



丛书主编 凯歌

导学与评价

高中选修4-1 几何证明选讲

数 学



北师大版

学生用书

XINKEBIAO

DAOXUEYUPINGJIA



星球地图出版社

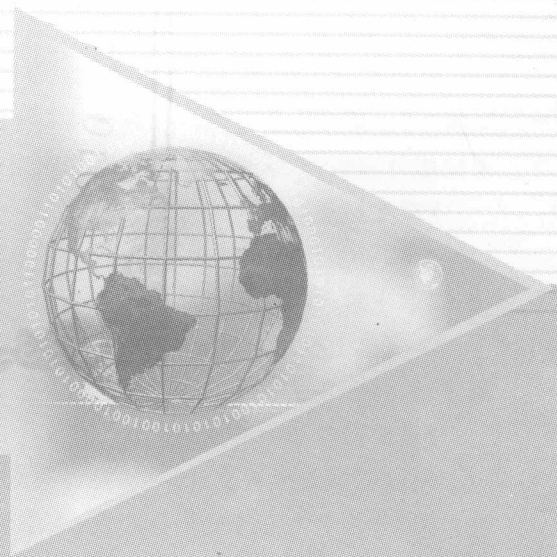


丛书主编 凯歌

导学与评价

高中选修 4-1

数 学



北师大版

星球地图出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高中新课标导学与评价丛书: 北师大版. 数学. 4-1: 选修/
凯歌编.—北京: 星球地图出版社, 2008.1
ISBN 978-7-80212-641-1

I. 高… II. 凯… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 013511 号

丛书策划: 金九州文化
责任编辑: 张佩英

导 学 与 评 价

高 中 数 学 选 修 4-1

DAOXUEYUPINGJIA

GAOZHONGSHUXUEXUANXIUSIGANGYI

丛书主编: 凯 歌

星球地图出版社出版
(北京市北三环中路 69 号)

邮政编码: 100088

网 址: www.starmap.com.cn

星球地图出版社总发行
郑州文华印务有限公司

2007 年 12 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷

880×1230 16 开本 7.5 印张 335000 字

ISBN 978-7-80212-641-1

定价: 12.80 元 (书+检测题卷)

(如有印刷装订质量问题请与承印厂调换)

联系电话: 010-62052349



主 编 曹仲会

编 者 刘福明 刘乃香

张贵星 陈光强



心愿

XIN YUAN

DAOXUE YU PINGJIA

国家基础教育课程改革已经全面启动,它给学科教材带来了实质性变革。自主、合作、探究、创新等新理念得到积极提倡和实行,教育、教学、考试也发生了重大变化,这引起全社会特别是教师和学生的广泛关注。为了帮助广大师生适应全新的课改理念,提高教育教学质量,我们由专家引领、一线教师执笔,特编写这套集新理念和新课标为一体、熔科学性与实用性为一炉的教辅丛书《导学与评价》。该丛书有以下特点:

1. 最新的课改理念。丛书充分融入课改新理念和新课标要求,广泛汲取教育专家对课改的思想认识;着眼三维目标,注重人文、情感态度与价值观的渗透和融合;体现知识、能力、素质合一,方法、实践、创新一体。

2. 全新的作者队伍。我们精心组织的所有作者全都来自新课标教材实验区,均为各地学科带头人,多为一线特高级教师;他们既有对新课标理念深刻的认识又有丰富的实际教育教学经验,他们用自己选择教辅、评判教辅的标准严格规范自己的写作。

3. 科学的编排体例。丛书在体例设计时,充分遵循课改理念和吸收专家的教育智慧,充分考虑课堂教学的实际需要,注重学生自主学习和教师精要导学相结合,注重知识构建与能力提升相结合,注重素质培养、思维训练和考试能力相结合,从而达到科学性和实用性的完美统一。

【赢在起点】

总体解读章节或单元学习目标、重点难点和核心要求,概括说明,明确方向,激情导入,并提供教学方略。

【自主学习与知识构建】

学生自主梳理章节基础知识,整合知识结构,培养学生动手动脑的良好习惯,增强学生学习、思考的自觉性、积极性,并夯实基础。

【精要导学与方法策略】

阐述章节或单元重点知识、能力要点、思维体系,使学生立足基础,抓住关键,突破难点;精要讲解,言简意赅,重点突出,使学生准确把握核心内容,逾越思维障碍,走出思维误区;典型例题引导感悟,创设好题、新题,揭示思路方法和学习方略,讲练结合,学以致用,从而培养学生获取和解读信息、调动和运用知识、描述和阐释事物、论证和探讨问题的四维能力。

【迁移应用与探究创新】

针对重点知识和能力训练要求,精编习题,自练自查和探究创新相结合,梯度训练,循序渐进,以达到知识和能力的自然转化、过程和方法的有机统一、思维和素质的综合提升。

【回顾、思考、升华】

遵循系统性原理,整合、梳理章节知识,构建能力框架,把握规律;归纳专题考点,精选典型例题,充分体现基础能力和拓展综合要求;对近三年高考真题详尽解读,把握考查重点,明确能力发展方向。

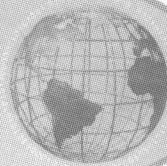
4. 新颖的成书模式。我们充分满足一线广大师生的需求,丛书各学科的“学生用书”将本章(单元)测试卷、综合测试卷独立成册,夹放在学科教辅书中,并提供“教师用书”,补充丰富的教学参考资料,方便老师们在教学过程中灵活使用。

编写一套师生满意的教辅资料是我们最大的心愿,为实现这个心愿,我们一直孜孜以求、精益求精。“精诚所至,金石为开”,我们这套教辅丛书,希望得到您的关注和厚爱!

《导学与评价》丛书编委会

星球地图出版社

二〇〇七年十二月



数学选修4-1(北师大版)

第一章 直线、多边形、圆	(1)
§ 1 全等与相似	(2)
1.1 图形变化的不变性	(2)
1.2 平移、旋转、反射	(2)
1.3 相似与位似	(3)
1.4 平行线分线段成比例定理	(10)
1.5 直角三角形的射影定理	(16)
§ 2 圆与直线	(21)
2.1 圆周角定理	(21)
2.2 圆的切线的判定和性质	(26)
2.3 弦切角定理	(34)
2.4 切割线定理	(40)
2.5 相交弦定理	(44)
§ 3 圆与四边形	(47)
3.1 圆内接四边形	(47)
3.2 托勒密定理	(54)
回顾、思考、升华	(56)



阅读索引

YUEDU SUOYIN
DAOXUE YU PINGJIA

第二章 圆锥曲线	(60)
§ 1 截面欣赏	(61)
§ 2 直线与球、平面与球的位置关系	(62)
§ 3 柱面与平面的截面	(65)
§ 4 平面截圆锥面	(68)
§ 5 圆锥曲线的几何性质	(70)
回顾、思考、升华	(73)
第一章 检测题	(75)
第二章 检测题	(79)
综合检测题	(83)
参考答案	(87)

第一章

直线、多边形、圆

赢在起点



课程标准

• 知识与技能

1. 了解图形变换的不变性, 加深学生对图形与其变换后的图形之间关系的认识, 加深对图形的概念的理解. 图形变化过程中的不变性是几何学研究的重要而基本的问题.
2. 理解和掌握平行线分线段成比例定理、直角三角形的射影定理、直线与圆位置关系的重要定理及其相应证明, 探索并证明圆内接四边形的性质.

• 过程与方法

1. 通过具体实例感受图形变化过程的不变性.
2. 通过概念教学, 培养学生由具体到抽象的思维方法.
3. 经历直线(线段)与圆不同位置关系的分类活动; 经历在特定位置下探寻定量刻画图形间关系的活动.
4. 经历圆内接四边形性质的探索过程, 认识并证明圆内接四边形的性质定理.
5. 探索并掌握圆内接四边形的判定定理(四点共圆的判定定理).
6. 体会托勒密定理的证明思路.

• 情感、态度与价值观

1. 通过探索圆与直线的位置关系, 进一步体会数形结合的思想方法, 提高逻辑思维能力和综合运用知识解决问题的能力.
2. 进一步提高学生的几何直观能力及运用综合几何方法解决问题的能力, 提高学生对几何命题的论证能力. 通过对几何定理的探索证明, 让学生体会“探索—发现—猜想—证明”的思维过程.

专题探究

本章内容主要包括: 全等与相似, 圆与直线, 圆与四边形三大节内容.

第一节是全等与相似. 本节内容主要以义务教育阶段的知识为基础, 通过复习相似三角形的性质, 学习在几何证明中有广泛应用的平行线分线段成比例定理、三角形内角平分线定理和直角三角形的射影定理.

第二节是圆与直线. 教材分别介绍了圆周角定理, 圆的切线的判定和性质, 弦切角定理, 切割线定理, 相交弦定理.

第三节是圆与四边形. 教材从圆内接四边形的定义出发, 引入对圆内接四边形的角的研究, 从而得到了圆内接四边形的性质定理.

学法点津

1. 图形变化过程中的不变性是几何学研究的重要而基本的问题, 同学们应通过熟悉的几种几何变换(平移、旋转、反射), 直观地认识图形变换下的不变性, 不宜从纯理论的角度去论证它.

2. 本章要求同学们通过对定理的探索、证明, 认识研究问题的一般方法, 体会“探索—发现—猜想—证明”的思维过程, 进一步提高同学们的论证能力及综合运用知识的能力.

3. 同学们应在教师的指导下进行一些推理论证的训练, 通过训练, 自己归纳、推理出几何论证的基本方法: 直接法、间接法.

4. 周长一定的封闭曲线中, 圆的面积最大, 这一性质在现实世界中许多重要的应用, 了解这一性质的推证过程可以提高同学们的数学素养, 让同学们感受探究研究问题的思维过程.

§1 全等与相似

1.1 图形变化的不变性

1.2 平移、旋转、反射

自主学习与知识构建



自主·预习·思考

1. 一个图形通过平移变换、旋转变换、反射变换变为另一个图形,其对应线段的_____,对应角的_____,因此,变换前后两个图形是_____的,但图形的位置_____.

2. 观察下面一组图如图 1-1-1-1,分析图中的右图是由左图经过怎样的变换得到的.

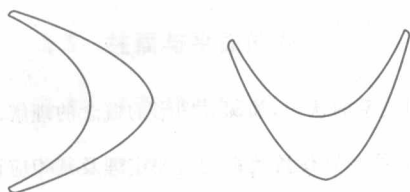


图 1-1-1-1

精要导学与方法策略



要点·剖析·突破

1. 图形的不变性



图 1-1-1-2

如图 1-1-1-2 中,两个椭圆的长轴长,短轴长都发生了改变,但长轴平分短轴(或短轴平分长轴)没有变.

联系现实生活中的例子,不难发现,图形在变化过程中,有些性质不变,有些性质发生了改变.

2. 平移、旋转、反射

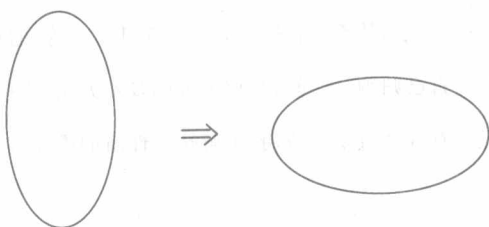
如图 1-1-1-3、1-1-1-4、1-1-1-5



图(1)

图 2

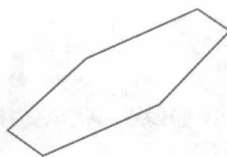
图 1-1-1-3



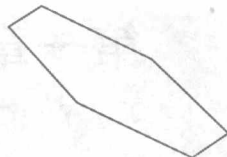
图(1)

图(2)

图 1-1-1-4



图(1)



图(2)

图 1-1-1-5

如图 1-1-1-3 中,图(2)可由图(1)平移得到,图形平移过程称为平移变换.

如图 1-1-1-4 中,图(2)可由图(1)顺时针旋转 90° 得到,图形的旋转过程称为旋转变换.

如图 1-1-1-5 中,图(1)绕直线 l 翻转 180° 得到(2),图(1)和(2)关于 l 对称,这种图形的变化过程称为反射变换,直线 l 称为反射轴.

一个图形通过平移变换、旋转变换、反射变换变为另一个图形,其对应线段的长度不变,对角度大小不变,变换前后两个图形是全等的,但图形的位置可能发生改变.



典题·引导·感悟

例 观察下列几组图(如图 1-1-1-6),分析每组图中的右图是左图经过怎样的变换得到的.

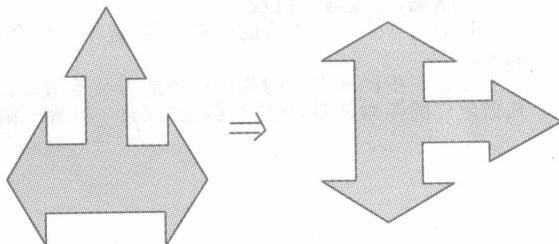
1.



(1)

(2)

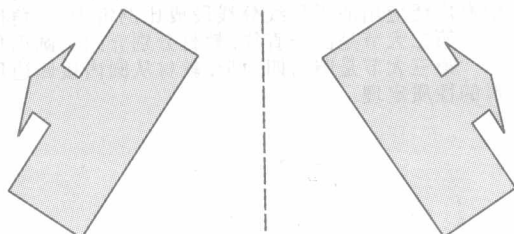
2.



(1)

(2)

3.



(1)

(2)

图 1-1-1-6

引导:由平移、旋转、反射变换的定义可知是哪种变换.

答案:第一组:平移变换

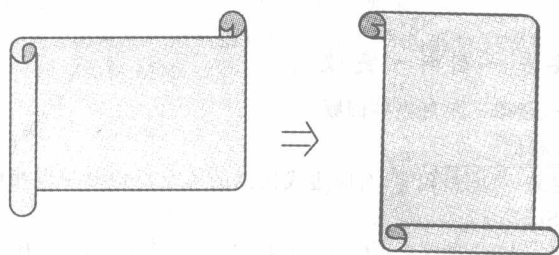
第二组:旋转变换

第三组:反射变换



练一练 观察下列几组图(如图 1-1-1-7)分析每组图中的右图是由左图经过怎样的变换得到的.

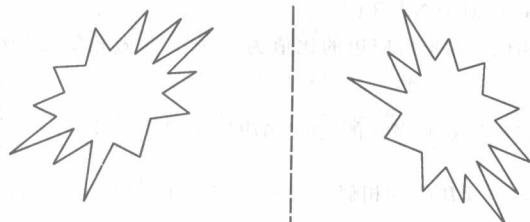
1.



(1)

(2)

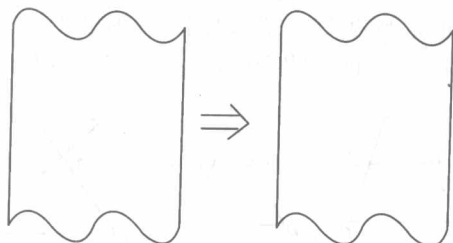
2.



(1)

(2)

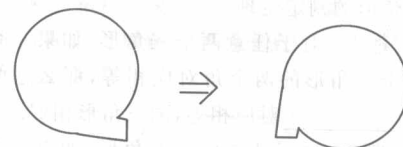
3.



(1)

(2)

图 1-1-1-7

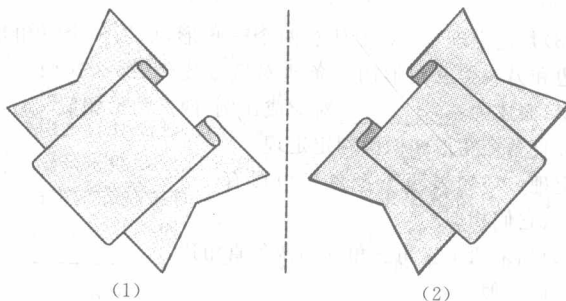


(2)

图 1-1-1-8

问:(1)是_____变换 (2)是_____变换

实践·探究·创新



(1)

(2)

图 1-1-1-9

说出图 1-1-1-9 中的变换.

自我评价

通过以上的学习,你肯定收获多多,或许也有一些疑惑,你能把它记在下面吗?

1.3 相似与位似

自主学习与知识构建

自主·预习·思考

1. 把一个图形_____放大或缩小,这种图形的变化过程称为相似变换.

一个图形通过相似变换为另一个图形,其对应角_____,但_____.

和_____发生了改变,把一个图形变为它的_____,这种图形的变化过程称为位似变换.

2. 一个图形通过位似变换为另一个图形,其_____,对应角的_____,但_____发生了改变.

位似变换是一种特殊的_____.

3. 相似三角形知识回顾

(1) 定义:对应角相等,对应边成比例的两个三角形叫做_____,相似三角形对应边的比值叫做_____(或_____).

(2) 预备定理:平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交,所构成的三角形与原三角形_____.

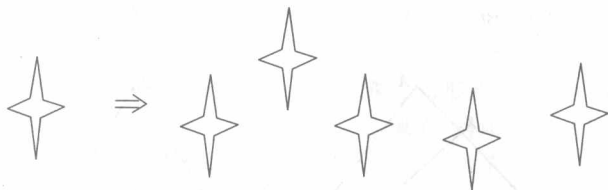
思维·误区·警示

旋转变换、反射变换、平移变换的区别要以具体实例加以区分.

迁移应用与探究创新

自练·自查·自评

已知下面两组图(如图 1-1-1-8)



(1)

4. 相似三角形的判定定理

(1)判定定理1 对于任意两个三角形,如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等,那么这两个三角形相似,简称为:_____对应相等,两三角形相似.

(2)判定定理2 对于任意两个三角形,如果一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例,并且夹角相等,那么这两个三角形相似,简称为:_____对应成比例且_____相等,两三角形相似.

引理 如果一条直线截三角形的两边(或两边的延长线)所得的对应线段成比例,那么这条直线平行于三角形的_____.

(3)判定定理3 对于任意两个三角形,如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例,那么这两个三角形相似,简称为:_____对应成比例,两三角形相似.

5. 直角三角形相似的判定定理

定理:(1)如果两个直角三角形有一个_____对应相等,那么它们相似.

(2)如果两个直角三角形的两条直角边_____那么它们相似.

定理:如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边_____,那么这两个直角三角形_____.

6. 相似三角形的性质定理

相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于_____.

相似三角形周长的比等于_____.

相似三角形面积的比等于_____.

7. 两个相似三角形的外接圆的直径比、周长比、面积比与相似比的关系:

相似三角形外接圆的_____,_____等于相似比,外接圆的_____等于相似比的平方.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, P 为 AB 上一点,在下列四个条件中:

① $\angle ACP = \angle B$; ② $\angle APC = \angle ACB$; ③ $AC^2 = AP \cdot AB$; ④ $AB \cdot CP = AP \cdot CB$. 其中,能判定 $\triangle APC$ 与 $\triangle ACB$ 相似的条件是

()

A. ①②④

B. ①③④

C. ②③④

D. ①②③

9. 观察下面几组图(如图1-1-3-1),说明右图是由左图经过怎样的变换得到的?



图1-1-3-1

10. 如图1-1-3-2所示,小明欲测量一座古塔的高度,他站在该塔的影子前后移动,直到他本身影子的顶端正好与塔的影子顶端重合,此时他距离该塔18 m,已知小明的身高是1.6 m,他的影长是2 m.

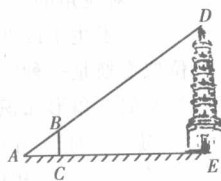


图1-1-3-2

(1)图中 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 是否相似?为什么?

*(2)求古塔的高度.

精要导学与方法策略

要点·剖析·突破

一、相似三角形内容回顾

1. 相似三角形

定义:对应角相等,对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形(Similar triangle).

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,如果 $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$,则 $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle A'B'C'$. 读作 $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle A'B'C'$.

设相似三角形对应边的比值为 k ,则 k 叫做相似比(或相似系数).

相似比是有顺序性的,如 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{2}$,则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 $\frac{3}{2}$, $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\frac{2}{3}$.

2. 相似三角形判定定理的预备定理

预备定理1. 平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交,所构成的三角形与原三角形相似.

如图1-1-3-3,在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$,则 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

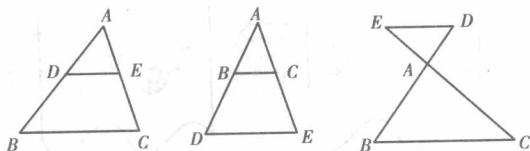


图1-1-3-3

由平行线截得的相似三角形,称为“平行线型”的相似三角形,在寻找这类相似三角形时,先找准平行线,再观察与这两条平行线相交的直线所构成的所有三角形,并逐一找出来.

预备定理2.(共边定理)若直线 PQ 、 AB 交于 M ,则 $\frac{PM}{QM} = \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}$.

这个定理中的两个三角形有公共边 AB ,叫做一对共边三角形,故定理叫做共边定理.

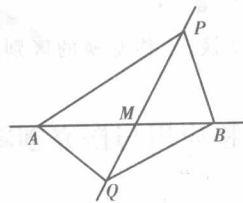


图1-1-3-4

预备定理3.(共角定理)若 $\angle ABC$ 与 $\angle XYZ$ 相等或互补,则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle XYZ}} = \frac{AB \cdot BC}{XY \cdot YZ}$$

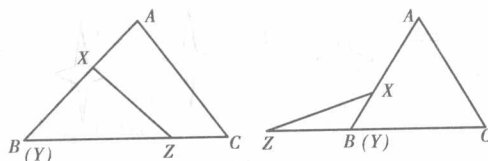


图1-1-3-5

定理中涉及两个角相等或互补,故定理叫做共角定理.

3. 相似三角形的判定定理

判定定理 1. 对于任意两个三角形, 如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等, 那么这两个三角形相似. 简述为: 两角对应相等, 两三角形相似.

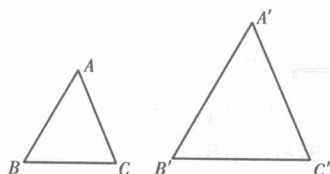


图 1-1-3-6

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

证明定理既可以用预备定理 1, 也可以用预备定理 3.

判定定理 2. 对于任意两个三角形, 如果一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例, 并且夹角相等, 那么这两个三角形相似. 简述为: 两对应边成比例且夹角相等, 两三角形相似.

如图 1-1-3-6

$$\left. \begin{array}{l} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \angle A = \angle A' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

证明定理可以用预备定理 1, 也可以用预备定理 2.

判定定理 3. 对于任意两个三角形, 如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例, 那么这两个三角形相似. 简述为: 三边对应成比例, 两三角形相似.

如图 1-1-3-6,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

4. 直角三角形相似的判定定理

定理 1. 如果两个直角三角形有一个锐角相等, 那么它们相似.

定理 2. 如果两个直角三角形的两条直角边对应成比例, 那么它们相似.

定理 3. 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例, 那么这两个直角三角形相似.

5. 性质定理 1: 相似三角形对应角相等, 对应边成比例.

利用本性质可以证明角相等、线段成比例, 也可以求线段的长. 例如: 如图 1-1-3-7, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 BC 上, $\angle BAC = \angle ADC$, $AC=8$, $BC=16$, 则可求 CD 长. 由 $\angle BAC = \angle ADC$, $\angle C = \angle C$, 则 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}.$$

$$\therefore CD = \frac{AC^2}{BC} = 4$$

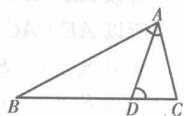


图 1-1-3-7

7. 性质定理 3: 相似三角形的面积比等于相似比的平方

利用本定理我们可以解决有关相似三角形的面积的问题, 如求相似三角形的面积.

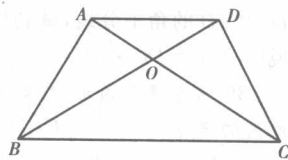


图 1-1-3-8

例: 如图 1-1-3-8, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 、 BD 相交于 O , $OA=2$, $AC=8$, 且 $S_{\triangle BCD}=6$, $S_{\text{梯形} ABCD}=10$, 求 $S_{\triangle AOD}$.

8. 相似三角形性质的运用

利用相似三角形的性质, 常可以:

- (1) 用来证明线段成比例、角相等;
- (2) 用来计算周长、边长等;
- (3) 用来证明线段的平方比.

运用相似三角形性质解题关键在于求出相似比. 在具体论证过程中, 往往是相似三角形的判定定理和性质定理结合运用, 由判定三角形相似得到角相等或对应线段成比例的过程反复运用, 从而达到解决问题的目的.

例: 如图 1-1-3-9 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 为腰 AB 上一点, $AD=DC$, 且 $AD^2=AB \cdot BD$, 求证: $\angle A=36^\circ$.

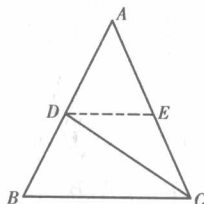


图 1-1-3-9

二、相似变换与位似变换

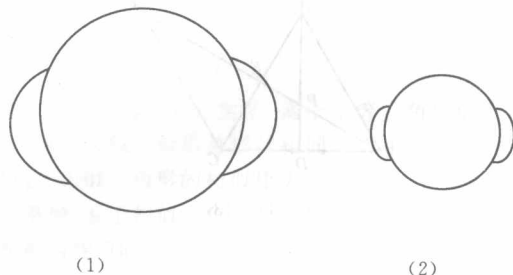


图 1-1-3-10

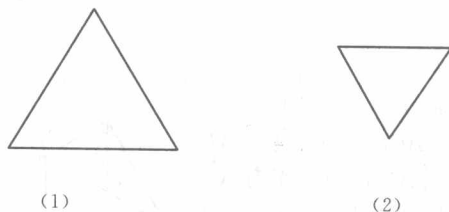


图 1-1-3-11

如图 1-1-3-10 中, (1) 和 (2) 是相似图形. 像这样, 把一个图形按一定比例放大或缩小, 这种图形的变化过程称为相似变换, 一个图形通过相似变换变为另一个图形, 其对应角的大小不变, 但对应线段的长度和图形的位置发生了变化.

图 1-1-3-11 中, (1) 和 (2) 是位似图形. 像这样, 把一个图形变为它的位似图形, 这种图形的变化过程称为位似变换.

一个图形通过位似变换变为另一个图形, 其形状不变, 对应角的大小不变, 但图形的位置发生了改变. 实际上, 位似变换是一种特殊相似变换.

典题·引导·感悟

例1 如图1-1-3-12,已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle A=36^\circ$, BD 是 $\angle B$ 的角平分线,试利用三角形相似的关系说明 $AD^2=DC \cdot AC$.

引导:有一个角是 36° 的等腰三角形,它的底角是 72° ,而 BD 是底角的平分线,所以 $\angle CBD=36^\circ$,则可推出 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$,进而由相似三角形对应边成比例推出线段之间的比例关系.

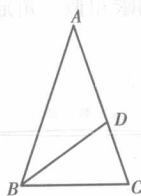


图 1-1-3-12

证明: 因为 $\angle A=36^\circ$, $AB=AC$,

所以 $\angle ABC=\angle C=72^\circ$

又因为 BD 平分 $\angle ABC$,

所以 $\angle ABD=\angle CBD=36^\circ$.

所以 $AD=BD=BC$,且 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$.

所以 $BC:AB=CD:BC$.

所以 $BC^2=AB \cdot CD$.

所以 $AD^2=AC \cdot CD$.

点拨: (1)有两个角对应相等,那么这两个三角形相似,这是判断两个三角形相似最常用的方法,并且根据相等的角的位置,可以确定哪些边是对应边.

(2)要说明线段的乘积式 $ab=cd$,或平方式 $a^2=bc$,一般都是证明比例式 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ 或 $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$,再根据比例的基本性质推出乘积式或平方式.



练一练 如图1-1-3-13,已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$,

AD 是 BC 边上的中线, $CF \parallel BA$, BF 交 AD 于点 P ,交 AC 于点 E .

求证: $BP^2=PE \cdot PF$.

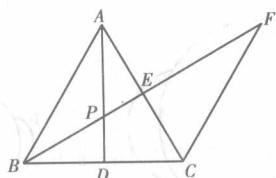


图 1-1-3-13

例2 如图1-1-3-14所示,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , AE 是 $\angle CAB$ 的角平分线, CD 与 AE 相交于点 F , $EG \perp AB$ 于 G .

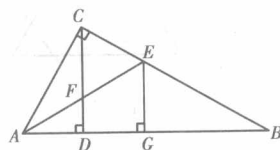


图 1-1-3-14

求证: $EG^2=FD \cdot EB$.

引导:欲证 $EG^2=FD \cdot EB$,即

证 $\frac{EG}{FD}=\frac{EB}{EG}$,易证 $\frac{EG}{FD}=\frac{AE}{AF}$, $EG=CF$,故只需证 $\frac{AE}{AF}=\frac{EB}{CF}$,亦即

证 $\triangle AFC \sim \triangle AEB$.

证明: 因为 $\angle ACE=90^\circ$, $CD \perp AB$,

所以 $\angle CAE+\angle AEC=90^\circ$, $\angle FAD+\angle AFD=90^\circ$

因为 $\angle AFD=\angle CFE$,所以 $\angle FAD+\angle CFE=90^\circ$.

又因为 $\angle CAE=\angle FAD$,

所以 $\angle AEC=\angle CFE$,所以 $CF=CE$.

因为 AE 是 $\angle CAB$ 的平分线, $EG \perp AB$, $EC \perp AC$,

所以 $EC=EG$, $CF=EG$.

因为 $\angle B+\angle CAB=90^\circ$, $\angle ACF+\angle CAB=90^\circ$,

所以 $\angle ACF=\angle B$.

因为 $\angle CAF=\angle BAE$,

所以 $\triangle AFC \sim \triangle AEB$, $\frac{AF}{AE}=\frac{CF}{EB}$.

因为 $CD \perp AB$, $EG \perp AB$,

所以 $Rt\triangle ADF \sim Rt\triangle AGE$.

所以 $\frac{AF}{AE}=\frac{FD}{EG}$, $\frac{CF}{EB}=\frac{FD}{EG}$.

所以 $CF \cdot EG=FD \cdot EB$, $EG^2=FD \cdot EB$.

点拨:对于直角三角形相似的判定,有一种特殊方法是:直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似.



练一练 如图1-1-3-15

所示,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $CD \perp AB$, $DE \perp AC$, $EF \perp AB$,垂足分别为 D 、 E 、 F .

求证: $CE^2=BD \cdot DF$.

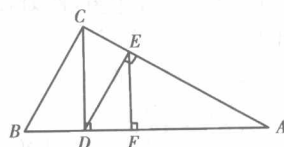


图 1-1-3-15

例3 如图1-1-3-16所示,已知 D 是 $\triangle ABC$ 中 AB 边上一点, $DE \parallel BC$ 且交 AC 于 E , $EF \parallel AB$ 且交 BC 于 F ,且 $S_{\triangle ADE}=1$, $S_{\triangle EFC}=4$,则四边形 $BFED$ 的面积等于多少?

引导:本题由题意显然 $\triangle ADE \sim \triangle EFC$,由面积比能得出相似比,再由相似比转化为面积比,求出整个 $\triangle ABC$ 的面积能得到四边形 $BFED$ 的面积.

解: 因为 $AD \parallel EF$, $DE \parallel FC$,

所以 $\triangle ADE \sim \triangle EFC$.

因为 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle EFC}=1:4$,

所以 $AE:EC=1:2$.

所以 $AE:AC=1:3$.

所以 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=1:9$.

因为 $S_{\triangle ADE}=1$,所以 $S_{\triangle ABC}=9$,

所以 $S_{\text{四边形}BFED}=4$.

点拨:求解本题的关键是面积比与边长比的相互转化.



练一练 1.如图1-1-3-17所示, D

是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的一点,过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E .已知 $AD:DB=2:3$,则 $S_{\triangle ADE}:S_{\text{四边形}BCED}$ 为多少?

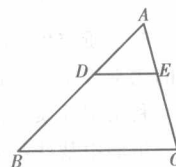


图 1-1-3-17

2. 如图 1-1-3-18 所示, 已知 $\triangle ABC$ 中 $DE \parallel FG \parallel BC$, $AD : DF : FB = 2 : 3 : 4$.

求 $S_{\triangle ADE} : S_{\text{四边形 } DEGF} : S_{\text{四边形 } BCGF}$.

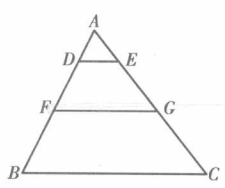


图 1-1-3-18

例 4 如图 1-1-3-19, P, Q 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB, BC 上的点, 且 $BP=BQ$, $BH \perp PC$ 于 H ,

求证: $QH \perp DH$.

引导: 要证 $\angle DHQ = 90^\circ$, 须证 $\angle BHQ = \angle DHC$, 要证 $\angle BHQ = \angle DHC$, 只须证 $\triangle BHQ \sim \triangle HCD$ 即可.

解: 在 $Rt\triangle PBC$ 中,

$\because BH \perp PC$,
 $\therefore \angle PBH = \angle PCB$,
 $\therefore Rt\triangle PBC \sim Rt\triangle BHC$,

$$\therefore \frac{BH}{PB} = \frac{HC}{BC},$$

又 $\because BP=BQ, BC=DC$,

$$\therefore \frac{BH}{BQ} = \frac{HC}{DC}.$$

$\because \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle HBQ = \angle HCD$.

$\therefore \triangle HBQ \sim \triangle HCD$,

$\therefore \angle BHQ = \angle DHC$,

$\therefore \angle QHD = \angle QHC + \angle DHC = \angle BHQ + \angle QHC = 90^\circ$.

即 $QH \perp DH$.

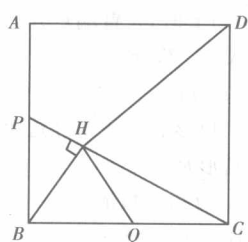
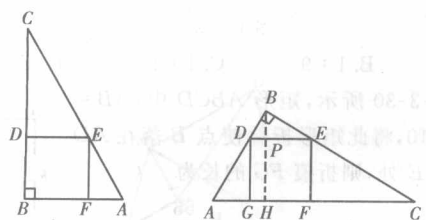


图 1-1-3-19

点拨: 当要证明的问题无从下手时, 我们可以采用逆向思维.

练一练 一块直角三角形木板的一条直角边 AB 长为 1.5 米, 面积为 1.5 平方米, 要把它加工成一个面积最大的正方形桌面, 甲、乙两位同学的加工方法分别如图 1-1-3-20(1)、(2) 所示. 那么哪位同学的加工方法符合要求? 说说你的理由. (加工损耗忽略不计, 计算结果中的分数可保留)



(1) (2)

图 1-1-3-20

例 5 说明如图 1-1-3-21 中的图形, 右图是由左图经过怎样的变换得到的?

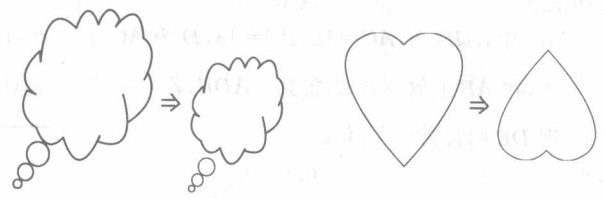


图 1-1-3-21

引导: 由位似变换和相似变换概念来求解.

答案: (1) 是相似变换

(2) 是位似变换

点拨: 位似变换是一种特殊的相似变换.

练一练 说出图 1-1-3-22 中, 右图是左图经过怎样的变换得到?

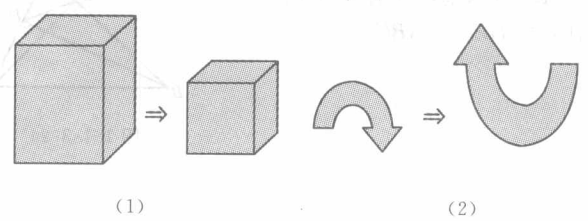


图 1-1-3-22

思维·误区·警示

1. 我们已经学过全等三角形, 两个全等三角形的大小、形状是完全一样的, 相似三角形是形状相同但大小不一样的三角形, 显然, 当两个相似三角形的相似比为 1 的时候, 相似三角形就成了全等三角形. 鉴于相似三角形和全等三角形的类似点, 在学习相似三角形的性质时可以类比全等三角形的性质来研究.
2. 研究相似三角形的性质的时候, 切记从相似比入手, 涉及到线段的比均等于相似比, 只有面积的比是相似比的平方.
3. 在三角形中有平行于一边的直线时, 通常考虑三角形相似, 利用比值获得线段的长或三角形的面积.
4. 位似变换是一种特殊的相似变换.

迁移应用与探究创新

自练·自查·自评

1. 下列命题中正确的是 ()
 - A. 有两边成比例及一个角相等的两个三角形相似
 - B. 有两边成比例的两个等腰三角形相似
 - C. 有三边分别对应平行的两个三角形相似
 - D. 有两边及一边上的高对应成比例的两个三角形相似
2. 有一块三角形铁片 ABC , 已知最长边 $BC=12$ cm, 高 $AD=8$ cm, 要把它加工成一个矩形铁片, 使矩形的一边在 BC 上, 其余两个顶点分别在 AB, AC 上, 且矩形的长是宽的 2 倍. 则加工成的铁片的面积为 ()

- A. 18 cm^2 或 $\frac{1}{49} \text{ cm}^2$ B. 20 cm^2 或 18 cm^2
 C. 16 cm^2 D. 15 cm^2
 3. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=9$, $AC=12$, $BC=18$, D 为 AC 上一点, $DC = \frac{2}{3}AC$, 在 AB 上取一点 E , 得到 $\triangle ADE$, 若 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 则 DE 的长为()
 A. 6 B. 8
 C. 6 或 8 D. 14
 4. 如图 1-1-3-23 所示, $\angle BAC = \angle DCB$, $\angle CDB = \angle ABC = 90^\circ$, $AC=a$, $BC=b$. 当 $BD=$ _____ 时, $\triangle ABC \sim \triangle CDB$.

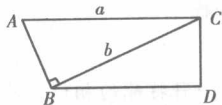


图 1-1-3-23

5. 如图 1-1-3-24 所示, $\triangle ABC$ 中, $BD \perp AC$, $CE \perp AB$, 垂足分别为 D 、 E .
 求证: $\angle ADE = \angle ABC$.

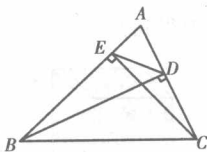


图 1-1-3-24

6. 如图 1-1-3-25 所示, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 、 BD 相交于 O , $AO=2 \text{ cm}$, $AC=8 \text{ cm}$ 且 $S_{\triangle BCD} = 6 \text{ cm}^2$, 求 $S_{\triangle AOD}$.

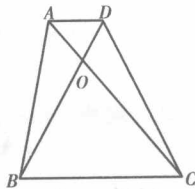


图 1-1-3-25

7. 如图 1-1-3-26 所示, 已知边长为 12 的正三角形 ABC , $DE \parallel BC$, $S_{\triangle BCD} : S_{\triangle BAC} = 4 : 9$, 求 EC 的长.

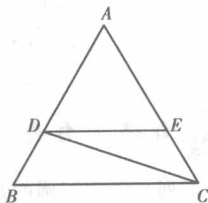


图 1-1-3-26

8. 如图 1-1-3-27 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 BC 上, $\angle BAC = \angle ADC$, $AC=8$, $BC=16$. 那么 CD 的长为多少?

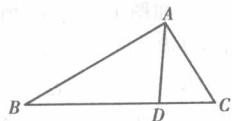


图 1-1-3-27

实践·探究·创新

1. 铁道口的栏杆短臂长 1 m, 长臂长 16 m, 当短臂端点下降 0.5 m 时, 长臂端点升高 ()
 A. 11.25 m B. 6.6 m
 C. 8 m D. 10.5 m
 2. 三角形的一条高分这个三角形为两个相似三角形, 则这个三角形是 ()

- A. 直角三角形
 B. 等腰三角形
 C. 等腰直角三角形
 D. 等腰三角形或直角三角形

3. 如图 1-1-3-28 所示, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 正方形 $DEFG$ 内接于 $\triangle ABC$, $DE \parallel AC$, $EF \parallel BC$, $AC=1$, $BC=2$, 则 $AF : FC$ 等于 ()

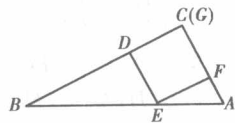


图 1-1-3-28

- A. 1 : 3 B. 1 : 4 C. 1 : 2 D. 2 : 3

4. 如图 1-1-3-29 所示, D 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的点, 过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E . 已知 $AD : DB = 1 : 3$, 则 $\triangle ADE$ 与四边形 $BCED$ 的面积比为 ()

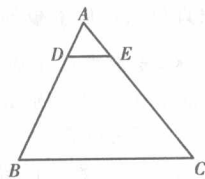


图 1-1-3-29

- A. 1 : 3 B. 1 : 9 C. 1 : 15 D. 1 : 16

5. 如图 1-1-3-30 所示, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=12$, $AD=10$, 将此矩形折叠使点 B 落在 AD 上的中点 E 处, 则折痕 FG 的长为 ()

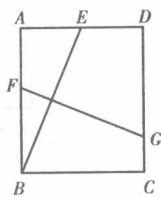
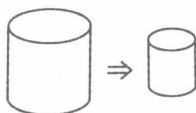


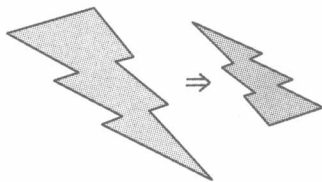
图 1-1-3-30

- A. 13 B. $\frac{63}{5}$
 C. $\frac{65}{6}$ D. $\frac{63}{6}$

6. 如图 1-1-3-31 中(1)是 _____ 变换, (2)是 _____ 变换



(1)



(2)

图 1-1-3-31

7. $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上一点, 且 $\angle BAC = \angle ADC$,

$BC = 16$ cm, $AC = 12$ cm, 则 $DC =$ _____ cm.

8. 如图 1-1-3-32, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 30^\circ$, 高 AD 、 BE 相交于点

H , 则 $\frac{BH}{AC}$ 的值等于 _____.

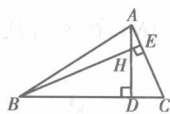


图 1-1-3-32

9. 如图 1-1-3-33, CD 平分 $\angle ACB$, EF 是

CD 的中垂线交 AB 的延长线于 E . 求证:

$$ED^2 = EB \cdot EA.$$

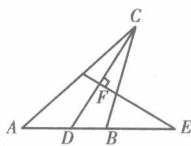


图 1-1-3-33

10. 如图 1-1-3-34 所示, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ$, $AB = 9$, $AC = 6$, $AD = 4$, $CE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F , 求 $CE : DF$ 的值.

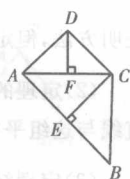


图 1-1-3-34

11. 如图 1-1-3-35, 已知 $\angle ACB = \angle ADE$, $\angle ABC = \angle AED$. 求证: $\angle ABE = \angle ACD$.

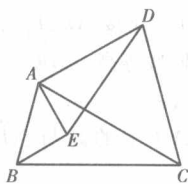


图 1-1-3-35

12. 某生活小区的居民筹集资金 1600 元, 计划在一块上、下两底分别为 10 m、20 m 的梯形空地上种植花木.

(1) 他们在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle BMC$ 地带种植太阳花, 单价 8 元/ m^2 . 当 $\triangle AMD$ 地带种满花后 (图 1-1-3-36 阴影部分), 共花了 160 元. 请计算种满 $\triangle BMC$ 地带所需的费用.

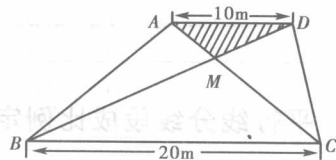


图 1-1-3-36

(2) 若其余地带要种的有玫瑰和茉莉花两种花木可供选择, 单价分别为 12 元/ m^2 和 10 元/ m^2 , 应选择哪种花木可以刚好用完所筹集的资金?

13. 如图 1-1-3-37, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 为直角, $\triangle DEF$ 中 $\angle F$ 为直角, $DE \perp AC$, 交 AC 于 G , 交 AB 于 H , $DF \perp AB$, 交 AB 于 I .

求证: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

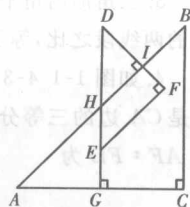


图 1-1-3-37

14. 证明: 两个相似三角形的内切圆的直径比、周长比等于相似比, 面积比等于相似比的平方.

已知: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似, $\odot O$ 和 $\odot O'$ 为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的内切圆, 相似比为 k .

求证: $\odot O$ 和 $\odot O'$ 的直径比为 k , 周长比为 k , 面积比为 k^2 .

自我评价

通过以上的学习,你肯定收获多多,或许也有一些疑惑,你能把它记在下面吗?

1.4 平行线分线段成比例定理

自主学习与知识构建

自主·预习·思考

1. 平行线分线段成比例定理

(1)定理的内容:三条平行线截两条直线,所得的对应线段

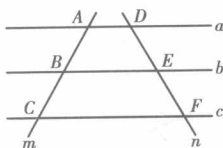


图 1-1-4-1

(2)符号语言表示:如图 1-1-4-1 所示,若 $a \parallel b \parallel c$,则

2. 平行线分线段成比例定理的推论

(1)推论的内容:平行于三角形一边的直线截其他两边(或两边的延长线),所得的对应线段

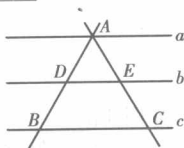


图 1-1-4-2

(2)符号语言表示:如图 1-1-4-2 所示,若 $a \parallel b \parallel c$,则

3. 三角形内角平分线,分这角的对边所成的两线段之比,等于

4. 如图 1-1-4-3,AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, E 是 CA 边的三等分点, BE 交 AD 于点 F, 则 AF:FD 为

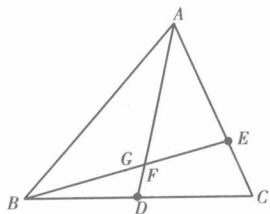


图 1-1-4-3

A. 2:1

B. 3:1

C. 4:1

D. 5:1

5. 如图 1-1-4-4,在 $\triangle ACE$ 中, B、D 分别在 AC、AE 上,下列推理不正确的是

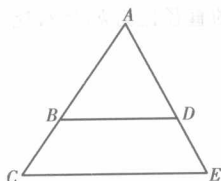


图 1-1-4-4

A. $BD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$

B. $BD \parallel CE \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$

C. $BD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$

D. $BD \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CE}$

6. 某同学的身高 1.60 米,由路灯下向前步行 4 米,发现自己的影子长 2 米,求这个路灯的高.

7. 如图 1-1-4-5 所示, $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $\angle AMB$ 的平分线交 AB 于 D, $\angle AMC$ 的平分线交 AC 于 E, 求证: $DE \parallel BC$

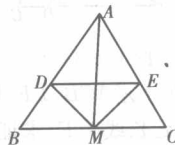


图 1-1-4-5

精要导学与方法策略

要点·剖析·突破

1. 平行线分线段成比例定理

定理:三条平行线截两条直线,所得的对应线段成比例,也称平行截割定理.

如图 1-1-4-6, $a \parallel b \parallel c$, m 交 a、b、c 于

点 A、B、C, n 交 a、b、c 于点 D、E、F, 则 $\frac{AB}{BC} =$

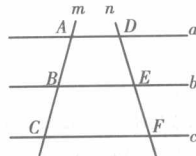


图 1-1-4-6

$\frac{DE}{EF}$.

(1)教材中给出 $\frac{AB}{BC}$ 为有理数时的一种

证明方法,但定理对于 $\frac{AB}{BC}$ 为实数时都实用.

(2)定理的条件需要一组平行线(至少三条),且至少要有两条直线与这组平行线相交.

(3)定理结论是“对应线段成比例”.因而除了有 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ 成立外,还有 $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$ 成立.

(4)定理的证明采用了面积法:

证明过程如下:

证明:如图 1-1-4-7 所示,三条平行线截两条直线有四种情况,其中 l_1, l_2, l_3 表示三条平行线,即 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, a、b 表示被它们所截的直线, A、B、C、D、E、F 为交点.

①对于图 1-1-4-7(1);连接 AE、DB、BF、EC, 由 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ 可知, $\triangle ABE$ 与 $\triangle DBE$ 同底等高, $\triangle BCE$ 与 $\triangle BFE$ 同底等高,

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DBE}, S_{\triangle BCE} = S_{\triangle BFE}.$$

又 $\triangle ABE$ 的边 AB 上的高与 $\triangle BCE$ 的边 BC 上的高相等,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BCE}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{同理 } \frac{S_{\triangle DBE}}{S_{\triangle BFE}} = \frac{DE}{EF}.$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

②对于 1-1-4-7(2),把直线 b 向右平移到 b' 的位置(如图 1-1-4-8 所示)则 $AE = GM$, $EF = MN$, 由 ① 可知 $\frac{AB}{BC} = \frac{GM}{MN}$, 所以

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EF}.$$