

高考完全解读

王后雄考案

丛书策划：熊 辉

数学



课标本

丛书主编：王后雄
本册主编：马春华



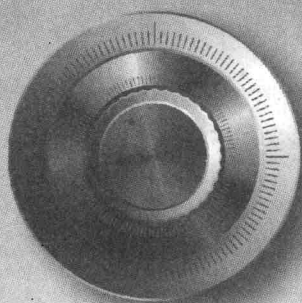
中国青年出版社



高考完全解读

王后雄考案

丛书策划：熊辉



数学

课标本

丛书主编：王后雄
本册主编：马春华
编委：李学富 陈延刚
孙翊 章雄钢
陈 锟 周建国
左建华 吴海林
胡福民 程 林
姚火生 黄光文
张 莹 张新平
肖建章 王新佑



中国青年出版社

(京)新登字083号

图书在版编目(CIP)数据

高考完全解读:课标版.数学/王后雄主编.

—3版.—北京:中国青年出版社,2008

(“X”导航丛书系列)

ISBN 978-7-5006-6809-1

I.高... II.王... III.数学课—高中—升学参考资料 IV.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第030138号

策 划:熊 辉

责任编辑:李 扬

封面设计:小 河

高考完全解读 课标本
数 学

中国青年出版社 出版发行

社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708

网址:www.cyp.com.cn

编辑部电话:(010)64034328

读者服务热线:(027)61883306

武汉市精彩印务有限公司印制 新华书店经销

889×1194 1/16 25印张 676千字

2008年5月北京第3版 2008年5月湖北第3次印刷

印数:10001—15000册

定价:53.70元

本书如有任何印装质量问题,请与承印厂联系调换

联系电话:(027)61883355



备考指南

2009年高考题型预测与答题技术指要

一、高考命题特点和趋势

随着新课程标准的实施,高考改革也必然随之而来,由于教材即将“一标多本”,因此高考也不可能“一卷考天下”.加之各地教育发展本来就不平衡,近千万考生同一卷的风险太大等因素,高考改革势在必行.综合分析近两年各地高考试题,可总结出如下特点和趋势.

1. 考题覆盖全面,考点重点凸现

国家考试中心数学科负责同志在“命题设计与考核能力要求”中有这么两段话:“重点知识是支撑学科知识体系的主要内容,考查时要保持较高的比例,并达到必要的深度,构成数学试题的主体.”“对数学基础知识的考查,要求全面,但不刻意追求知识点的百分比,对支撑数学科知识体系的主干知识,考查时保证较高的比例,并保持必要的深度.即重点知识重点考查,如函数关系及性质,空间线面关系,坐标方法的运用等内容的考查都应保持较高的比例,并达到必要的深度……显示出重点知识在试卷中的突出位置.”

从近两年的31套试题中出题的频数来看,最高的依次是函数、立体几何、圆锥曲线、三角函数、概率与统计、平面向量、导数、数列、不等式等章节;从考点来看,考题频数较多的是:集合与运算,简易逻辑与充要条件,反函数,指数函数与对数函数,函数的图象与变换,函数的最值,等差数列与等比数列,两角和与差的三角函数,三角函数图象及性质,平面向量的数量积,均值不等式,简单的线性规划,直线与圆锥曲线的位置关系,轨迹方程,平面与平面的位置关系,空间角和空间距离,二项式定理,互斥事件、对立事件与相互独立事件的概率,离散型随机变量的期望,数列极限,导数的应用等考点.

从笔者参与高考阅卷的情况分析,近几年来相当一部分考生在答题中的一些失误并不是因缺乏灵活的思维和敏锐的感觉,而恰恰是因为对数学大纲中规定的基础知识、基本理论掌握还存在某些欠缺,甚至有所偏废所致.虽然重点考点,重点章节凸现,但全面复习,全面备考是稳妥之策,热与冷应辩证对待.

2. 新增内容的整合,成为考查的热点

由于高考试题有区分选拔功能,在考查基础知识的同时,还要注重能力的考查,确立以能力立意命题是命题的指导思想,因此命题时,特别注意知识之间的交叉、渗透与整合,命题者常常在知识的整合、交汇点上设计试题.在这方面,新增内容:逻辑初步,平面向量,线性规划,概率与统计,函数的连续与导数,又成为命题者整合与交汇的热点.2005年、2006年这两年的高考试卷中这些新增内容所占的题率分别约为28%和27%,这一比例超过了该内容的课时比例,若加上立体几何中的空间向量的解法,此比例还将大大提高.

(1) 平面向量与其他知识点的整合

由于平面向量具有代数与几何双重形式的身份,具有极其丰富的数与形的数学背景和很强的工具性能,因此成为高考中能力考查的一大新热点.

① 平面向量与代数的整合

例如:(2006年湖南卷,理5)已知 $|a|=2|b| \neq 0$,且关于 x 的方程 $x^2 + |a|x + |a||b| = 0$ 有实根,则 a 与 b 的夹角的取值范围是_____.

答案: $[\frac{\pi}{3}, \pi]$

② 平面向量与三角函数的整合

例如:(2005年山东卷,17)已知向量 $m = (\cos\theta, \sin\theta)$ 和 $n = (\sqrt{2} - \sin\theta, \cos\theta)$, $\theta \in (\pi, 2\pi)$,且 $|m+n| = \frac{8\sqrt{2}}{5}$,

求 $\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8})$ 的值.

答案: $-\frac{4}{5}$.

③ 平面向量与解析几何的整合

例如:(2005年全国卷I,21)已知椭圆的中心为坐标原点 O ,焦点在 x 轴上,斜率为1,且过椭圆右焦点 F 的直线交椭圆于 A, B 两点, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 与 $a = (3, -1)$ 共线.

(I)求椭圆的离心率;

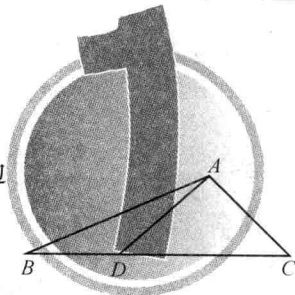
(II)设 M 为椭圆上任意一点,且 $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$,证明 $\lambda^2 + \mu^2$ 为定值.

答案略.

④ 平面向量与平面几何的整合

例如:(2007年天津卷理,15)如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, D 是边 BC 上一点, $DC = 2BD$,则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

答案: $-\frac{8}{3}$



又如:(2005年江苏卷,18)在 $\triangle ABC$ 中, O 为中线 AM 上的一个动点,若 $AM=2$,则 $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 的最小值是

答案: -2.

(2)数学期望与其他知识的整合

数学期望,作为新增加的教学内容,既是教学重点,又是教学难点.近年来出现的数学期望与其他知识点整合的高考试题,让人耳目一新.

①数学期望与函数的整合

例如:(2005年湖南卷,18)某城市有甲、乙、丙3个旅游景点,一位客人游览这3个景点的概率分别是0.4,0.5,0.6且客人是否游览哪个景点互不影响,设 ξ 表示客人离开该城市游览的景点数与没游览的景点数之差的绝对值.

(I)求 ξ 的分布及数学期望;

(II)记“函数 $f(x) = x^2 - 3\xi x + 1$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上单调递增”为事件 A ,求事件 A 的概率.

答案略.

②数学期望与解析几何的整合

例如:(2005年全国卷III,15)设 l 为平面上过点 $(0,1)$ 的直线, l 的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{2}$,用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离,则随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi =$ _____.

答案: $\frac{4}{7}$.

③数学期望与数列的整合

例如:(2005年广东卷,18)箱中装有大小相同的黄、白两种颜色的乒乓球,黄、白乒乓球的数量比为 $s:t$.现在从箱中每次任意取出一个球,若取出的是黄球则结束,若取出的是白球,则将其放回箱中,并继续从箱中任意取出一个球,但取球的次数最多不超过 n 次,以 ξ 表示取球结束时已取到白球的次数.

(I)求 ξ 的分布列;(II)求 ξ 的数学期望.

答案略.

(3)导数与其他知识的整合

导数是研究函数的重要工具,近两年来已出现导数在研究不等式及向量、三角函数等方面的综合试题.

①导数与不等式的整合

例如:(2004年湖南卷,12)设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数和偶函数.当 $x < 0$ 时, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$,且 $g(-3) = 0$.则不等式 $f(x)g(x) < 0$ 的解集是_____.

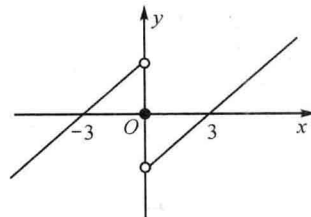
解析:设 $F(x) = f(x)g(x)$, $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

依题意知 $F(-x) = f(-x)g(-x) = -F(x)$,即 $F(x)$ 为奇函数.

由 $x < 0$ 时, $F'(x) > 0$,知 $F(x)$ 为增函数,故由奇函数性质知, $x > 0$ 时, $F(x)$ 也为增函数.

又由 $g(-3) = 0$ 知 $g(3) = 0$, $F(-3) = F(3) = 0$,

由奇函数的性质知 $F(0) = 0$.依此可勾画 $F(x)$ 的大概图象如右图,故 $f(x)g(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$.



②导数与向量的整合

例如:(2005年江西卷,18)已知向量 $\mathbf{a} = \left(2\cos\frac{x}{2}, \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $\mathbf{b} = \left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$,

令 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,是否存在实数 $x \in [0, \pi]$,使 $f(x) + f'(x) = 0$ (其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数函数)?若存在,则求出 x 的值;若不存在,则证明之.

简解:由 $f(x) = \sin x + \cos x$, $f(x) + f'(x) = 2\cos x = 0$,得 $x = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$,但此时 $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ 无意义,故不存在这样的实数 x .

(4)新增内容成为应用题的主要载体

自新增内容进入高考范围以来,一改过去应用问题局限于函数及不等式的范畴,在线性规划、导数及概率、期望中两年内就出现许多内容新颖、贴近生活的优秀试题.

①利用线性规划求最值

例如:(2005年湖北卷,16)某实验室需购某种化工原料106kg,现在市场上该原料有两种包装,一种是每袋35kg,价格为140元;另一种是每袋24kg,价格为120元.在满足需要的条件下,最少要花费_____元.

解析:设购买35kg的 x 袋,24kg的 y 袋,则 $35x + 24y \geq 106$, $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}$,共要花费 $z = 140x + 120y$.

作出 $35x + 24y \geq 106$, $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}$ 对应的可行域,目标函数 $z = 140x + 120y$ 在格点 $(1, 3)$ 处取最小值500元.填500.

又如:(2004年江苏卷,19)制定投资计划时,不仅要考虑可能获得的盈利,而且要考虑可能出现的亏损.

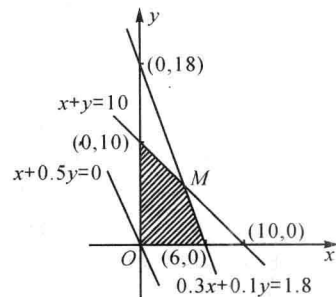
某投资人打算投资甲、乙两个项目,根据预测,甲、乙项目可能的最大盈利率分别为100%和50%,可能的最大亏损率分别为30%和10%.投资人计划投资金额不超过10万元,要求确保可能的资金亏损不超过1.8万元.问投资人对甲、乙两个项目各投资多少万元,才能使可能的盈利最大?

解:设投资人分别用 x 万元、 y 万元投资甲、乙两个项目,由题意,有

$$\begin{cases} x+y \leq 10, \\ 0.3x+0.1y \leq 1.8, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases} \text{最大盈利为 } z = x + 0.5y.$$

上述不等式组表示的平面区域如右图所示,阴影部分(含边界)即为可行域.

作直线 $l_0: x + 0.5y = 0$, 并作平行于直线 l_0 的一组直线: $x + 0.5y = z, z \in \mathbf{R}$; 与可行域相交, 其中有一条直线经过可行域上的 M 点时, 与直线 $x + 0.5y = 0$ 的距离最大, 这 M 点是直线 $x + y = 10$ 和 $0.3x + 0.1y = 1.8$ 的交点. 解方程组



$$\begin{cases} x+y=10, \\ 0.3x+0.1y=1.8, \end{cases} \text{得 } \begin{cases} x=4, \\ y=6. \end{cases}$$

此时, $z = 1 \times 4 + 0.5 \times 6 = 7$ (万元).

即当 $x = 4, y = 6$ 时, z 取得最大值 7 万元.

答:(略)

②利用导数求最值

例如:(2004年辽宁卷)甲方是一农场,乙方是一工厂.由于乙方生产需占用甲方的资源,因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定的净收入.在乙方不赔付甲方的情况下,乙方的年利润 x (元)与年产量 t (吨)满足函数关系 $x = 2000\sqrt{t}$.

若乙方每生产一吨产品必须赔付甲方 s 元(以下称 s 为赔付价格),

(I) 将乙方的年利润 w (元)表示为年产量 t (吨)的函数,并求出乙方获得最大利润的年产量;

(II) 甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y = 0.002t^2$ (元),在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下,甲方要在索赔中获得最大净收入,应向乙方要求的赔付价格 s 是多少?

解:(I) 因为赔付价格为 s 元/吨,所以乙方的实际年利润为 $w = 2000\sqrt{t} - st$.

$$\text{由 } w' = \frac{1000}{\sqrt{t}} - s = \frac{1000 - s\sqrt{t}}{\sqrt{t}}, \text{令 } w' = 0, \text{得 } t = t_0 = \left(\frac{1000}{s}\right)^2.$$

当 $t < t_0$ 时, $w' > 0$; 当 $t > t_0$ 时, $w' < 0$, 所以 $t = t_0$ 时, w 取得最大值.

因此乙方取得最大年利润的年产量 $t_0 = \left(\frac{1000}{s}\right)^2$ (吨).

(II) 设甲方净收入为 v 元, 则 $v = st - 0.002t^2$.

将 $t = \left(\frac{1000}{s}\right)^2$ 代入上式, 得到甲方净收入 v 与赔付价格 s 之间的函数关系式 $v = \frac{1000^2}{s} - \frac{2 \times 1000^3}{s^4}$.

$$\text{又 } v' = -\frac{1000^2}{s^2} + \frac{8 \times 1000^3}{s^5} = \frac{1000^2 \times (8000 - s^3)}{s^5}, \text{令 } v' = 0, \text{得 } s = 20.$$

当 $s < 20$ 时, $v' > 0$; 当 $s > 20$ 时, $v' < 0$, 所以 $s = 20$ 时, v 取得最大值.

因此甲方向乙方要求赔付价格 $s = 20$ (元/吨)时, 获最大净收入.

③概率和期望的实际应用

例如:(2005年天津卷,15)某公司有 5 万元资金用于投资开发项目.如果成功,一年后可获利 12%;一旦失败,一年后将丧失全部资金的 50%.下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果.

投资成功	投资失败
192 次	8 次

则该公司一年后估计可获收益的期望是 _____ (元).

解析: $5 \times 12\% = 0.6, 5 \times (-50\%) = -2.5$.

ξ 的分布列为

ξ	0.6	-2.5
P	$\frac{192}{200}$	$\frac{8}{200}$

$$E\xi = 0.6 \times \frac{192}{200} - 2.5 \times \frac{8}{200} = 4760 \text{ (元)}. \text{故填 } 4760.$$

又如:(2006年湖北)(理)在某校举行的数学竞赛中,全体参赛学生的竞赛成绩近似服从正态分布 $N(70, 100)$. 已知成绩在 90 分以上(含 90 分)的学生有 12 名.

(I) 试问此次参赛的学生总数约为多少人?

(II) 若该校计划奖励竞赛成绩排在前 50 名的学生,试问设奖的分数线约为多少分?

可供查阅的(部分)标准正态分布表 $\Phi(x_0) = P(x < x_0)$

x_0	0	1	2	3	4
1.2	0.884 9	0.886 9	0.888 8	0.890 7	0.892 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8
2.0	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8

x_0	5	6	7	8	9
1.2	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.911 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.926 5	0.927 8	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.9	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 2	0.976 7
2.0	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7

解析:本小题主要考查正态分布、对立事件的概念和标准正态分布表的查阅,考查运用概率统计知识解决实际问题的能力.

(I) 设参赛学生的分数为 ξ . 因为 $\xi \sim N(70, 100)$, 由条件知,

$$P(\xi \geq 90) = 1 - P(\xi < 90) = 1 - F(90) = 1 - \Phi\left(\frac{90-70}{10}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 2 = 0.022 8.$$

这说明成绩在 90 分以上(含 90 分)的学生人数约占全体参赛人数的 2.28%. 因此, 参赛总人数约为 $\frac{12}{0.022 8} \approx 526$ (人).

(II) 假定设奖的分数线为 x 分, 则

$$P(\xi \geq x) = 1 - P(\xi < x) = 1 - F(x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-70}{10}\right) = \frac{50}{526} \approx 0.095 1,$$

即 $\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right) = 0.904 9$, 查表得 $\frac{x-70}{10} = 1.31$, 解得 $x = 83.1$. 故设奖的分数线约为 83 分.

这一类试题, 2005 年有重庆卷(18)抽奖中奖的概率, 湖北卷(19)能领取驾照的概率, 福建卷(18)罚球得分的期望, 全国卷 II(19)排球获胜的期望, 全国卷 I(20)种子补种的期望, 重庆文(15)开锁的概率; 2004 年有全国卷 II(18)球队抽签两弱队同组的概率, 湖南卷(18)产品检验抽到一等品的概率, 浙江卷(20)停电的概率, 全国卷 I(18)热线电话占线的概率与期望, 重庆卷(18)汽车通过有红绿灯路口的期望, 还有全国卷 III(19)、天津卷(18)、福建卷(18)分别为科普比赛、演讲比赛、英语口语测试得分的概率分布及期望等.

当然传统知识方面的数学应用也出现了一些构思新颖的好题, 如 2005 年上海卷(20)以新建中低价住房为背景, 2004 年福建卷(20)以企业进行技术改造为背景, 均是借用等差数列、等比数列和不等式来解决. 2004 年广东卷(20)不同的观测点听到巨响的时间不同, 运用声波的传播速度和圆锥曲线的定义来确定巨响的位置. 这也都是很好的应用问题.

3. 突出能力立意, 命题多有创新

作为选拔性的高考, 不仅是知识性的测试, 更侧重于能力的考核, 因此高考试题应突出能力立意, 不但要考查学生学过的、见过的知识的综合与运用, 还要考查课堂没有教过的和学生没有见过的, 需要挖掘潜能方能解决的一些问题.

(1) 即时定义题层出不穷

所谓即时定义题, 就是在试题的叙述中当场给出某一个概念. 概念的给出常伴随有“设”、“记”、“称”、“规定”、“定义”等字眼, 然后再根据这个概念现学现用来解题. 这一类试题考生往往比较陌生, 但又多有新意.

例如: (2005 年辽宁卷, 7) 在 \mathbf{R} 上定义运算 $\otimes: x \otimes y = x(1-y)$. 若不等式 $(x-a) \otimes (x+a) < 1$ 对任意实数 x 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案: $-\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$

(2007 广东卷文, 8 改编) 设 S 是至少含有两个元素的集合, 在 S 上定义了一个二元运算“ $*$ ”(即对任意的 $a, b \in S$, 对于有序元素对 (a, b) , 在 S 中有唯一确定的元素 $a * b$ 与之对应), 若对于任意的 $a, b \in S$, 有 $a * (b * a) = b$, 则对任意的 $a, b \in S$, 下列等式中:

① $(a * b) * a = a$ ② $[a * (b * a)] * (a * b) = a$
 ③ $b * (b * b) = b$ ④ $(a * b) * [b * (a * b)] = b$

恒成立的是_____. (写出等式序号)

答案: ②、③、④

再如: (2007 年广东卷理, 8 改编) 设 S 是至少含有两个元素的集合, 在 S 上定义了一个二元运算“ $*$ ”(即对任意的 $a, b \in S$, 对于有序元素对 (a, b) , 在 S 中有唯一确定的元素 $a * b$ 与之对应), 若对任意的 $a, b \in S$, 有 $a * (b * a) = b$, 则对任意的 $a, b \in S$, $(a * b) * [b * (a * b)] =$ _____.

答案: b

此外 2005 年的试卷中还有湖南卷第 15 题“函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的面积”, 北京卷第 20 题“ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的单峰函数”; 2004 年的有上海卷第 12 题“数列的基本量”, 北京春招第 22 题“等差数阵”等.

(2) 试题背景开放, 情境设计新颖

这里说试题背景开放, 是指试题不一定是以高中所见过的内容为背景, 君不见诸如数阵、等差数阵、单峰函数、曲线面积还有计算机的计数制都已纷纷登场亮相了吗? 至于情境设计, 就是将相关的高中知识、初中的平面几何知识等, 不分学科, 不分学段进行整合嫁接改造成一道新的试题.

例如: (2005 年全国卷 III, 12) 计算机中常用的十六进制是逢 16 进 1 的计数制, 采用数字 0~9 和字母 A~F 共 16 个计数符号, 这些符号与十进制的数的对应关系如下表:

十六进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如, 用十六进制表示: $E + D = 1B$ 则 $A \times B =$ _____.

答案: $6E$

又如(2005 年北京卷, 14) 已知 n 次多项式 $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

如果在一种算法中,计算 $x_0^k (k=2,3,4,\dots,n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法,计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算(6 次乘法,3 次加法),那么计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要_____次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x) = a_0, P_{k+1}(x) = xP_k(x) + a_{k+1} (k=0,1,2,\dots,n-1)$. 利用该算法,计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算,计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要_____次运算.

答案: $\frac{1}{2}n(n+3); 2n$

(3) 图象信息题不断翻新

图象信息题在高考试题中露面已有十余年的历史了,这并不稀奇. 但 2005 年已向超越函数和绝对值函数的叠加迈进了.

例如:(2007 年湖南卷理,6 改编) 函数 $f(x) = \begin{cases} 4x-4, & x \leq 1 \\ x^2-4x+3, & x > 1 \end{cases}$ 的图象和函数 $g(x) = \log_2 x$ 的图象的交点个数是_____.

答案:3

解析:在同一坐标系中画出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象,由图知,有 3 个交点.

特别是自 1998 年全国高考那道“向高为 H 的水瓶中注水”,题干给出注水量 V 与水深 h 的函数图象,选项给出四个不同形状的水瓶的试题问世后,这类试题不断翻新,近两年又向导数的方向推进.

又如:(2006 年北京卷理,16) 已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点 x_0 处取得极大值 5,其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(1,0), (2,0)$, 如图所示,求:① x_0 的值,

② a, b, c 的值.

解析:①由图象可知,在 $(-\infty, 1)$ 内 $f'(x) > 0$, 在 $(1, 2)$ 内 $f'(x) < 0$, 在 $(2, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(2, +\infty)$ 内是增函数, 在 $(1, 2)$ 内是减函数. 因此, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 所以 $x_0 = 1$.

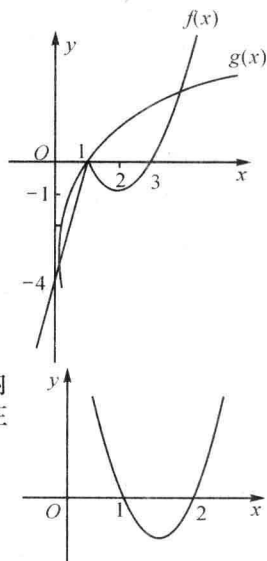
②解法 1: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,

由 $f'(1) = 0, f'(2) = 0, f(1) = 5$, 得 $\begin{cases} 3a + 2b + c = 0, \\ 12a + 4b + c = 0, \\ a + b + c = 5, \end{cases}$ 解得 $a = 2, b = -9, c = 12$.

解法 2: 设 $f'(x) = m(x-1)(x-2) = mx^2 - 3mx + 2m$,

又 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 所以 $a = \frac{m}{3}, b = -\frac{3}{2}m, c = 2m, f(x) = \frac{m}{3}x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + 2mx$,

由 $f(1) = 5$ 得 $m = 6$, 所以 $a = 2, b = -9, c = 12$.



二、高考复习建议

1. 夯实基础, 回归教材, 突出重点, 切忌盲目

数学复习内容, 大致可分为基础知识和基本技能两大板块. 在复习中, 要注意基本概念、基本公式、基本定理的辨析比较及灵活运用, 做到理解、综合、创新. 所谓理解, 就是力求有意识地培养分析推理能力, 综合概括能力和抽象思维能力. 对定义、定理、公式的复习, 一定要注重弄清来龙去脉, 沟通相互联系, 掌握推证过程, 注意表达形式, 归纳记忆方法, 明确主要用途. 所谓“综合”是指不同板块的知识进行去伪存真、去粗取精、由浅入深的提炼加工知识之间的纵横联系, 使知识系统化、网络化, 以便于记忆、储存、提取和应用. 所谓“创新”, 是指在融会贯通基础知识上, 在解决问题时表现出来的灵活性. 为此, 除注重书本的知识和老师的讲解之外, 还要挖掘书本上没有的和老师没有讲到的问题. 如概念的多重涵义、问题的多个角度、共性问题的规律总结、探索问题解决的思想方法等.

2. 注重通性通法, 淡化特殊技艺

新课标明确提出高考主要考查一般性的规律和方法. 例如, 代数中的定义法、图象法、基本量法、方程法、递推法、转化法, 立体几何中的降维法、线面关系转化法, 解析几何中的解析法、待定系数法、参数法等.

不必在难题和偏题上花太多精力. 难题、偏题都是由一些很基本的题融合而成的, 只要考生掌握了基本知识, 掌握了容易题、中等题的解法, 难题、偏题也不是“牢不可破”的.

3. 强化数学思想方法训练, 提高理性思维能力

在复习备考时, 应注意常用的数学技能和方法, 如配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法和数形结合法等, 以及常用的逻辑推理方法, 如分析法、综合法、归纳法、演绎法和反证法等, 这些都是高考考查的主要内容. 对重要的数学思想方法, 如函数与方程、变换与转化、分类与归纳、数形的结合与分离、定常与变化的对立与统一等, 也将通过具体问题, 测试考生对数学知识的掌握程度.

学习数学基础知识, 要充分重视知识的形成过程. 解数学题, 要着重研究思维过程, 弄清基本数学方法和基本数学思想在解题中的应用, 注重培养直觉猜想、归纳抽象、逻辑推理、演绎论证、运算求解等理性思维能力.

4. 应注意提高几种能力

如前所说, 既然高考试题强调能力立意, 因此我们当然要要提高各种能力, 高考数学考试的能力要求可归纳为思维能力, 运算能力, 空间想象能力, 实践(应用)能力和创新意识五个方面. 那里所强调的是几个大方向的能力, 这里从“小处”着眼提出应注意提高的几种能力.

(1) 审读能力

审题是解题的第一步, 而审题是否正确就看你的阅读理解能力, 对常规题, 尚还好说, 而对于即时定义题和背景新颖从未谋面的试题, 则需集中全部的注意力进行字斟句酌地审题. 这就是审题阅读能力, 简称审读能力.

首先要消化题意, 能具体化的要一步步地具体化. 题中有实例套用的要通过套用实例来理解题意.

例如:(2005年上海卷,12)用 n 个不同的实数 a_1, a_2, \dots, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列,每个排列为 1 2 3
 一行写成一个 $n!$ 行的数阵,对第 i 行 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$, 记 $b_i = -a_{i1} + 2a_{i2} - 3a_{i3} + \dots + (-1)^n na_{in}, i = 1, 1 3 2$
 $2, 3, \dots, n!$. 例如:用 1, 2, 3 可得数阵如右图,由于此数阵中每一列各数之和都是 12,所以 $b_1 + b_2 + \dots + 2 1 3$
 $b_6 = -12 + 2 \times 12 - 3 \times 12 = -24$. 那么,在用 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵中, $b_1 + b_2 + \dots + b_{120} = \underline{\hspace{2cm}}$. $2 3 1$
 $3 1 2$
 $3 2 1$

解析:先套用题中 1, 2, 3 组成的数阵,每一列的和都是 $A_2^2(1+2+3) = 12, 3! = 6$, 由 b_i 的定义知
 $b_1 + b_2 + \dots + b_6 = -12 + 2 \times 12 - 3 \times 12 = -24$. 于是对于 1, 2, 3, 4, 5 形成的数阵,因 $5! = 120$, 每一列
 各数之和为 $A_4^4(1+2+3+4+5) = 360$, 所以 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{120} = -360 + 2 \times 360 - 3 \times 360 + 4 \times 360 - 5 \times 360 =$
 $360(-1+2-3+4-5) = -1080$.

题中有具体函数的宜套用具体函数.

(2) 估算能力

对于高考试题中的选择题,有的题本身就只需要估算,不必精算,有的题是不便于精算或时间不允许精算. 因此,估算能力对提高解题速度,争取有效的时间是十分重要的.

例如:(2005年江苏卷,16)若 $3^a = 0.618, a \in [k, k+1]$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析 $\because 3^{-1} < 0.618 < 1 = 3^0, \therefore -1 < a < 0$. 又 $a \in [k, k+1]$, 故 $k = -1$,

又如:(2005年湖北卷,9)若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $2x$ 与 $3\sin x$ 的大小关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析:由 $(2x - 3\sin x)' = 2 - 3\cos x$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 内正负不定知, $2x$ 与 $3\sin x$ 的大小关系与 x 的取值有关.

这种估算比有的资料中先求出导数为 0 的点 $x = \arccos \frac{2}{3}$, 再由函数的增减性判定或分别作出 $f(x) = 2x, g(x) = 3\sin x$ 的图象,再求两图象的交点的图象解法不知要节省多少时间,这就是我们强调的“时效”意义.

(3) 数形结合与构图能力

数学思维的主要形式是逻辑思维,由于逻辑思维的严谨性,对解选择题或填空题时特别费时费事. 而数形结合思想有时能对研究的问题给出合理的几何模型,以最积极、最活跃、最具创造性的方式予以解决,产生了一种多快好省的最佳时效.

(4) 自主探究能力

现行的考试大纲在创新意识中明确指出“对数学问题的观察、猜测、抽象、概括、证明,是发现问题和解决问题的重要途径”. 高考试题的创新,不光是体现在试题的情境设计上,更重要的是体现在思维的价值水平上.

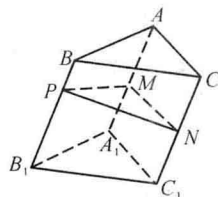
例如:(2004年上海春招卷)如右图,点 P 为斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱 BB_1 上一点, $PM \perp BB_1$ 交 AA_1 于点 $M, PN \perp BB_1$ 交 CC_1 于点 N .

(I) 求证: $CC_1 \perp MN$;

(II) 在任意 $\triangle DEF$ 中有余弦定理: $DE^2 = DF^2 + EF^2 - 2DF \cdot EF \cdot \cos \angle DFE$.

拓展到空间,类比三角形的余弦定理,写出斜三棱柱的三个侧面面积与其中两个侧面所成的二面角之间的关系式,并予以证明.

答案: $S_{ABB_1A_1}^2 = S_{BCC_1B_1}^2 + S_{ACC_1A_1}^2 - 2S_{BCC_1B_1} \cdot S_{ACC_1A_1} \cdot \cos \alpha$, 其中 α 为平面 CC_1B_1B 与平面 CC_1A_1A 的二面角



三、考场应试技巧

1. 按照顺序解题

数学试卷发下后,先按要求在指定位置上填上准考证号、姓名等,再略花三、五分钟浏览一下试卷的长度、题型以及题数,但尽量不去想这份卷子的难易,然后马上投入到答题中去. 命题人员对题目的安排一般是先易后难,因此可按照顺序答题. 但碰到个别难题或解题程序繁琐而又分数不多的题目,实在无法解决时则不应被缠住,此时应将其撂下. 避免耽误时间,影响信心.

2. 认真审清题意

审题时不能急于求成、马虎草率,必须理解题意,注意题目中关键的字、词、句. 从历届学生考试情况来看,审题常见错误有:一是不看全题,断章取义. 部分同学喜欢看一段做一段,做到后半题时才发现前半题做错了,只得从头再来. 须知,一道数学题包含完整的内容,是一个整体. 有的句与句之间有着内在的联系;有的前后呼应,相互衬垫. 所以必须纵观全题,全面领会题意. 二是粗心大意,一掠而过. 如许多考生把不可能看成可能;把由大到小看成由小到大;把多项式看成单项式;把不正确看成正确;把强弱顺序看成弱强顺序而答错. 三是误解题意,答非所问. 四是审题不透,一知半解. 许多同学见到新情境题目,内心紧张,未能全面理解题意.

3. 根据要求回答

近几年高考中出现很多考生不按要求答题而失分. 如把答案写在密封线内,阅卷时无法看到答案而不给分;如要求求单调减区间,有的同学增减区间都求出来. 如果增区间求错反而会扣分.

必修 1

第一章 集合与函数的概念

能力测试点 1 集合的概念及运算…………… 1

元素与集合的含义/集合中元素的特征/常用集合的表示法/元素与集合、集合与集合之间的关系/集合的运算/集合运算的性质/几个常见的结论/集合表示的图示法/集合语言、代数语言、几何语言的相互转换

能力测试点 2 函数与映射…………… 4

函数的概念/映射的概念/函数与映射的区别和联系/判断两个函数相同/映射个数的确定/分段函数和复合函数/建立实际问题的函数关系式

能力测试点 3 函数的解析式与定义域…………… 7

函数的解析式与定义域/求函数的定义域/求函数的解析式常用的方法/学会逆向思维/利用分类讨论的思想方法,求含有参数的解析式的定义域

能力测试点 4 函数的值域和最值…………… 10

值域的概念和常见函数的值域/函数的最值/求函数的值域没有通性解法,只能依据函数解析式的结构特征来确定相应的解法/有关求值域的逆向思维题

能力测试点 5 函数的单调性…………… 14

函数的单调性/单调区间/函数单调性的证明方法/判断函数单调性的常用方法/抽象函数的单调性/“对号”函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ ($a > 0$) 的单调性及应用/复合函数的单调区间/单调性的应用

能力测试点 6 函数的奇偶性…………… 18

奇、偶函数的概念/奇函数、偶函数的图象对称关系/判断函数奇偶性的一般方法/函数奇偶性的应用是本节的重点,主要表现在以下几个方面/奇偶性与周期性的关系

能力测试点 7 函数的图象…………… 21

作函数图象的最基本途径——描点法/图象变换/作函数图象的一般步骤/依据图象确定解析式/数形结合的思想方法/图

象创新题的解题策略

第二章 基本初等函数

能力测试点 8 二次函数…………… 25

二次函数的基本知识/实系数二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的实根的符号与二次方程系数之间的关系/已知二次函数的解析式,求其单调区间;已知二次函数的某一单调区间,求参数的范围.这两类是常见题型,关键是利用二次函数的图象/二次函数在闭区间上的最值

能力测试点 9 指数函数…………… 28

指数/指数函数的图象和性质/整体代换思想在指数式运算中的应用/与指数函数有关的复合函数问题/指数函数的综合问题

能力测试点 10 对数函数…………… 31

对数/对数函数的图象和性质/利用等价转换解决指数、对数问题/指数函数与对数函数互为反函数/求与对数函数相关的复合函数的单调区间/对数函数的综合问题

能力测试点 11 幂函数…………… 35

幂函数的概念/幂函数的图象和性质/幂的大小比较/与幂函数有关的复合函数的单调性/与幂函数有关的综合问题

第三章 函数的应用

能力测试点 12 函数与方程…………… 38

方程的根与函数的零点/二次函数与一元二次方程/用二分法求方程的近似解/零点的求法及零点的个数/方程在给定闭区间上是否有实解的判断方法/函数零点个数[方程 $f(x) = 0$ 的实根个数]的确定方法/利用二分法求方程近似解的方法/一元二次方程根的讨论/函数零点的应用

能力测试点 13 函数模型及应用…………… 41

解决应用问题的三个步骤/几类不同增长的函数模型/几种常见函数的模型/模拟函数/函数建模研究

必修 2

第一章 空间几何体

能力测试点 14 简单的几何体 45

棱柱/棱锥/棱台与多面体/圆柱、圆锥、圆台/球/根据几何特征的描述判断几何体的形状/几何体中的计算问题/圆柱、圆锥、圆台的侧面展开图/简单的组合体

能力测试点 15 空间几何体的三视图与直观图 ... 50

平行投影和中心投影/三视图/斜二测画法的画图规则/三视图的画法/几何体直观图的画法/由几何体的直观图画三视图/由几何体的三视图画几何体的直观图/组合体的直观图画法

能力测试点 16 空间几何体的表面积和体积 55

柱体、锥体、台体的表面积/柱体、锥体、台体的体积/球的表面积和体积/多面体的侧面积计算/旋转体的面积和体积计算/求体积常用的方法:割补法和等积变换法/组合体的面积和体积计算

第二章 空间的点、直线、平面之间的位置关系

能力测试点 17 空间的点、直线、平面之间的位置

关系 60

平面的基本性质/平行公理和等角定理/空间两条不重合的直线的位置关系/异面直线/直线与平面的位置关系/两个平面的位置关系/点共线、线共点、点线共面/求异面直线所成的角/平移过程中的空间想象能力/几何体中的截面问题

能力测试点 18 平行关系 65

直线和平面平行的判定和性质/两个平面平行的判定和性质/线线平行的证明/线面平行的证明/空间距离的探求

能力测试点 19 垂直关系 69

直线与平面垂直/二面角/线线垂直的证明/线面垂直的判定方法/面面垂直的证明方法/线面垂直、线线垂直的综合论证

能力测试点 20 空间的角 73

角的概念及范围/求异面直线所成角的主要方法是通过平移转化法作出异面直线所成角,然后利用三角形边角关系求角的大小/求直线与平面所成角的一般过程是:①通过射影转化法,作出直线与平面所成角;②在三角形中求角的大小/求二面角大小的一般方法/对于未给棱的二面角求法,一般情况下,首

先作棱.在有利条件下,利用射影公式求更方便

第三章 直线与方程

能力测试点 21 直线的倾斜角和斜率 77

直线的倾斜角/直线的斜率/斜率公式/直线的倾斜角与斜率之间的转化/斜率公式的应用/三点共线问题和以斜率观点处理此类问题的方法/学科内的综合是近年数学高考热点

能力测试点 22 直线的方程 80

直线方程的几种形式/直线方程形式之间的转换方法/待定系数法求直线方程

能力测试点 23 两条直线的位置关系 84

两条直线的平行/两条直线的垂直/两条直线的交点/几种距离/对称问题/直线系方程/最值问题

第四章 圆与方程

能力测试点 24 圆的方程 89

圆的标准方程/圆的一般方程/确定圆的方程的方法/常见的圆系方程及其应用/圆的参数方程的应用

能力测试点 25 直线与圆、圆与圆的位置关系 92

直线与圆的位置关系/圆与圆的位置关系/圆中弦的有关问题/求切线方程/利用“数形结合”的方法将代数问题转化为几何问题的能力/利用圆的方程解决实际问题的能力

能力测试点 26 空间直角坐标系 95

空间直角坐标系/确定点 M 的坐标和已知点 M 坐标确定 M 位置的步骤/空间两点间的距离/关于一些对称点的坐标求法/空间两点距离公式的应用/几何体中有关角度的求解

必修 3

第一章 算法初步

能力测试点 27 算法与程序框图 98

算法的概念/算法的五个特征:概括性、逻辑性、有穷性、不惟一性、普遍性/程序框图/算法的三种逻辑结构/算法的设计/程序流程图在生活中的应用

能力测试点 28 基本算法语句 102

输入、输出语句和赋值语句/条件语句和循环语句/用输入、输出、赋值三种语句编写程序/利用条件语句编写程序/利用循

第二章 统计

能力测试点 29 抽样方法..... 108

总体、个体、容量/简单的随机抽样/系统抽样/分层抽样/三种抽样方法的比较/抽样方法的选择/抽样方法在生活中的应用

能力测试点 30 用样本估计总体..... 112

用样本估计总体/众数、中位数、平均数、方差、标准差/频率分布表和频率分布直方图/茎叶图的应用/标准差和方差的关系及计算/实际问题的分析处理

能力测试点 31 两变量间的相关关系..... 117

两变量间的相关关系/回归直线方程/回归直线方程的求法/利用回归直线对总体进行估计/相关关系的强与弱

第三章 概率

能力测试点 32 随机事件的概率..... 121

随机事件/频率与概率/事件的关系及运算/概率的性质/互斥事件的概率/对立事件的概率/利用随机事件的概率解决实际问题的能力

能力测试点 33 古典概型..... 125

古典概型/基本事件数的探求方法/古典概型求概率的方法/较复杂事件概率的求法

能力测试点 34 几何概型..... 129

几何概型/与长度有关的几何概率的求法/与面积有关的几何概率的求法/与体积有关的几何概率的求法/与角度有关的概念/几何概型与实际问题的求法

必修 4

第一章 三角函数

能力测试点 35 三角函数的概念..... 132

角的概念的推广/弧度制/三角函数的定义及符号/常用角的集合表示法/利用三角函数的符号法则,判断三角函数式的符号;反过来,已知三角函数的符号,求角的范围/运用三角函数的两种定义(坐标、三角函数线)解综合题

能力测试点 36 同角三角函数的基本关系式与诱导公式..... 135

同角三角函数的基本关系式/诱导公式/“1”在化简、求值、证明中的妙用/三角恒等式的证明/学会利用方程思想解三角题

能力测试点 37 三角函数的图象与性质..... 139

正弦、余弦、正切函数的图象与性质/利用单位圆、三角函数的图象及数轴求三角函数的定义域/求三角函数值域的常用方法/三角函数的周期性/三角函数的奇偶性/三角函数的单调性/三角函数的正、余弦函数值之间的大小关系在单位圆内的分布图/三角函数与函数、数列、不等式的综合题/三角函数性质的综合问题

能力测试点 38 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 144

“五点法”作 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的简图/变换作图法作 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图象/函数 $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的性质/给出图象上的点,求解析式 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ /三角函数的图象与性质的综合常见于高考;有关三角函数图象的对称性常作为高考的选择题/函数图象的应用

能力测试点 39 三角函数模型的简单应用..... 148

三角函数模型的常见类型/与三角函数图象有关的应用题/设角为参数,利用三角函数有关知识求最值/三角函数模型在物理中的应用

第二章 平面向量

能力测试点 40 平面向量的概念及线性运算..... 151

向量的基本概念/向量的加法与减法运算及几何意义/实数与向量的积/一个向量与非零向量共线的充要条件/学科之间的综合:向量在物理中的运用

能力测试点 41 平面向量的基本定理及坐标运算..... 155

平面向量的基本定理及坐标运算/向量平行的充要条件/向量的坐标运算与解析几何的综合题/向量的坐标运算与三角函数的综合题

能力测试点 42 平面向量的数量积..... 158

平面向量的数量积/平面向量数量积的重要性质/两个向量垂直的充要条件/常用模的等式和不等式/有关数量积的综合题

能力测试点 43 平面向量的应用..... 161

平面向量应用的主要模式/几何中的向量方法/向量在物理中的运用/平面向量的创新应用

第三章 三角恒等变换

能力测试点 44 两角和与差的三角函数…………… 164

和、差、倍、半公式/两角和与差的正切公式的逆用/和、差、倍、半公式的变式及应用/角的形式的变化及公式的综合运用

能力测试点 45 三角恒等变换(1)…………… 167

三角函数式化简的意义及要求/三角恒等式的证明/化简和证明常用的方法/三角条件恒等式的证明/和积互化公式及其应用

能力测试点 46 三角恒等变换(2)…………… 170

三角函数的求值主要有三种类型,即给角求值、给值求值、给值求角/“配角”的思想在给值求值中的应用/给值求角的两个重要步骤缺一不可/方程的思想与探索性求角/三角函数的最值

必修 5

第一章 解三角形

能力测试点 47 正弦定理与余弦定理…………… 174

正弦定理、余弦定理、面积公式/ $\triangle ABC$ 中常见的其他关系式和结论/利用正、余弦定理判断三角形的形状/利用正、余弦定理及三角形面积公式解三角形

能力测试点 48 解斜三角形的应用…………… 178

有关名词、术语/解三角形应用题的一般步骤/正弦定理、余弦定理应用举例/解斜三角形的综合运用

第二章 数列

能力测试点 49 数列的概念…………… 182

数列的概念/已知 S_n 求 a_n /数列的单调性及其应用/已知数列的递推关系求数列的通项公式

能力测试点 50 等差数列…………… 186

等差数列/等差数列的性质/等差数列的判定方法/一个重要结论

能力测试点 51 等比数列…………… 189

等比数列/等比数列性质/已知递推关系,求通项 a_n /等比数列的判定方法/创新题型

能力测试点 52 数列的求和…………… 193

常用求和公式/等差数列求和公式推导方法的推广——倒

序相加法/错位相减法/裂项法/分组求和法/与数列求和有关的综合题

能力测试点 53 数列的应用…………… 198

数列的综合应用一般有四种题型/解决有关数列的应用问题与解其他应用题相似的是要认真理解题意,弄清各项之间的关系,便于确定模型的类型;弄清项数,便于确定计算公式,使用复利公式时,对次数的理解要准确/分期付款中的有关计算/在现实生活中有很多实际问题,可以用数列知识来解决/数列知识与其他章节的综合

第三章 不等式

能力测试点 54 不等关系与不等式…………… 202

不等式的性质/根据条件和性质判断不等式是否成立/比较大小问题/运用不等式的性质证明不等式

能力测试点 55 一元二次不等式的解法…………… 204

一元一次不等式的解法/一元二次不等式的解法/高次不等式的解法/分式不等式/含有参数的不等式的求解,往往需要比较(相应方程的)根的大小,对参数进行讨论/利用数形结合思想解不等式

能力测试点 56 简单的线性规划…………… 207

二元一次不等式表示平面区域/确定二元一次不等式表示的区域的步骤/基本概念/线性规划/线性规划的应用

能力测试点 57 基本不等式…………… 211

基本概念和定理/利用基本不等式证明不等式/运用重要不等式求最值/两个正数和与积的相互转化/重要不等式在实际问题中的应用

能力测试点 58 不等式的应用…………… 215

应用基本不等式和不等式的性质求最值、范围,证明不等式/不等式与函数/不等式与解析几何/不等式与立体几何/不等式是数学各章知识的重要交汇点,特别是不等式在实际问题中的应用

选修 2-1

第一章 常用的逻辑语言

能力测试点 59 命题及其关系、充分条件与必要条件…………… 219

命题/四种命题及其关系/充分条件和必要条件/四种命题

之间的关系/充要条件的判断方法/充要条件的证明

能力测试点 60 逻辑联结词、量词 222

逻辑联结词/量词/判断复合命题的真假/利用复合命题的真假求参数的取值范围/全称命题与特称命题真假的判断/含有一个量词的命题的否定/反证法

第二章 圆锥曲线与方程

能力测试点 61 椭圆 225

椭圆的定义及性质/利用椭圆的两个定义解题/待定系数求方程/椭圆的几何性质的应用

能力测试点 62 双曲线 228

双曲线的定义及性质/双曲线定义的应用/双曲线方程与双曲线渐近线的关系/双曲线几何性质的应用

能力测试点 63 抛物线 231

抛物线的图象和性质/抛物线的几何性质/抛物线定义的应用/抛物线几何性质在实际中的应用

能力测试点 64 曲线与方程 234

曲线与方程的概念/求曲线方程的一般步骤/画方程的曲线时,要保持方程变形的等价性/求曲线的交点/求轨迹方程的常用方法/有关轨迹的综合题

第三章 空间向量与立体几何

能力测试点 65 空间向量及其运算 238

空间向量的基本知识/用共线向量定理解决立几中的平行问题/用向量垂直的充要条件解决立几中的垂直关系/利用向量求距离和角/用向量的有关知识解综合题

能力测试点 66 空间向量的坐标运算及其运用 242

向量的直角坐标运算/利用空间向量解决立体几何中的平行与垂直问题/利用空间向量解决立体几何中的角和距离/解决立体几何问题,可用三种方法:综合法、向量法、坐标法/掌握空间向量解决立体几何问题的“三步曲”

选修 2-2

第一章 导数及其应用

能力测试点 67 导数的概念及其运算 246

导数的概念/基本函数的导数公式/导数运算法则/利用定

义求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的方法/导数的几何意义/利用导数的几何意义解决实际问题

能力测试点 68 导数的应用 249

函数的单调性/函数极值的定义/函数的最大值与最小值/可导函数的单调性/求函数的极值与最值/生活中最优化问题

能力测试点 69 简单的定积分及其应用 253

定积分的概念及其几何意义/定积分的基本性质/微积分的基本定理/利用微积分的基本定理求复杂函数的定积分/定积分的应用

第二章 推论与证明

能力测试点 70 合情推理与演绎推理 256

合情推理/演绎推理/合情推理的应用/用三段论证明数学问题/数学推理与创新发现

能力测试点 71 直接证明与间接证明 数学归纳法 260

直接证明与间接证明/数学归纳法/综合法的应用/分析法的应用/反证法的应用/用数学归纳法证明关于自然数的命题/用数学归纳法解决数列中的猜证

第三章 数系的扩充与复数的引入

能力测试点 72 复数的概念及其运算 264

复数的概念/复数的代数形式及运算法则/用复数相等的充要条件解决有关复数问题/复数问题实数化是解决复数问题最基本也是最重要的思想方法,桥梁是设 $z=x+yi$,依据是复数相等的充要条件

选修 2-3

第一章 计数原理

能力测试点 73 分类加法计数原理、分步乘法计数原理、排列组合 266

两个原理及其区别/基本公式/解排列组合应用题的具体途径/排列问题常见的限制条件及对策/组合问题常见的问题及对策/组合数及其性质的综合运用

能力测试点 74 二项式定理 269

二项式定理/二项式定理中,二项式系数的性质/三项式的问题转化为二项式,既可运用二项式定理加以解决,也可用二项

式定理展开式/利用二项式定理的通项公式解决特定项问题/二项式定理的主要应用

第二章 概率

能力测试点 75 离散型随机变量的分布列····· 272

离散型随机变量的分布列/常见离散型随机变量的分布列/求离散型随机变量分布列的步骤/相互独立事件同时发生的概率/独立重复试验与二项分布/二项分布与实际应用/复杂事件概率的探求

能力测试点 76 离散型随机变量的期望与方差、正态分布····· 277

离散型随机变量的期望与方差/期望、方差的性质及应用/正态分布/期望、方差在实际中的运用

第三章 统计案例

能力测试点 77 独立性检验与回归分析····· 280

回归方程模型及相关检验/ 2×2 列联表的独立性检验/求线性回归方程/独立性检验的应用/小概率事件在实际中的运用

选修 4-1 几何证明选讲

能力测试点 78 相似三角形的进一步认识····· 283

平行截割定理/三角形的内角平分线定理/梯形中位线定理/相似三角形的判定/相似三角形的性质定理/直角三角形射影定理/构造等比线段或相似三角形解题

能力测试点 79 圆的进一步认识····· 287

圆周角定理/圆的切线/弦切角/圆中比例线段/圆内接四边形/同弧(或等弧)上的弦切角相等,同弧(或等弧)上的弦切角与其圆周角相等/切线长定理/若两点在一条线段同侧且对该段张角相等,则此两点与线段两个端点共圆,特别地,对应线段张角为直角的点共圆/圆幂定理

选修 4-2 矩阵与变换

能力测试点 80 二阶矩阵与平面向量及几种常见的平面变换····· 290

矩阵的相关概念/二阶矩阵与平面列向量的乘法/几种常见的平面变换/线性变换/对几种常见的变换矩阵与图象间的变换关系要能相互对应

能力测试点 81 矩阵的复合与矩阵乘法及逆变换与逆矩阵····· 294

矩阵乘法的概念/矩阵乘法的简单性质/逆矩阵的有关概念/逆矩阵的求法/初等变换及初等变换矩阵/二阶矩阵与二元一次方程组/利用逆矩阵知识来求解二元一次方程组

能力测试点 82 特征值与特征向量····· 298

特征值与特征向量/特征多项式/特征值与特征向量的求法/多次变换的计算/矩阵的简单应用

选修 4-4 坐标系与参数方程

能力测试点 83 坐标系与曲线的极坐标方程····· 302

直角坐标系/极坐标系和点的极坐标/点的极坐标和直角坐标的互化/曲线的极坐标方程的意义/求曲线的极坐标方程的基本步骤/考纲要求的简单图形的极坐标方程/学会进行曲线的极坐标与直角坐标方程的互化,应用极坐标知识解题

能力测试点 84 参数方程····· 306

参数方程的意义/直线的参数方程及参数的几何意义/圆的参数方程及参数的几何意义/椭圆的参数方程/参数方程与普通方程的互化/参数方程的应用

选修 4-5 不等式选讲

能力测试点 85 不等式和含有绝对值的不等式····· 310

两个实数大小比较/不等式的基本性质/含有绝对值的不等式的解法/含有绝对值的不等式的性质/解绝对值不等式的思路是转化为等价的不含绝对值符号的不等式(组),根据式子的特点可用下列公式进行转化/含未知数的绝对值的不等式有两个解法

能力测试点 86 不等式证明、几个著名不等式及利用不等式求最值····· 312

常用的证明不等式的方法(比较法、综合法、分析法)/数学归纳法与不等式/几个著名的不等式/三角不等式/柯西不等式的推广/利用平均不等式求最大(小)值/利用柯西不等式求最大(小)值

决胜高考····· 316

答案与提示····· 321

必修1 第一章 集合与函数的概念

能力测试点1 集合的概念及运算

考纲三维解读

一、考纲要求

1. 了解集合及其表示

- (1) 了解集合的含义,体会元素与集合的“属于”关系.
 (2) 能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

2. 理解子集的意义

- (1) 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
 (2) 了解全集与空集的含义.

3. 理解交集、并集、补集的概念

- (1) 理解两个集合的并集与交集的含义;会求两个简单集

合的并集与交集.

(2) 理解给定集合的一个子集的补集的含义;会求给定子集的补集.

(3) 会用 Venn 图表示集合的关系及运算.

二、命题趋势

有关集合的高考试题,考查重点是集合与集合之间的关系,近年试题加强了对集合的计算化简的考查,并向无限集发展,考查抽象思维能力,在解决这些问题时,要注意利用几何的直观性,注意运用 Venn 图解题方法的训练,注意利用特殊值法解题,加强集合表示方法的转换和化简的训练.

④ 高考考点解读——名师释疑答题点④



知识要点

④ 样板题解析——看看以前怎样考的④

1. 元素与集合的含义

一般地,把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合.

2. 集合中元素的特征

(1) **确定性**: 对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合中的元素,或者不是它的元素,这是集合的最基本特征.

(2) **互异性**: 集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的),相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

(3) **无序性**: 在一个集合中,通常不考虑它的元素之间的顺序,也就是说 $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$.

有关集合的运算,特别需要注意的是元素的互异性,其办法是将所得结果进行检验.

3. 常用集合的表示法

常用的有列举法、描述法、区间表示法和图示法.

有限集常用列举法表示,而无限集常用描述法或区间表示法.

描述法表示集合时,集合中元素的意义取决于它的“代表”元素,如:

$A = \{y \mid y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}\}$ 中的元素为函数 $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ 的函数值;

$B = \{x \mid y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}\}$ 中的元素为函数 $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ 的自变量的取值;

$C = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}\}$ 中的元素为函数

④ **考题 1** 设 $A = \{-4, 2a - 1, a^2\}$, $B = \{9, a - 5, 1 - a\}$, 已知 $A \cap B = \{9\}$, 求实数 a 的值.

(2006 年湖北省重点中学联考)

解析 $\because A \cap B = \{9\}, \therefore 9 \in A$. 若 $2a - 1 = 9$, 则 $a = 5$.

此时 $A = \{-4, 9, 25\}$, $B = \{9, 0, -4\}$, $A \cap B = \{9, -4\}$, 与已知矛盾, 舍去.

若 $a^2 = 9$, 则 $a = \pm 3$. 当 $a = 3$ 时, $A = \{-4, 5, 9\}$, $B = \{-2, -2, 9\}$.

B 中有 2 个元素均为 -2 , 与集合中元素的互异性矛盾, 应舍去.

当 $a = -3$ 时, $A = \{-4, -7, 9\}$, $B = \{9, -8, 4\}$, 符合题意.

综上所述, $a = -3$.

点评 本题考查集合元素的基本特征——确定性、互异性、无序性, 切入点是分类讨论思想, 由于集合中元素用字母表示, 检验结果必不可少.

④ **考题 2** 若集合 $A = \{y \mid y = x^{\frac{1}{3}}, -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y \mid y = 2 - \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\}$, 则 $A \cap B$ 等于_____.

(2006 年上海春招)

解析 根据题意求出集合 A 和 B 的元素, 再求公共元素所组成的集合, 便可得正确选项. 也可画出图象, 求函数值的公共部分.

解法一: $A = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$, $B = \{y \mid y \leq 1\}$, $A \cap B = A = [-1, 1]$.

解法二: (数形结合法) 如图 1-4, 从两个函数图象上可以看出它们的函数值的交集是公共部分, 即 $[-1, 1]$.

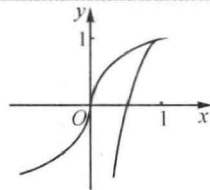


图 1-4

点评 解答本类题目, 必须弄清集合的元素是什么, 是函数关系中自变量的取值, 还是因变量的取值, 还是曲线上的点……数形结合是解集合问题的常用方法, 解题时要尽可能地借助数轴、直角坐标系或韦恩图等工具, 将抽象的代数问题具体化、形象化、直观化, 然后利用数形结合的思想方法解决.

④ **考题 3** 已知集合 $A = \{x \mid 0 < ax + 1 \leq 5\}$, 集合 $B = \{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 2\}$.

- (1) 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围; (2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围;
 (3) A, B 能否相等? 若能, 求出 a 的值; 若不能, 试说明理由.

(2007 年湖北省重点中学联考)

解析 A 中不等式的解集应分三种情况讨论:

① 若 $a = 0$, 则 $A = \mathbf{R}$;

② 若 $a < 0$, 则 $A = \{x \mid \frac{4}{a} \leq x < -\frac{1}{a}\}$;

③ 若 $a > 0$, 则 $A = \{x \mid -\frac{1}{a} < x \leq \frac{4}{a}\}$

$y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ 的图象上的点.

4. 元素与集合、集合与集合之间的关系

(1) 元素与集合之间的关系是“属于”或“不属于”. 对象 x 是集合 A 的元素, 称 x 属于 A , 记作 $x \in A$. 否则称 x 不属于 A , 记作 $x \notin A$. 记号“ \in ”和“ \notin ”只能用于表示元素与集合之间的关系, 不能用来表示两个集合之间的关系.

(2) 若集合 A 中任一元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$, 读作 A 包含于 B , 或记作 $B \supseteq A$, 读作 B 包含 A . 若 A 是 B 的子集且 B 中至少存在一个元素不属于 A , 则称 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$, 读作 A 真包含于 B , 或记作 $B \supsetneq A$, 读作 B 真包含 A . 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

(3) 常用集合之间的包含关系

$$\emptyset \subsetneq \mathbf{N}^* \subsetneq \mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R} \subsetneq \mathbf{C}.$$

注: \mathbf{N}^* 与 \mathbf{N}_+ 都表示正整数集.

(1) 当 $a=0$ 时, 若 $A \subseteq B$, 此种情况不存在;

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, 若 } A \subseteq B, \text{ 则 } \begin{cases} \frac{4}{a} > -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{a} \leq 2, \end{cases} \therefore \begin{cases} a < -8, \\ a \leq -\frac{1}{2}, \end{cases} \therefore a < -8;$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 若 } A \subseteq B, \text{ 则 } \begin{cases} -\frac{1}{a} \geq -\frac{1}{2}, \\ \frac{4}{a} \leq 2, \end{cases} \therefore \begin{cases} a \geq 2, \\ a \geq 2, \end{cases} \therefore a \geq 2.$$

综上知, 此时 a 的取值范围是 $\{a \mid a < -8 \text{ 或 } a \geq 2\}$.

(2) 当 $a=0$ 时, 显然 $B \subseteq A$;

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, 若 } B \subseteq A, \text{ 则 } \begin{cases} \frac{4}{a} \leq -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{a} > 2, \end{cases} \therefore \begin{cases} a \geq -8, \\ a > -\frac{1}{2}, \end{cases} \therefore -\frac{1}{2} < a < 0;$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 若 } B \subseteq A, \text{ 则 } \begin{cases} -\frac{1}{a} \leq -\frac{1}{2}, \\ \frac{4}{a} \geq 2, \end{cases} \therefore \begin{cases} a \leq 2, \\ a \leq 2, \end{cases} \therefore 0 < a \leq 2.$$

综上知, 当 $B \subseteq A$ 时, $\{a \mid -\frac{1}{2} < a \leq 2\}$.

(3) 当且仅当 A, B 两个集合互相包含时, $A = B$,

由(1)、(2)知, $a = 2$.

点评 解决两个数集关系问题时, 避免出错的一个有效手段即是合理运用数轴帮助分析与求解, 另外, 在解含有参数的不等式(或方程)时, 要对参数进行讨论, 分类时要遵循“不重不漏”的分类原则, 然后对于每一类情况都要给出问题的解答.

④ 高考考点解读——名师释疑答题点④



思维拓展

④ 样板题解析——看看以前怎样考的④

5. 集合的运算

(1) 交集 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

(2) 并集 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(3) 补集 $\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

6. 集合运算的性质

(1) $A \cap B = B \cap A, A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B, A \cap A = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.

(2) $A \cup B = B \cup A, A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B, A \cup A = A, A \cup \emptyset = A$.

(3) $A \cup (\complement_U A) = U, A \cap (\complement_U A) = \emptyset$.

(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(5) $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B), \complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$.

(6) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

7. 几个常见的结论

(1) 由 n 个元素组成的集合有 2^n 个, 其中真子集的个数有 $2^n - 1$ 个, 非空真子集的个数有 $2^n - 2$ 个.

(2) 空集是任何集合的子集, 空集是任何非空集合的真子集.

8. 集合表示的图示法

(1) 利用数轴表示数集. 如: $A = \{x \mid x \geq 1\}, B = \{x \mid x \leq 3\}$, 则 $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$, 用数轴表示如图 1-1:

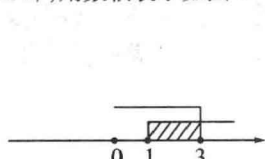


图 1-1

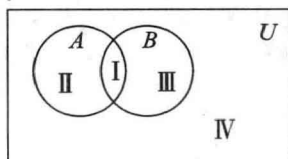


图 1-2

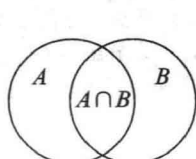


图 1-3

(2) Venn 图: 用封闭曲线的内部表示集合或集合之间的关系.

(3) 试用集合 A, B 的交集、并集、补集表示下列图中 I、II、III、IV 四个部分所表示的集合.

I: $A \cap B$. II: $A \cap (\complement_U B)$. III: $B \cap (\complement_U A)$. IV: $\complement_U (A \cup B)$.

(4) 利用文氏图可计算集合中元素的个数, 有如下公式:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

其中 $\text{card}(A)$ 表示集合 A 中元素的个数, 上述公式可用如图所示加以说明.

考题 4 设 $f(n) = 2n + 1 (n \in \mathbf{N}), P = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. 记 $\hat{P} = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) \in P\}, \hat{Q} = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) \in Q\}$, 则 $(\hat{P} \cap \complement_{\mathbf{N}} \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \complement_{\mathbf{N}} \hat{P}) =$ _____.

(2005 年浙江高考题改编)

解析 $\because f(n) = 2n + 1 (n \in \mathbf{N}), \therefore f(n)$ 为奇数.

$$\therefore \hat{P} = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) \in P\} = \{0, 1, 2\},$$

$$\hat{Q} = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) \in Q\} = \{1, 2, 3\}.$$

$$\therefore (\hat{P} \cap \complement_{\mathbf{N}} \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \complement_{\mathbf{N}} \hat{P}) = \{0, 3\}.$$

考题 5 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$, 则 $\complement_U A \cap (\complement_U B)$ 等于 _____.

(2007 年辽宁高考题)

解析 由题意得, $\complement_U A = \{2, 4, 5\}, \complement_U B = \{1, 5\}$,

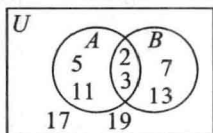
$$\therefore (\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{5\}.$$

点评 本题利用了集合运算性质

$$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B).$$

考题 6 设全集 $U = \{x \mid x \text{ 为小于 } 20 \text{ 的质数}\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{5, 11\}, (\complement_U A) \cap B = \{7, 13\}, (\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{17, 19\}$, 求 A, B .

图 1-5



解析 $\because U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, 作出 Venn 图易知, $A = \{2, 3, 5, 11\}, B = \{2, 3, 7, 13\}$.

点评 本题利用文氏图的方法求解, 简单、直观.