

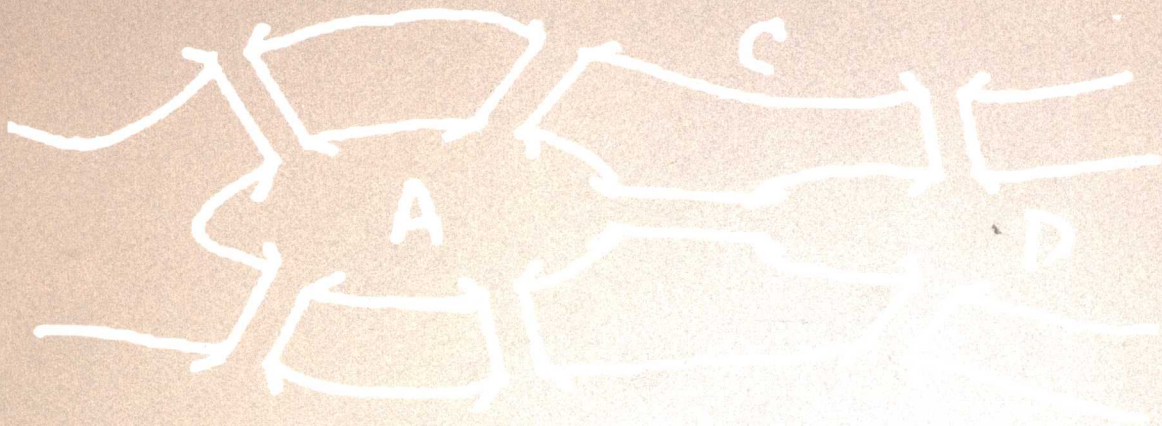


全国高职高专教育“十一五”规划教材

# 高等数学

(经管类)

张博 主编



高等教育出版社  
Higher Education Press



TSINGHUA UNIVERSITY PRESS

# 高等数学

（工科类）

第二版



ISBN 7-302-11111-1

全国高职高专教育“十一五”规划教材

# 高等数学

(经管类)

张博 主编

吉耀武 李金锁

贺继康 段东东

副主编

高等教育出版社

## 内容提要

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材,是为了满足高职高专院校培养应用型技术人才的需要,结合经管类各专业对高等数学内容的需求编写的。主要内容包括一元函数微积分、常微分方程、多元函数微积分简介、线性代数、线性规划简介、概率和数理统计、数学软件及其应用。本书力求用通俗的语言阐述高等数学中的基础知识和基本概念,突出应用与计算,淡化理论,强化数学概念的直观性。注重培养学生借助数学概念、数学思想及方法来消化吸收经济概念及经济原理的能力,强化学生利用所学的数学知识求解应用问题的能力。

本书可作为高职高专以及成人高等教育经济管理类各专业学生学习经济数学的教材,也可以用作从事经济、管理工作的技术人员更新知识的自学用书。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类 / 张博主编. —北京:高等教育出版社,2008.8

ISBN 978-7-04-024341-3

I. 高… II. 张… III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 116333 号

策划编辑 邓雁城 责任编辑 董达英 封面设计 张志 责任绘图 郝林  
版式设计 张岚 责任校对 金辉 责任印制 陈伟光

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司  
印 刷 涿州市星河印刷有限公司

购书热线 010-58581118  
免费咨询 800-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
畅想教育 <http://www.widedu.com>

开 本 787×1092 1/16  
印 张 17.25  
字 数 420 000

版 次 2008 年 8 月第 1 版  
印 次 2008 年 8 月第 1 次印刷  
定 价 23.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24341-00

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010)58581897/58581896/58581879

**传 真：**(010)82086060

**E-mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编：**100120

**购书请拨打电话：**(010)58581118

### 出版物数码防伪说明：

本图书采用出版物数码防伪系统，用户购书后刮开封底防伪密码涂层，将16位防伪密码发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪，同时您将有机会参加鼓励使用正版图书的抽奖活动，赢取各类奖项，详情请查询中国扫黄打非网(<http://www.shdf.gov.cn>)。

**反盗版短信举报：**编辑短信“JB,图书名称,出版社,购买地点”发送至106695881280

**数码防伪客服电话：**(010)58582300/58582301

### 网络题库使用说明：

1. 进入“中国组卷网”(<http://www.zujuan.com.cn>)，输入本书封底提供的防伪码“明码”部分(需输入50本)，获取积分，即可免费从网上下载题库至本地机。使用时间为一个学年。

2. 高等数学网络题库拥有约8000道题目，内容涵盖微积分、线性代数、概率统计、线性规划、离散数学等高职高专数学类课程，包括选择、填空、判断、计算、分析、应用、证明等多种题目类型。题库系统设置了模板快速组卷、自定义组卷、个人大纲、个人题库、特色上传等功能。

**电子邮箱：**caokun@hep.com.cn

**咨询电话：**(010)58582365

# 前 言



高职高专教育是我国高等教育体系的重要组成部分,近几年呈现出前所未有的发展势头。为适应高职高专教育改革的要求,全面推进素质教育,培养创新人才,适应高职高专教育大众化的发展趋势,我们根据教育部高等职业院校的培养目标,依据《高职高专高等数学课程教学基本要求》,在总结多年教学改革经验的基础上,结合高职高专院校经济管理类学生的特点,以培养学生创新意识和实践能力为目标,以掌握概念、强化应用、培养技能为重点,充分体现“以应用为目的,以必需够用为度”,并兼顾学科体系的高职教学基本原则,编写了本教材。

在本书的编写过程中,我们力求用通俗的语言及直观形象的方式进行叙述,避免大量的理论推导,突出有关理论和方法的应用,因而在编写思想、体系安排、内容取舍、教学方法等方面特别注意了以下几点:

1. 采用案例驱动的方式,用实例或几何解释引出数学概念,并用通俗易懂的语言,深入浅出地阐述概念的内涵和实质。减少烦琐的数学推导,着力表现解决问题的基本步骤,体现条理化问题解决思路。

2. 淡化理论,突出应用,尽量采用几何解释、数表、实例加深对概念、方法的理解,结合经济管理类专业的实际情况,通过大量的经济数学模型和数学在经济、管理方面的应用,使数学知识通俗化、简单化、实际化,突出高职经济应用数学的实用性。

3. 在每章或每节开始,用精炼的语言点题,以使学生了解本章或本节所研究的问题,起到承上启下的作用。

4. 每章前面都设置了本章学习目标,使学生对本章所学内容、学习目标更加明确;每章后面附有本章小结,加强对学生的学习指导,重点和难点一目了然。

5. 重视例题、练习题的配备。经济数学的特点决定了学生必须通过一定量难易适当的练习,才能真正领会概念,掌握定理及公式。本书每节后面都精心配备了相应的练习题;每章后面都配备了复习题,以便学生复习巩固,增强学生分析问题、解决问题的能力。例题的选择做到既结合重点、难点,又突出教学中的思维方法。

6. 为培养学生用计算机及相应数学软件求解数学模型的能力,结合具体教学内容,本书专设一章“数学实验”,重点介绍数学软件 MATLAB 及其简单应用,便于各校结合实际教学条件灵活处理,力求做到易教、易学、易懂、易用。

本书由陕西交通职业技术学院张博担任主编,由西安铁路职业技术学院吉耀武、李金锁,陕西教育学院贺继康和西安电力高等专科学校段东东担任副主编。全书框架结构的提出、编写大纲的拟定、最终统稿、定稿等工作由张博完成。另外,李金锁、吉耀武也承担了部分统稿工作。参加本书编写的有张喜荣(陕西交通职业技术学院,第一章)、段东东(西安电力高等专科学校,第二章)、杨帆(西安铁路职业技术学院,第三章)、任民民(陕西警官职业学院,第四章)、李金锁(西安铁路职业技术学院,第五章)、姚振宇(西安电力高等专科学校,第六章、第九章)、贺继康(陕西

教育学院,第七章)、张博(陕西交通职业技术学院,第八章)。

本教材的编写和出版,得到了高等教育出版社领导和编辑的大力支持和帮助。在本书的编写过程中广泛参考了国内外教材和书籍,借鉴和吸收同行的研究成果,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中缺点和错误在所难免,诚恳希望有关专家、学者不吝赐教,诚恳希望广大读者批评指正。

编者

2008年5月

# 目 录

第一章 函数	1	三、闭区间上连续函数的性质	47
第一节 函数的概念与性质	1	本章小结	48
一、函数概念	1	复习题二	49
二、函数的几种特性	4	第三章 导数与微分	51
第二节 初等函数	7	第一节 导数的概念	51
一、反函数	7	一、引例分析	51
二、基本初等函数	7	二、导数的概念	52
三、复合函数	12	三、导数的基本公式	53
四、初等函数	13	第二节 求导法则	55
第三节 多元函数简介	16	一、导数的四则运算法则	55
一、空间解析几何简介	16	二、复合函数求导法则	57
二、多元函数	20	三、隐函数求导法则	58
第四节 函数模型的建立	22	第三节 高阶导数	60
一、需求函数与供给函数	23	第四节 函数的微分	61
二、成本、收益、利润函数	24	一、微分的概念	61
三、库存函数	26	二、微分的基本公式和运算法则	62
本章小结	27	三、微分在近似计算中的应用	63
复习题一	29	第五节 二元函数的微分	65
第二章 极限与连续	31	一、偏导数的概念	65
第一节 极限的定义	31	二、全微分的概念	67
一、数列的极限	31	本章小结	69
二、函数的极限	33	复习题三	71
第二节 极限的运算	35	第四章 导数的应用	73
一、极限的四则运算法则	35	第一节 函数的单调性与极值	73
二、两个重要极限	36	一、函数单调性的判断	73
三、极限的运算举例	39	二、函数的极值	75
第三节 无穷小与无穷大	41	三、函数的最值	77
一、无穷小	41	第二节 曲线的凹凸性与拐点	79
二、无穷大	42	一、曲线凹凸性的概念	80
三、无穷小的比较	42	二、曲线凹凸性的判别与拐点的求法	80
第四节 函数的连续性	44	第三节 导数在经济分析中的应用	83
一、函数的连续性的概念	44		
二、间断点与连续区间的求法	45		



一、边际与边际分析 .....	83	第三节 二阶常系数线性微分	
二、弹性与弹性分析 .....	85	方程 .....	143
三、经济最优化问题 .....	87	本章小结 .....	145
本章小结 .....	90	复习题六 .....	146
复习题四 .....	91	<b>第七章 线性代数及其应用 .....</b>	<b>147</b>
<b>第五章 积分 .....</b>	<b>93</b>	第一节 行列式 .....	147
第一节 定积分的概念与性质 .....	93	一、行列式的概念 .....	147
一、引例分析 .....	93	二、行列式的性质与计算 .....	150
二、定积分的概念 .....	95	第二节 矩阵 .....	154
三、定积分的性质 .....	96	一、矩阵的概念 .....	154
第二节 不定积分的概念与性质 .....	98	二、矩阵的运算 .....	157
一、不定积分的概念 .....	98	第三节 逆矩阵 .....	161
二、不定积分的性质与基本公式 .....	100	一、逆矩阵的概念与性质 .....	161
第三节 微积分基本公式 .....	103	二、逆矩阵存在的条件和求法 .....	161
一、变上限积分 .....	103	三、逆矩阵应用举例 .....	163
二、牛顿-莱布尼茨公式 .....	104	第四节 线性方程组 .....	166
第四节 积分方法 .....	106	一、矩阵的初等变换与秩 .....	166
一、直接积分法 .....	106	二、线性方程组的解 .....	170
二、换元积分法 .....	107	第五节 线性规划简介 .....	174
三、分部积分法 .....	112	一、线性规划问题模型 .....	174
第五节 广义积分 .....	116	二、线性规划问题的标准形式 .....	176
第六节 二元函数积分简介 .....	118	三、线性规划问题的解法 .....	177
一、二重积分的概念与性质 .....	118	本章小结 .....	185
二、在直角坐标系下二重积分的		复习题七 .....	188
计算 .....	119	<b>第八章 概率统计初步 .....</b>	<b>190</b>
三、在极坐标系下二重积分的		第一节 随机事件与概率 .....	190
计算 .....	122	一、随机现象与随机试验 .....	190
第七节 定积分的应用 .....	126	二、随机事件及其运算 .....	191
一、定积分在几何中的应用 .....	126	三、随机事件的概率 .....	194
二、定积分在经济中的应用 .....	130	第二节 概率的基本公式 .....	198
本章小结 .....	133	一、概率的加法公式 .....	198
复习题五 .....	134	二、条件概率 .....	200
<b>第六章 微分方程 .....</b>	<b>137</b>	三、概率的乘法公式 .....	201
第一节 微分方程的基本概念 .....	137	四、事件的独立性 .....	202
一、微分方程的基本概念 .....	137	五、重复独立试验概型 .....	204
二、微分方程的解 .....	138	第三节 随机变量及其分布 .....	206
第二节 一阶微分方程 .....	139	一、随机变量的概念 .....	206
一、可分离变量的微分方程 .....	139	二、离散型随机变量及其分布 .....	206
二、一阶线性微分方程 .....	141	三、连续型随机变量及其分布 .....	210

第四节 随机变量的数字特征 .....	213	一、MATLAB 软件简单介绍 .....	243
一、随机变量的数学期望 .....	213	二、MATLAB 的基本特点 .....	244
二、随机变量的方差 .....	216	三、MATLAB 中函数的数值运算 .....	244
三、常见随机变量的数学期望和 方差 .....	218	第二节 MATLAB 在微积分中的 简单应用 .....	246
四、随机变量函数的数学期望和 方差 .....	218	一、用 MATLAB 求极限 .....	246
第五节 数理统计的基本概念 .....	220	二、用 MATLAB 求导数 .....	247
一、总体与样本 .....	220	三、用 MATLAB 求积分 .....	249
二、统计量 .....	221	第三节 MATLAB 在线性代数中的 简单应用 .....	251
三、抽样分布 .....	222	一、用 MATLAB 进行矩阵运算 .....	251
第六节 参数估计 .....	225	二、用 MATLAB 解线性方程组 .....	252
一、参数的点估计 .....	225	第四节 MATLAB 在概率统计中的 简单应用 .....	254
二、参数的区间估计 .....	230	一、常见分布的概率计算 .....	254
第七节 假设检验 .....	234	二、随机变量数字特征的计算 .....	255
一、假设检验基本原理 .....	234	三、MATLAB 在参数的区间估计上 的应用 .....	256
二、 $U$ 检验法 .....	235	附录 I 泊松分布表 .....	258
三、 $t$ 检验法 .....	235	附录 II 标准正态分布表 .....	261
四、 $\chi^2$ 检验法 .....	236	附录 III $\chi^2$ 分布表 .....	262
本章小结 .....	237	附录 IV $t$ 分布表 .....	265
复习题八 .....	240	参考文献 .....	267
第九章 数学实验 .....	243		
第一节 MATLAB 软件的基本 操作 .....	243		

# 第一章 函 数

数学起源于簿记、丈量等人类的实际生产活动. 因此, 数学与经济生活和生产管理有着天然的联系. 我们日常的经济事务和管理工作离不开数学特别是初等数学的应用, 而经济科学与管理科学的理论则大多以高等数学为工具. 对于经济管理类学生, 学习并掌握一定的高等数学知识, 具有一定的积极作用. 它有助于我们专业课的学习、抽象思维能力的提高, 使得学习经济学和管理学变得容易, 而且可以更完整、更深刻地理解和解释经济和管理理论.

函数是研究经济现象的重要工具, 是经济与管理数学的重要概念之一, 也是微积分学的研究对象. 本章在初等数学关于函数知识的基础上进一步讨论函数, 并学习经济学中的常用函数.



**[学习目标]** 理解函数概念, 了解分段函数概念, 了解复合函数概念; 熟练掌握基本初等函数的解析式及其基本性质. 会求一些实际问题的函数关系式; 了解空间解析几何的有关知识; 掌握常用的经济函数.

## 第一节 函数的概念与性质

### 一、函数概念

**引例 1** 在投保财产险时, 保险公司要对被保险人拥有的财产进行估价, 一些消费型财产的价值会随时间而贬值, 计算财产价值最简单的方法是利用“贬值直线”, 这样就确定了财产价值与时间的某种关系.

**引例 2** 当人的生活环境温度改变时, 人体代谢率也有相应的变化, 表 1-1-1 给出了实验的一组数据, 这组数据能说明什么呢?

表 1-1-1

环境温度/ $^{\circ}\text{C}$	4	10	20	30	38
代谢率/ $(4185\text{J} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$	60	44	40	40.5	54

在这个实际问题中出现了两个变量: 一个是环境温度, 另一个是人体的代谢率. 不难看出, 对于每一个环境温度, 都有唯一的人体代谢率与之对应, 这就决定了一个函数关系.

**引例 3** 一玩具经销商销售某种玩具, 销售的收入  $R$  为

$$R(Q) = 7.2Q - 0.001Q^2 \quad (0 \leq Q \leq 6000)$$

其中  $Q$  为销售量.

**引例 4** 在 2003 年抗击非典型性肺炎时, 卫生部门对疫情进行了通报, 图 1-1-2 是北京

市从4月21日至5月19日期间每日新增病例的变化统计图。

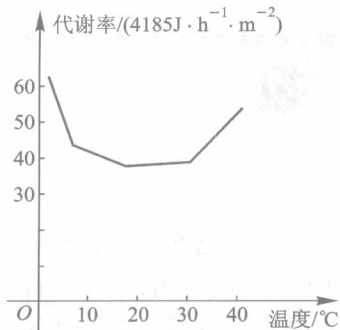


图 1-1-1

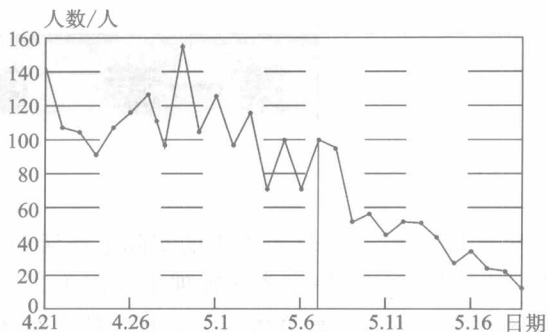


图 1-1-2

从图 1-1-2 中可以看出 5 月 7 日以后,整体形势在逐步好转。

又根据图 1-1-1,可以看出:代谢率曲线在小于 20 度的范围内是下降的,大于 30 度的范围内是上升的;环境温度在 20 度至 30 度时,代谢率较低,且较稳定。

上面几个例子,实际意义虽然完全不同,但是抽象看,都是在某过程中有两个相关联的变量,当一个变量在某数集内取值时,按一定的对应法则,另一个变量就有一个确定的值与之对应,这种两个变量间的对应关系,我们称为函数关系。

1. 函数在某变化过程中有两个变量  $x$  和  $y$ ,如果变量  $x$  在数集  $D$  内任取一个数值,按照某种对应法则,变量  $y$  都有唯一确定的数值与之对应,则称变量  $y$  是  $x$  的函数,记为

$$y = f(x) \quad x \in D,$$

其中  $x$  称为自变量, $y$  称为因变量. 自变量  $x$  的取值范围称为函数的定义域.  $y$  的对应值称为函数值,全体函数值的集合称为函数的值域。

2. 函数的定义域与对应法则是函数的两个要素. 给定函数就要指出函数的定义域和对应法则。

如果函数的对应法则可用数学解析式表达,而自变量  $x$  又无确定的实际背景,这时函数的定义域就是使这一“解析式”有意义的自变量  $x$  所取值的全体。

在实际问题中,函数的定义域还要受问题的实际意义的制约. 如在引例 3 中, $R(Q) = 7.2Q - 0.001Q^2$ . 从式子本身来说, $Q$  可取任意实数,但从该例的实际意义来说,其定义域是  $[0, 6000]$ 。

例 1 下列函数相同吗?

(1)  $y = \ln x^4$  与  $y = 4 \ln x$ ;

(2)  $y = x$  与  $y = \sqrt{x^2}$ .

解 (1)  $y = \ln x^4$  与  $y = 4 \ln x$  不是相同的函数,因为它们的定义域不同。

(2) 这两个函数的定义域都是  $(-\infty, +\infty)$ ,但它们的对应法则不同,所以也不是相同的函数。

例 2 你能说出下列函数的定义域吗?

(1)  $y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}$ ;

$$(2) y = \arcsin \frac{x+1}{3} + \sqrt{x+1}.$$

解 (1) 因为  $4-x^2 \neq 0$ , 所以  $x \neq \pm 2$ , 又因为  $x+2 \geq 0$ , 所以  $x \geq -2$ , 因此函数定义域为  $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$ .

(2) 因为  $-1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1$ , 所以  $-3 \leq x+1 \leq 3$ , 即  $-4 \leq x \leq 2$ . 又因为  $x+1 \geq 0$ , 所以  $x \geq -1$ , 因此函数的定义域为  $[-1, 2]$ .

### 3. 函数的表示法

从引例 1 ~ 引例 4 可以看出表示函数对应法则的方法主要有解析法、列表法、图像法, 下面分别介绍如下.

#### (1) 解析法

引例 1 和引例 3 中函数的对应法则是用数学式子给出的, 这种表示函数的方法称为解析法(或公式法). 微积分中所涉及的函数大多用解析法给出.

#### (2) 列表法

在实际应用中, 常把所考察函数的自变量的许多值(通常按由小到大的顺序)与它们所对应的函数值列成一表格, 如此表示函数的方法称为列表法, 如引例 2, 它的定义域是  $\{4, 10, 20, 30, 38\}$ . 以及常用的三角函数表、对数表等都是用列表法表示函数的例子.

#### (3) 图像法

在引例 2 和引例 4 中函数的对应法则是由曲线给出的, 这种由图像给出函数的表示方法称为图像法.

### 4. 分段函数

引例 5 某商场为庆贺一周年开业纪念, 准备搞一次酬宾活动, 有某种商品 1000 件, 销量  $x$  不超过 10 件时, 按单价  $p$ (百元) 计算; 当销量超过 10 件时, 其超出部分按单价  $p$  的九折计算, 你能写出函数关系式吗?

$$y = \begin{cases} px, & 0 \leq x \leq 10 \\ 10p + 0.9p(x-10), & 10 < x \leq 1000 \end{cases}$$

有些函数对于定义域内的自变量  $x$  的不同的值, 不能用一个统一的数学解析式表示出来, 而要用两个或两个以上的解析式来表示, 这种在自变量的不同取值范围内用不同的解析式表示的函数, 称为分段函数.

**注意** 分段表示的函数是用几个解析式合起来表示一个函数, 不能理解为几个函数.

#### 例 3 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

如图 1-1-3(a) 所示.

#### 例 4 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

如图 1-1-3(b) 所示.

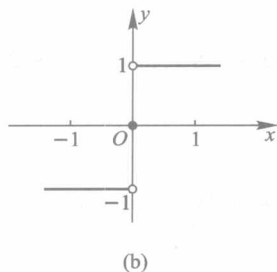
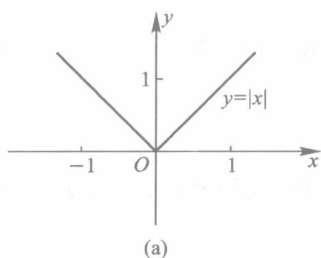


图 1-1-3

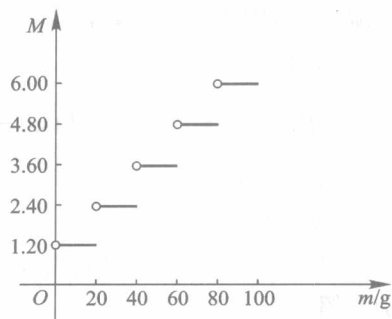


图 1-1-4

**例 5** 国内跨省市之间邮寄信函,每封信函的质量  $m$  和对应的邮资  $M$  如图 1-1-4. 请根据图像写出函数的表达式.

**解** 函数解析式为

$$M = \begin{cases} 1.20, & 0 < m \leq 20 \\ 2.40, & 20 < m \leq 40 \\ 3.60, & 40 < m \leq 60 \\ 4.80, & 60 < m \leq 80 \\ 6.00, & 80 < m \leq 100 \end{cases}$$

## 二、函数的几种特性

### 1. 函数的有界性

设函数  $f(x)$  在某区间  $I$  内有定义,如果存在一个正数  $M$ ,使得对于区间  $I$  内的一切  $x$  值,对应的函数值  $f(x)$  都有  $|f(x)| \leq M$  成立,则称  $f(x)$  在区间  $I$  内有界;如果不存在这样的正数  $M$ ,称  $f(x)$  在区间  $I$  内无界.

例如,函数  $f(x) = \sin x$  在定义域  $(-\infty, +\infty)$  内是有界的,因为对于一切  $x \in \mathbf{R}$ ,  $|\sin x| \leq 1$  都成立,这里  $M = 1$ .

又如,对于例 3 中的函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是无界的,但在任何一个有限区间内是有界的.

[小问题] 有界函数的界是唯一的吗?

### 2. 函数的单调性

**引例 6** 某商品的价格为常数  $p$ ,销售量为  $Q$ ,则收益  $R = pQ$ . 如图 1-1-5 所示.

在研究函数的过程中,经常要考虑函数值的增减变化,从上例可以看出,收益  $R$  随销售量  $Q$  的增加而

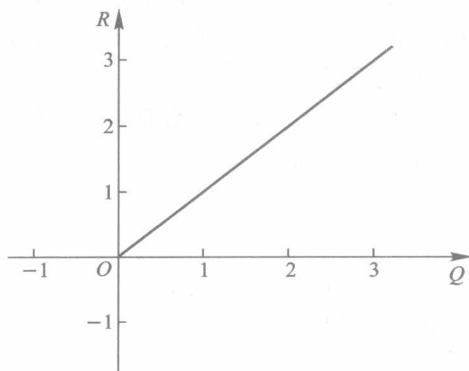


图 1-1-5

增加.

如果函数  $y=f(x)$  在某区间  $I$  内随着  $x$  的增大而增大(或减小),即对于  $I$  内任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时,有  $f(x_1) < f(x_2)$  或  $(f(x_1) > f(x_2))$ , 那么称函数  $f(x)$  在区间  $I$  内单调增加(或单调减少). 其中  $I$  称为函数  $f(x)$  的单调增加(或单调减少)区间, 也称单调区间.

在定义域内单调增加或单调减少的函数, 统称为单调函数.

单调增加(或单调减少)函数的图形沿  $x$  轴的正向上升(或下降). 如图 1-1-6.

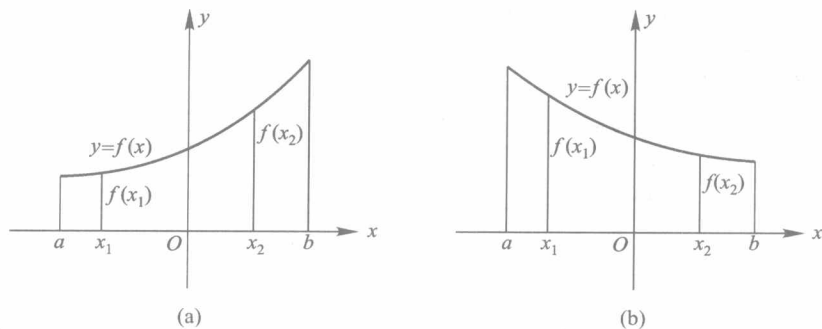


图 1-1-6

### 3. 函数的奇偶性

如果函数  $f(x)$  的定义域关于原点对称, 且对定义域内任意  $x$ , 都有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数; 若有  $f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数. 如果函数既非奇函数, 也非偶函数, 则称  $f(x)$  为非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于  $y$  轴对称.

[动手实践] 请你画出图像的另一半. 如图 1-1-7.

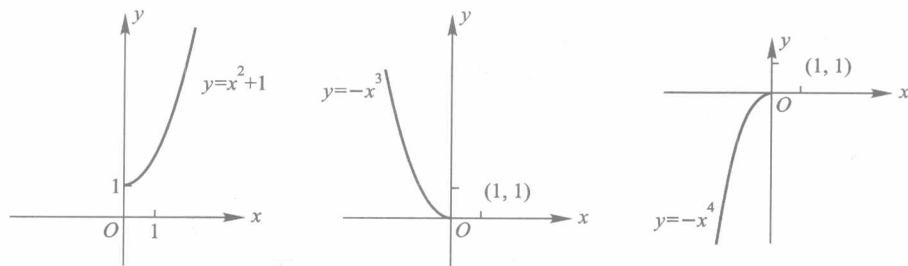


图 1-1-7

### 4. 函数的周期性

引例 7 图 1-1-8 是一个矩形波的图形, 它以  $2\pi$  为周期, 呈规律性的变化.

如果有不为零的实数  $L$  存在, 使得  $f(x+L) = f(x)$  在定义域内恒成立, 则称函数  $f(x)$  为周期函数, 称  $L$  是  $f(x)$  的周期. 显然  $\pm L, \pm 2L, \pm 3L, \dots, \pm nL$  也是它的周期, 通常所说的函数的周期是指它的最小正周期.

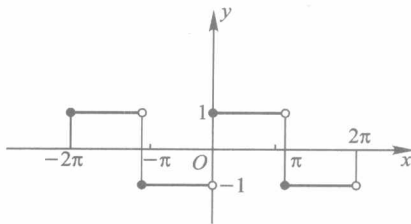


图 1-1-8

我们常见的三角函数  $y = \sin x, y = \cos x$  都是以  $2\pi$  为周期的;  $y = \tan x, y = \cot x$  都是以  $\pi$  为周期的.

### 练习题一



1. 判断下列各题中两个函数是否相同? 为什么?

(1)  $f(x) = x$  和  $f(x) = (\sqrt{x})^2$ ;

(2)  $y = \ln \sqrt{x-1}$  和  $y = \frac{1}{2} \ln(x-1)$ .

2. 求下列函数的定义域:

(1)  $y = \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$ ;      (2)  $y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1+x)}$ ;

(3)  $y = \arcsin \sqrt{x}$ ;      (4)  $y = \frac{x}{\tan x}$ .

3. 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

作出它的图形, 并求  $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{3}\right), f\left(\frac{3}{4}\right), f(2)$  的值.

4. 指出下列函数哪些是奇函数? 偶函数? 非奇非偶函数?

(1)  $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ;      (2)  $y = x^2 \cos x$ ;

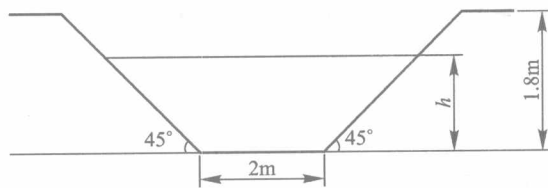
(3)  $y = \frac{x}{a^x - 1}$ ;      (4)  $y = 10^x$ .

5. 某灌溉渠的横截面是等腰梯形, 底宽 2m, 渠深 1.8m, 边坡的倾角为  $45^\circ$ .

(1) 试写出横断面中水面积  $A(\text{m}^2)$  与水深  $h(\text{m})$  的函数关系式;

(2) 确定函数的定义域和值域;

(3) 画出函数的图像.





## 第二节 初等函数

### 一、反函数

我们知道,某种商品销售的总收入  $R$  是销售量  $Q$  的函数,若单价为  $p$ ,则

$$R = pQ$$

其中  $p$  为常数.

反过来,也可以由销售总收入  $R$  和商品单价  $p$  来确定商品的销售量,即

$$Q = \frac{R}{p}$$

这时销售总收入  $R$  是自变量,销售量  $Q$  是总收入  $R$  的函数,这时我们称后一函数是前一函数的反函数.

设函数  $y=f(x)$  的定义域是  $D$ ,值域是  $M$ . 若对于  $M$  中的每一个  $y$ ,都有唯一确定的  $x \in D$  与之对应,则这时  $x$  也是  $y$  的函数,称为  $y=f(x)$  的反函数,记为  $x=f^{-1}(y)$ ,此时  $y=f(x)$  称为直接函数.

**注意** (1) 习惯上,自变量用  $x$  表示,所以反函数也可表示为  $y=f^{-1}(x)$ .

(2) 函数  $y=f(x)$  的定义域,正好是它的反函数  $y=f^{-1}(x)$  的值域;函数  $y=f(x)$  的值域,正好是它的反函数  $y=f^{-1}(x)$  的定义域(如下表).

	函数 $y=f(x)$	反函数 $y=f^{-1}(x)$
定义域	$D$	$M$
值域	$M$	$D$

(3) 函数  $y=f(x)$  的图形与其反函数  $y=f^{-1}(x)$  的图形关于直线  $y=x$  对称.

(4) 并不是所有的函数都有反函数,例如:  $y=c$  ( $c$  是常数) 就没有反函数.

**例 1** 求下列函数的反函数:

(1)  $y = \sqrt{x} + 1$  ( $x \geq 0$ );

(2)  $y = \frac{2x+3}{x-1}$  ( $x \in \mathbf{R}$ , 且  $x \neq 1$ ).

**解** (1) 由函数  $y = \sqrt{x} + 1$ , 得  $x = (y-1)^2$ , 所以, 函数  $y = \sqrt{x} + 1$  ( $x \geq 0$ ) 的反函数是

$$y = (x-1)^2 \quad (x \geq 1)$$

(2) 由函数  $y = \frac{2x+3}{x-1}$ , 得  $x = \frac{y+3}{y-2}$ , 所以, 函数  $y = \frac{2x+3}{x-1}$  ( $x \in \mathbf{R}$ , 且  $x \neq 1$ ) 的反函数是

$$y = \frac{x+3}{x-2} \quad (x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq 2)$$

### 二、基本初等函数

以下函数称为基本初等函数: