 35kg，价格为 140 元；另一种是每袋 24kg，价格为 120 元. 在满足需要的条件下，最少要花费______元.

解析：设购买 35kg 的 x 袋，24kg 的 y 袋，则 $35x+24y\geqslant 106$，$x\in\mathbf{N}$，$y\in\mathbf{N}$，共要花费 $z=140x+120y$.

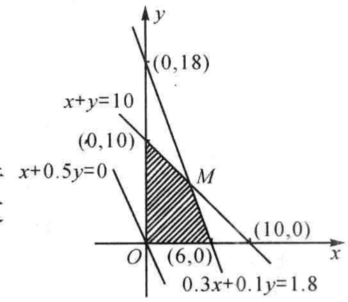
作出 $35x+24y\geqslant 106$，$x\in\mathbf{N}$，$y\in\mathbf{N}$ 对应的可行域，目标函数 $z=140x+120y$ 在格点 $(1,3)$ 处取最小值 500 元. 填 500.

又如：(2004 年江苏卷，19) 制定投资计划时，不仅要考虑可能获得的盈利，而且要考虑可能出现的亏损.

某投资人打算投资甲、乙两个项目，根据预测，甲、乙项目可能的最大盈利率分别为 100% 和 50%，可能的最大亏损率分别为 30% 和 10%. 投资人计划投资金额不超过 10 万元，要求确保可能的资金亏损不超过 1.8 万元. 问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元，才能使可能的盈利最大？

解：设投资人分别用 x 万元、y 万元投资甲、乙两个项目，由题意，有

$\begin{cases}x+y\leqslant 10,\\0.3x+0.1y\leqslant 1.8,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$最大盈利为 $z=x+0.5y$.



上述不等式组表示的平面区域如右图所示，阴影部分（含边界）即为可行域.

作直线 $l_0:x+0.5y=0$，并作平行于直线 l_0 的一组直线：$x+0.5y=z,z\in\mathbf{R}$，与可行域相交，其中有一条直线经过可行域上的 M 点时，与直线 $x+0.5y=0$ 的距离最大，这 M 点是直线 $x+y=10$ 和 $0.3x+0.1y=1.8$ 的交点. 解方程组

$\begin{cases}x+y=10,\\0.3x+0.1y=1.8,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4,\\y=6.\end{cases}$

此时，$z=1\times 4+0.5\times 6=7$（万元）.

即当 $x=4,y=6$ 时，z 取得最大值 7 万元.

答：（略）

②利用导数求最值

例如：（2004 年辽宁卷）甲方是一农场，乙方是一工厂. 由于乙方生产需占用甲方的资源，因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定的净收入. 在乙方不赔付甲方的情况下，乙方的年利润 x（元）与年产量 t（吨）满足函数关系 $x=2\,000\sqrt{t}$.

若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元（以下称 s 为赔付价格），

（Ⅰ）将乙方的年利润 w（元）表示为年产量 t（吨）的函数，并求出乙方获得最大利润的年产量；

（Ⅱ）甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y=0.002t^2$（元），在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下，甲方要在索赔中获得最大净收入，应向乙方要求的赔付价格 s 是多少？

解：（Ⅰ）因为赔付价格为 s 元/吨，所以乙方的实际年利润为 $w=2\,000\sqrt{t}-st$.

由 $w'=\dfrac{1\,000}{\sqrt{t}}-s=\dfrac{1\,000-s\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$，令 $w'=0$，得 $t=t_0=\left(\dfrac{1\,000}{s}\right)^2$.

当 $t<t_0$ 时，$w'>0$；当 $t>t_0$ 时，$w'<0$，所以 $t=t_0$ 时，w 取得最大值.

因此乙方取得最大年利润的年产量 $t_0=\left(\dfrac{1\,000}{s}\right)^2$（吨）.

（Ⅱ）设甲方净收入为 v 元，则 $v=st-0.002t^2$.

将 $t=\left(\dfrac{1\,000}{s}\right)^2$ 代入上式，得到甲方净收入 v 与赔付价格 s 之间的函数关系式 $v=\dfrac{1\,000^2}{s}-\dfrac{2\times 1\,000^3}{s^4}$.

又 $v'=-\dfrac{1\,000^2}{s^2}+\dfrac{8\times 1\,000^3}{s^5}=\dfrac{1\,000^2\times(8\,000-s^3)}{s^5}$，令 $v'=0$，得 $s=20$.

当 $s<20$ 时，$v'>0$；当 $s>20$ 时，$v'<0$，所以 $s=20$ 时，v 取得最大值.

因此甲方向乙方要求赔付价格 $s=20$（元/吨）时，获最大净收入.

③概率和期望的实际应用

例如：（2005 年天津卷，15）某公司有 5 万元资金用于投资开发项目. 如果成功，一年后可获利 12%；一旦失败，一年后将丧失全部资金的 50%. 下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果.

投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是______（元）.

解析：$5\times 12\%=0.6,5\times(-50\%)=-2.5$.

ξ 的分布列为

ξ	0.6	−2.5
P	$\dfrac{192}{200}$	$\dfrac{8}{200}$

$E\xi=0.6\times\dfrac{192}{200}-2.5\times\dfrac{8}{200}=4\,760$（元）. 故填 4 760.

又如：（2006 年湖北）（理）在某校举行的数学竞赛中，全体参赛学生的竞赛成绩近似服从正态分布 $N(70,100)$. 已知成绩在 90 分以上（含 90 分）的学生有 12 名.

（Ⅰ）试问此次参赛的学生总数约为多少人？

（Ⅱ）若该校计划奖励竞赛成绩排在前 50 名的学生，试问设奖的分数线约为多少分？

可供查阅的（部分）标准正态分布表 $\Phi(x_0)=P(x<x_0)$

x_0	0	1	2	3	4
1.2	0.884 9	0.886 9	0.888 8	0.890 7	0.892 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8
2.0	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8

x_0	5	6	7	8	9
1.2	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.911 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.926 5	0.927 8	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.9	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 2	0.976 7
2.0	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7

解析:本小题主要考查正态分布、对立事件的概念和标准正态分布表的查阅,考查运用概率统计知识解决实际问题的能力.

(Ⅰ)设参赛学生的分数为ξ. 因为$\xi \sim N(70,100)$,由条件知,

$P(\xi \geqslant 90)=1-P(\xi<90)=1-F(90)=1-\Phi\left(\frac{90-70}{10}\right)=1-\Phi(2)=1-0.977\,2=0.022\,8.$

这说明成绩在90分以上(含90分)的学生人数约占全体参赛人数的2.28%. 因此,参赛总人数约为$\frac{12}{0.022\,8}\approx$ 526(人).

(Ⅱ)假定设奖的分数线为x分,则

$P(\xi \geqslant x)=1-P(\xi<x)=1-F(x)=1-\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=\frac{50}{526}\approx 0.095\,1,$

即$\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=0.904\,9$,查表得$\frac{x-70}{10}=1.31$,解得$x=83.1$. 故设奖的分数线约为83分.

这一类试题,2005年有重庆卷(18)抽奖中奖的概率,湖北卷(19)能领取驾照的概率,福建卷(18)罚球得分的期望,全国卷Ⅱ(19)排球获胜的期望,全国卷Ⅰ(20)种子补种的期望,重庆文(15)开锁的概率;2004年有全国卷Ⅱ(18)球队抽签两弱队同组的概率,湖南卷(18)产品检验抽到一等品的概率,浙江卷(20)停电的概率,全国卷Ⅰ(18)热线电话占线的概率与期望,重庆卷(18)汽车通过有红绿灯路口的期望,还有全国卷Ⅲ(19)、天津卷(18)、福建卷(18)分别为科普比赛、演讲比赛、英语口语测试得分的概率分布及期望等.

当然传统知识方面的数学应用也出现了一些构思新颖的好题,如2005年上海卷(20)以新建中低价住房为背景,2004年福建卷(20)以企业进行技术改造为背景,均是借用等差数列、等比数列和不等式来解决. 2004年广东卷(20)不同的观测点听到巨响的时间不同,运用声波的传播速度和圆锥曲线的定义来确定巨响的位置. 这也都是很好的应用问题.

3. 突出能力立意,命题多有创新

作为选拔性的高考,不仅是知识性的测试,更侧重于能力的考核,因此高考试题应突出能力立意,不但要考查学生学过的、见过的知识的综合与运用,还要考查课堂没有教过的和学生没有见过的,需要挖掘潜能方能解决的一些问题.

(1) 即时定义题层出不穷

所谓即时定义题,就是在试题的叙述中当场给出某一个概念. 概念的给出常伴随有"设"、"记"、"称"、"规定"、"定义"等字眼,然后再根据这个概念现学现用来解题. 这一类试题考生往往比较陌生,但又多有新意.

例如:(2005年辽宁卷,7)在$\mathbf{R}$上定义运算$\otimes$:$x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式$(x-a)\otimes(x+a)<1$对任意实数x成立,则实数a的取值范围是______.

答案:$-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$

(2007广东卷文,8改编)设S是至少含有两个元素的集合,在S上定义了一个二元运算"$*$"(即对任意的a,$b\in S$,对于有序元素对(a,b),在S中有唯一确定的元素$a*b$与之对应),若对于任意的$a,b\in S$,有$a*(b*a)=b$,则对任意的$a,b\in S$,下列等式中:

①$(a*b)*a=a$ ②$[a*(b*a)]*(a*b)=a$

③$b*(b*b)=b$ ④$(a*b)*[b*(a*b)]=b$

恒成立的是______.(写出等式序号)

答案:②、③、④

再如:(2007年广东卷理,8改编)设S是至少含有两个元素的集合,在S上定义了一个二元运算"$*$"(即对任意的$a,b\in S$,对于有序元素对(a,b),在S中有唯一确定的元素$a*b$与之对应),若对任意的$a,b\in S$,有$a*(b*a)=b$,则对任意的$a,b\in S$,$(a*b)*[b*(a*b)]=$______.

答案:b

此外2005年的试卷中还有湖南卷第15题"函数$f(x)$在$[a,b]$上的面积",北京卷第20题"$f(x)$在$[0,1]$上的单峰函数";2004年的有上海卷第12题"数列的基本量",北京春招第22题"等差数阵"等.

(2)试题背景开放,情境设计新颖

这里说试题背景开放,是指试题不一定是以高中所见过的内容为背景,君不见诸如数阵、等差数阵、单峰函数、曲线面积还有计算机的计数制都已纷纷登场亮相了吗? 至于情境设计,就是将相关的高中知识、初中的平面几何知识等,不分学科,不分学段进行整合嫁接改造成一道新的试题.

例如:(2005年全国卷Ⅲ,12)计算机中常用的十六进制是逢16进1的计数制,采用数字0~9和字母A~F共16个计数符号,这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如,用十六进制表示:$E+D=1B$则$A\times B=$______.

答案:6E

又如(2005年北京卷,14)已知n次多项式$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

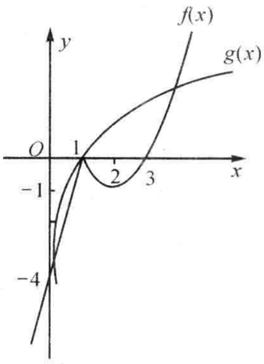
如果在一种算法中，计算 $x_0^k(k=2,3,4,\cdots,n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法，计算$P_3(x_0)$的值共需要 9 次运算（6 次乘法，3 次加法），那么计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要______次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法：$P_0(x)=a_0, P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$. 利用该算法，计算$P_3(x_0)$的值共需要 6 次运算，计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要______次运算.

答案：$\frac{1}{2}n(n+3)$；$2n$

（3）图象信息题不断翻新

图象信息题在高考试题中露面已有十余年的历史了，这并不稀奇. 但 2005 年已向超越函数和绝对值函数的叠加迈步了.



例如：（2007 年湖南卷理，6 改编）函数 $f(x)=\begin{cases}4x-4, x\leqslant 1\\ x^2-4x+3, x>1\end{cases}$ 的图象和函数$g(x)=\log_2 x$ 的图象的交点个数是______.

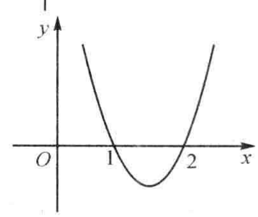
答案：3

解析：在同一坐标系中画出函数$f(x)$和 $g(x)$的图象，由图知，有 3 个交点.

特别是自 1998 年全国高考那道"向高为 H 的水瓶中注水"，题干给出注水量 V 与水深 h 的函数图象，选项给出四个不同形状的水瓶的试题问世后，这类试题不断翻新，近两年又向导数的方向推进.

又如：（2006 年北京卷理，16）已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5，其导函数 $y=f'(x)$的图象经过点（1，0），（2，0），如图所示，求：①x_0 的值，

②a,b,c 的值.



解析：①由图象可知，在$(-\infty,1)$内 $f'(x)>0$，在(1，2)内 $f'(x)<0$，在$(2,+\infty)$内 $f'(x)>0$，故$f(x)$在$(-\infty,1)$和$(2,+\infty)$内是增函数，在(1，2)内是减函数. 因此，$f(x)$在 $x=1$处取得极大值，所以 $x_0=1$.

②解法 1：$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

由$f'(1)=0, f'(2)=0, f(1)=5$，得$\begin{cases}3a+2b+c=0,\\ 12a+4b+c=0,\\ a+b+c=5,\end{cases}$解得 $a=2, b=-9, c=12$.

解法 2：设$f'(x)=m(x-1)(x-2)=mx^2-3mx+2m$，

又$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，所以 $a=\frac{m}{3}, b=-\frac{3}{2}m, c=2m, f(x)=\frac{m}{3}x^3-\frac{3}{2}mx^2+2mx$，

由$f(1)=5$ 得 $m=6$，所以 $a=2, b=-9, c=12$.

二、高考复习建议

1. 夯实基础，回归教材，突出重点，切忌盲目

数学复习内容，大致可分为基础知识和基本技能两大板块. 在复习中，要注意基本概念、基本公式、基本定理的辨析比较及灵活运用，做到理解、综合、创新. 所谓理解，就是力求有意识地培养分析推理能力，综合概括能力和抽象思维能力. 对定义、定理、公式的复习，一定要注重弄清来龙去脉，沟通相互联系，掌握推证过程，注意表达形式，归纳记忆方法，明确主要用途. 所谓"综合"是指不同板块的知识进行去伪存真、去粗取精、由浅入深的提炼加工知识之间的纵横联系，使知识系统化、网络化，以便于记忆、储存、提取和应用. 所谓"创新"，是指在融会贯通基础知识上，在解决问题时表现出来的灵活性. 为此，除注重书本的知识和老师的讲解之外，还要挖掘书本上没有的和老师没有讲到的问题. 如概念的多重涵义、问题的多个角度、共性问题的规律总结、探索问题解决的思想方法等.

2. 注重通性通法，淡化特殊技艺

新课标明确提出高考主要考查一般性的规律和方法. 例如，代数中的定义法、图象法、基本量法、方程法、递推法、转化法，立体几何中的降维法、线面关系转化法，解析几何中的解析法、待定系数法、参数法等.

不必在难题和偏题上花太多精力. 难题、偏题都是由一些很基本的题融合而成的，只要考生掌握了基本知识，掌握了容易题、中等题的解法，难题、偏题也不是"牢不可破"的.

3. 强化数学思想方法训练，提高理性思维能力

在复习备考时，应注意常用的数学技能和方法，如配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法和数形结合法等，以及常用的逻辑推理方法，如分析法、综合法、归纳法、演绎法和反证法等，这些都是高考考查的主要内容. 对重要的数学思想方法，如函数与方程、变换与转化、分类与归纳、数形的结合与分离、定常与变化的对立与统一等，也将通过具体问题，测试考生对数学知识的掌握程度.

学习数学基础知识，要充分重视知识的形成过程. 解数学题，要着重研究思维过程，弄清基本数学方法和基本数学思想在解题中的应用，注重培养直觉猜想、归纳抽象、逻辑推理、演绎论证、运算求解等理性思维能力.

4. 应注意提高几种能力

如前所说，既然高考试题强调能力立意，因此我们当然要提高各种能力，高考数学考试的能力要求可归纳为思维能力，运算能力，空间想象能力，实践（应用）能力和创新意识五个方面. 那里所强调的是几个大方向的能力，这里从"小处"着眼提出应注意提高的几种能力.

（1）审读能力

审题是解题的第一步，而审题是否正确就看你的阅读理解能力，对常规题，尚还好说，而对于即时定义题和背景新颖从未谋面的试题，则需集中全部的注意力进行字斟句酌地审题. 这就是审题阅读能力，简称审读能力.

首先要消化题意，能具体化的要一步步地具体化. 题中有实例套用的要通过套用实例来理解题意.

例如:(2005 年上海卷,12)用 n 个不同的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可得到 $n!$ 个不同的排列,每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵,对第 i 行 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$,记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}, i=1,2,3,\cdots,n!$. 例如:用 1,2,3 可得数阵如右图,由于此数阵中每一列各数之和都是 12,所以 $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$. 那么,在用 1,2,3,4,5 形成的数阵中,$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$______.

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

解析:先套用题中 1,2,3 组成的数阵,每一列的和都是 $A_2^2(1+2+3)=12, 3!=6$,由 b_i 的定义知 $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$. 于是对于 1,2,3,4,5 形成的数阵,因 $5!=120$,每一列各数之和为 $A_4^4(1+2+3+4+5)=360$,所以 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{120}=-360+2\times360-3\times360+4\times360-5\times360=360(-1+2-3+4-5)=-1080$.

题中有具体函数的宜套用具体函数.

(2)估算能力

对于高考试题中的选择题,有的题本身就只需要估算,不必精算,有的题是不便于精算或时间不允许精算. 因此,估算能力对提高解题速度,争取有效的时间是十分重要的.

例如:(2005 年江苏卷,16)若 $3^a=0.618, a\in[k,k+1]$,则 $k=$______.

解析 $\because 3^{-1}<0.618<1=3^0, \therefore -1<a<0$. 又 $a\in[k,k+1]$,故 $k=-1$,

又如:(2005 年湖北卷,9)若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$,则 $2x$ 与 $3\sin x$ 的大小关系是______.

解析:由 $(2x-3\sin x)'=2-3\cos x$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内正负不定知,$2x$ 与 $3\sin x$ 的大小关系与 x 的取值有关.

这种估算比有的资料中先求出导数为 0 的点 $x=\arccos\dfrac{2}{3}$,再由函数的增减性判定或分别作出 $f(x)=2x, g(x)=3\sin x$ 的图象,再求两图象的交点的图象解法不知要节省多少时间,这就是我们强调的"时效"意义.

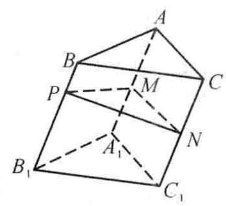
(3)数形结合与构图能力

数学思维的主要形式是逻辑思维,由于逻辑思维的严谨性,对解选择题或填空题时特别费时费事. 而数形结合思想有时能对研究的问题给出合理的几何模型,以最积极、最活跃、最具创造性的方式予以解决,产生了一种多快好省的最佳时效.

(4)自主探究能力

现行的考试大纲在创新意识中明确指出"对数学问题的观察、猜测、抽象、概括、证明,是发现问题和解决问题的重要途径". 高考试题的创新,不光是体现在试题的情境设计上,更重要的是体现在思维的价值水平上.

例如:(2004 年上海春招卷)如右图,点 P 为斜三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱 BB_1 上一点,$PM\perp BB_1$ 交 AA_1 于点 M, $PN\perp BB_1$ 交 CC_1 于点 N.



(Ⅰ)求证:$CC_1\perp MN$;

(Ⅱ)在任意 $\triangle DEF$ 中有余弦定理:$DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cdot\cos\angle DFE$.

拓展到空间,类比三角形的余弦定理,写出斜三棱柱的三个侧面面积与其中两个侧面所成的二面角之间的关系式,并予以证明.

答案:$S_{ABB_1A_1}^2=S_{BCC_1B_1}^2+S_{ACC_1A_1}^2-2S_{BCC_1B_1}\cdot S_{ACC_1A_1}\cdot\cos\alpha$,其中 α 为平面 CC_1B_1B 与平面 CC_1A_1A 的二面角

三、考场应试技巧

1. 按照顺序解题

数学试卷发下后,先按要求在指定位置上填上准考证号、姓名等,再略花三、五分钟浏览一下试卷的长度、题型以及题数,但尽量不去想这份卷子的难易,然后马上投入到答题中去. 命题人员对题目的安排一般是先易后难,因此可按照顺序答题. 但碰到个别难题或解题程序繁琐而又分数不多的题目,实在无法解决时则不应被缠住,此时应将其搁下. 避免耽误时间,影响信心.

2. 认真审清题意

审题时不能急于求成、马虎草率,必须理解题意,注意题目中关键的字、词、句. 从历届学生考试情况来看,审题常见错误有:一是不看全题,断章取义. 部分同学喜欢看一段做一段,做到后半题时才发现前半题做错了,只得从头再来. 须知,一道数学题包含完整的内容,是一个整体. 有的句与句之间有着内在的联系;有的前后呼应,相互衬垫. 所以必须纵观全题,全面领会题意. 二是粗心大意,一掠而过. 如许多考生把不可能看成可能;把由大到小看成由小到大;把多项式看成单项式;把不正确看成正确;把强弱顺序看成弱强顺序而答错. 三是误解题意,答非所问. 四是审题不透,一知半解. 许多同学见到新情境题目,内心紧张,未能全面理解题意.

3. 根据要求回答

近几年高考中出现很多考生不按要求答题而失分. 如把答案写在密封线内,阅卷时无法看到答案而不给分;如要求求单调减区间,有的同学增减区间都求出来. 如果增区间求错反而会扣分.

CONTENTS 目录 知识与方法 阅读题要

第二章 统计

第三章 概率

必修 4

第一章 三角函数

第二章 平面向量

第二章 概率

第三章 统计案例

选修 4-1 几何证明选讲

选修 4-2 矩阵与变换

选修 4-4 坐标系与参数方程

选修 4-5 不等式选讲

必修1　第一章　集合与函数的概念

能力测试点1　集合的概念及运算

考纲三维解读

一、考纲要求

1. 了解集合及其表示

(1) 了解集合的含义,体会元素与集合的“属于”关系.

(2) 能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

2. 理解子集的意义

(1) 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

(2) 了解全集与空集的含义.

3. 理解交集、并集、补集的概念

(1) 理解两个集合的并集与交集的含义;会求两个简单集合的并集与交集.

(2)理解给定集合的一个子集的补集的含义;会求给定子集的补集.

(3) 会用 Venn 图表示集合的关系及运算.

二、命题趋势

有关集合的高考试题,考查重点是集合与集合之间的关系,近年试题加强了对集合的计算化简的考查,并向无限集发展,考查抽象思维能力,在解决这些问题时,要注意利用几何的直观性,注意运用 Venn 图解题方法的训练,注意利用特殊值法解题,加强集合表示方法的转换和化简的训练.

1 知识要点

高考考点解读——名师释疑答题点

1. 元素与集合的含义

一般地,把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合.

2. 集合中元素的特征

(1)确定性:对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合中的元素,或者不是它的元素,这是集合的最基本特征.

(2)互异性:集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的),相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

(3)无序性:在一个集合中,通常不考虑它的元素之间的顺序,也就是说$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$.

有关集合的运算,特别需要注意的是元素的互异性,其办法是将所得结果进行检验.

3. 常用集合的表示法

常用的有列举法、描述法、区间表示法和图示法.

有限集常用列举法表示,而无限集常用描述法或区间表示法.

描述法表示集合时,集合中元素的意义取决于它的“代表”元素,如:

$A=\{y\mid y=\sqrt{x^2-2x+3}\}$中的元素为函数$y=\sqrt{x^2-2x+3}$的函数值;

$B=\{x\mid y=\sqrt{x^2-2x+3}\}$中的元素为函数$y=\sqrt{x^2-2x+3}$的自变量的取值;

$C=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x^2-2x+3}\}$中的元素为函数

样板题解析——看看以前怎样考的

考题1 设$A=\{-4,2a-1,a^2\}$,$B=\{9,a-5,1-a\}$,已知$A\cap B=\{9\}$,求实数a的值.
(2006 年湖北省重点中学联考题)

解析 $\because A\cap B=\{9\}$,$\therefore 9\in A$. 若$2a-1=9$,则$a=5$.

此时$A=\{-4,9,25\}$,$B=\{9,0,-4\}$,$A\cap B=\{9,-4\}$,与已知矛盾,舍去.

若$a^2=9$,则$a=\pm3$. 当$a=3$时,$A=\{-4,5,9\}$,$B=\{-2,-2,9\}$.

B中有2个元素均为-2,与集合中元素的互异性矛盾,应舍去.

当$a=-3$时,$A=\{-4,-7,9\}$,$B=\{9,-8,4\}$,符合题意.

综上所述,$a=-3$.

点评 本题考查集合元素的基本特征——确定性、互异性、无序性,切入点是分类讨论思想,由于集合中元素用字母表示,检验结果必不可少.

考题2 若集合$A=\{y\mid y=x^{\frac{1}{3}},-1\leqslant x\leqslant1\}$,$B=\left\{y\,\middle|\,y=2-\dfrac{1}{x},0<x\leqslant1\right\}$,则$A\cap B$等于______.
(2006 年上海春招)

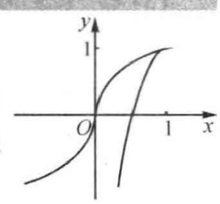


图 1－4

解析 根据题意求出集合A和B的元素,再求公共元素所组成的集合,便可得正确选项. 也可画出图象,求函数值的公共部分.

解法一:$A=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant1\}$,$B=\{y\mid y\leqslant1\}$,$A\cap B=A=[-1,1]$.

解法二:(数形结合法)如图 1－4,从两个函数图象上可以看出它们的函数值的交集是公共部分,即$[-1,1]$.

点评 解答本类题目,必须弄清集合的元素是什么,是函数关系中自变量的取值,还是因变量的取值,还是曲线上的点……数形结合是解集合问题的常用方法,解题时要尽可能地借助数轴、直角坐标系或韦恩图等工具,将抽象的代数问题具体化、形象化、直观化,然后利用数形结合的思想方法解决.

考题3 已知集合$A=\{x\mid 0<ax+1\leqslant5\}$,集合$B=\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}<x\leqslant2\right\}$.

(1)若$A\subseteq B$,求实数a的取值范围;(2)若$B\subseteq A$,求实数a的取值范围;

(3)A、B能否相等? 若能,求出a的值;若不能,试说明理由.
(2007 年湖北省重点中学联考)

解析 A中不等式的解集应分三种情况讨论:

①若$a=0$,则$A=\mathbf{R}$;

②若$a<0$,则$A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{4}{a}\leqslant x<-\dfrac{1}{a}\right\}$;

③若$a>0$,则$A=\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{a}<x\leqslant\dfrac{4}{a}\right\}$

$y=\sqrt{x^2-2x+3}$的图象上的点.

4. 元素与集合、集合与集合之间的关系

(1) 元素与集合之间的关系是"属于"或"不属于". 对象 x 是集合 A 的元素,称 x 属于 A,记作 $x\in A$. 否则称 x 不属于 A,记作 $x\notin A$. 记号"$\in$"和"$\notin$"只能用于表示元素与集合之间的关系,不能用来表示两个集合之间的关系.

(2) 若集合 A 中任一元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$,读作 A 包含于 B,或记作 $B\supseteq A$,读作 B 包含 A. 若 A 是 B 的子集且 B 中至少存在一个元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$,读作 A 真包含于 B,或记作 $B\supsetneqq A$,读作 B 真包含 A. 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

(3) 常用集合之间的包含关系

$\varnothing\subsetneqq\mathbf{N}^*\subsetneqq\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

注: $\mathbf{N}^*$ 与 $\mathbf{N}_+$ 都表示正整数集.

(1) 当 $a=0$ 时,若 $A\subseteq B$,此种情况不存在;

当 $a<0$ 时,若 $A\subseteq B$,则 $\begin{cases}\frac{4}{a}>-\frac{1}{2},\\-\frac{1}{a}\leqslant 2,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a<-8,\\a\leqslant-\frac{1}{2},\end{cases}$ $\therefore a<-8$;

当 $a>0$ 时,若 $A\subseteq B$,则 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\geqslant-\frac{1}{2},\\\frac{4}{a}\leqslant 2,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a\geqslant 2,\\a\geqslant 2,\end{cases}$ $\therefore a\geqslant 2$.

综上知,此时 a 的取值范围是 $\{a|a<-8$ 或 $a\geqslant 2\}$.

(2) 当 $a=0$ 时,显然 $B\subseteq A$;

当 $a<0$ 时,若 $B\subseteq A$,则 $\begin{cases}\frac{4}{a}\leqslant-\frac{1}{2},\\-\frac{1}{a}>2,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a\geqslant-8,\\a>-\frac{1}{2},\end{cases}$ $\therefore -\frac{1}{2}<a<0$;

当 $a>0$ 时,若 $B\subseteq A$,则 $\begin{cases}-\frac{1}{a}\leqslant-\frac{1}{2},\\\frac{4}{a}\geqslant 2,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a\leqslant 2,\\a\leqslant 2,\end{cases}$ $\therefore 0<a\leqslant 2$.

综上知,当 $B\subseteq A$ 时,$\left\{a\middle|-\frac{1}{2}<a\leqslant 2\right\}$

(3) 当且仅当 A、B 两个集合互相包含时,$A=B$,

由(1)、(2)知,$a=2$.

点评 解决两个数集关系问题时,避免出错的一个有效手段即是合理运用数轴帮助分析与求解,另外,在解含有参数的不等式(或方程)时,要对参数进行讨论,分类时要遵循"不重不漏"的分类原则,然后对于每一类情况都要给出问题的解答.

思维拓展

高考考点解读——名师释疑答题点

样板题解析——看看以前怎样考的

5. 集合的运算

(1) 交集:$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(2) 并集:$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(3) 补集:$\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

6. 集合运算的性质

(1) $A\cap B=B\cap A, A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B, A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2) $A\cup B=B\cup A, A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B, A\cup A=A, A\cup\varnothing=A$.

(3) $A\cup(\complement_U A)=U, A\cap(\complement_U A)=\varnothing$.

(4) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C), (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(5) $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B), \complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.

(6) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A, A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

7. 几个常见的结论

(1) 由 n 个元素组成的集合有 2^n 个,其中真子集的个数有 2^n-1 个,非空真子集的个数有 2^n-2 个.

(2) 空集是任何集合的子集,空集是任何非空集合的真子集.

8. 集合表示的图示法

(1) 利用数轴表示数集. 如:$A=\{x|x\geqslant 1\}, B=\{x|x\leqslant 3\}$,则 $A\cap B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$,用数轴表示如图 1-1:

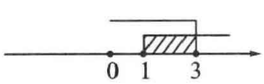


图 1-1

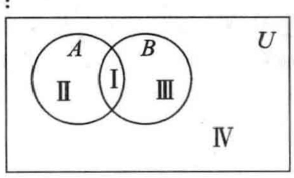


图 1-2

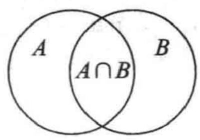


图 1-3

(2) Venn 图:用封闭曲线的内部表示集合或集合之间的关系.

(3) 试用集合 A、B 的交集、并集、补集表示下列图中 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 四个部分所表示的集合.

Ⅰ:$A\cap B$. Ⅱ:$A\cap(\complement_U B)$. Ⅲ:$B\cap(\complement_U A)$. Ⅳ:$\complement_U(A\cup B)$.

(4) 利用文氏图可计算集合中元素的个数,有如下公式:

$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

其中 $\mathrm{card}(A)$ 表示集合 A 中元素的个数,上述公式可用如图所示加以说明.

考题 4 设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N}), P=\{1,2,3,4,5\}, Q=\{3,4,5,6,7\}$. 记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in P\}, \hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in Q\}$,则 $(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=$______.

(2005 年浙江高考题改编)

解析 $\because f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$, $\therefore f(n)$ 为奇数.

$\therefore \hat{P}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in P\}=\{0,1,2\}$,

$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in Q\}=\{1,2,3\}$.

$\therefore (\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=\{0,3\}$.

考题 5 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,3\}, B=\{2,3,4\}$,则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 等于______.

(2007 年辽宁高考题)

解析 由题意得,$\complement_U A=\{2,4,5\}, \complement_U B=\{1,5\}$,

$\therefore (\complement_U A)\cap\complement_U B=\{5\}$.

点评 本题利用了集合运算性质

$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$.

考题 6 设全集 $U=\{x|x$ 为小于 20 的质数$\}$, $A\cap(\complement_U B)=\{5,11\}, (\complement_U A)\cap B=\{7,13\}, (\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{17,19\}$,求 A、B.

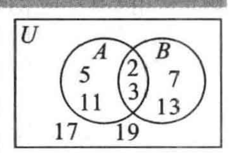


图 1-5

解析 $\because U=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$,作出 Venn 图易知,$A=\{2,3,5,11\}, B=\{2,3,7,13\}$.

点评 本题利用文氏图的方法求解,简单、直观.