最优控制理论与应用

ZUIYOU KONGZHI LILUN YU YINGYONG

◎ 李国勇 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

最优控制理论与应用

李国勇　编著

国防工業出版社

·北京·

内容简介

本书对最优控制理论及应用进行了较全面的论述。全书共分6章,深入浅出地介绍了最优控制理论的基本知识和基本方法。主要内容包括最优化问题的基本概念、最优控制中的变分法、极大值原理、动态规划、线性二次型最优控制问题和倒立摆系统的最优控制。在每一章都列举了大量的应用实例及利用MATLAB对其实现的方法,使读者在有限的时间内,掌握最优控制的基本原理与应用技术。

本书可作为理工科高等院校自动化和机电工程等专业的研究生和高年级本科生的教材,也可作为从事相关专业的科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

最优控制理论与应用/李国勇编著.—北京:国防工业出版社,2008.10

ISBN 978-7-118-05894-9

Ⅰ.最... Ⅱ.李 Ⅲ.最佳控制-数学理论 Ⅳ.0232

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第119236号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

新艺印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 15¾ **字数** 365千字

2008年10月第1版第1次印刷 **印数** 1—4000册 **定价** 29.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422　发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535　发行业务:(010)68472764

前　言

随着现代科学技术与生产发展的需要以及计算机技术的飞速发展,最优控制理论的应用日益广泛,不仅在运筹学、系统工程、经济管理等领域内有重要意义,而且在实际工程设计和系统控制中得到了广泛的重视并取得了卓有成效的效果。本书从工程应用的角度出发,系统地介绍了最优控制理论,使读者对最优控制有较全面的了解和认识,并能正确运用最优控制去解决工程中的实际问题。

全书共分 6 章。第 1 章论述了最优控制理论基本概念及其常用的求解方法。第 2 章先介绍普通函数的极值问题,然后讨论变分法的基本概念和它在动态最优控制中的应用。第 3 章着重讲述了极大值原理及其应用。第 4 章介绍了动态规划、基于动态规划的微分对策问题以及动态规划与变分法和极大值原理的关系等。第 5 章讨论了线性二次型问题、状态调节器、输出调节器、输出跟踪器和线性二次型微分对策等。第 6 章讲述了倒立摆系统的最优控制求解方法。各章中都列举了大量的应用实例及利用 MATLAB 对其实现的方法,便于读者掌握和巩固所学知识。

本书由李国勇任主编。书中第 1 章至第 5 章及其附件由李国勇编写,第 6 章由马静和张慧编写。全书由李国勇整理定稿。

由于作者水平有限,书中难免有遗漏与不当之处,恳请广大读者批评指正。

编著者

2008 年 7 月

目　录

第1章 绪论

最优控制理论是现代控制理论的核心，控制理论的发展来源于控制对象的要求。近50年来，科学技术的迅速发展，对许多被控对象，如宇宙飞船、导弹、卫星和现代工业设备的生产过程等的性能提出了更高的要求，在许多情况下要求系统的某种性能指标为最优。这就要求人们对控制问题都必须从最优控制的角度去进行研究分析和设计。最优控制问题就其本质来说，乃是一变分学问题，而经典变分理论只能解决一类简单的最优控制问题。为了满足工程实践的需要，20世纪50年代中期，出现了现代变分理论，其中最常用的方法是极大值原理和动态规划，它们为最优控制问题做了奠基性的工作。最优控制在被控对象参数已知的情况下，已经成为设计复杂系统的有效方法之一。

1.1 最优控制的发展

20世纪50年代，随着生产的发展，特别是空间技术的发展，对自动控制所提出的要求愈来愈高，控制系统日趋复杂。于是，那种建立在传递函数、频率特性基础上的自动控制理论，即所谓经典控制理论，日益暴露出它的局限性。首先，传递函数只适用于处理集中参数的定常系统。用原来的传递函数方法、频率特性方法处理问题变得很复杂，以致难以应用。以解决伺服系统稳定性为主要目标的经典方法也无法适用按综合性能设计控制系统的要求。至于凭经验凑试及手工计算显然难以处理复杂问题。面对客观实际所提出的种种急待解决的理论问题，人们从问题的原始提法出发，更深入地讨论控制系统内在的规律性，这就导致从变化后的频率域回到原来的时间域，建立了以状态空间法为基础的现代控制理论。

现代控制理论所能处理的问题范围很广。理论上，它可以用来处理时变系统、非线性系统、多输入多输出系统以及分布参数系统的问题。用它来处理随机系统问题和离散系统问题同样是很方便的。

最优控制理论的形成与发展和整个现代自动控制理论的形成与发展是分不开的。在20世纪50年代初期，就有人开始发表从工程观点研究最短时间控制问题的文章，尽管其最优性的证明多半借助于几何图形，仅带有启发性质，但毕竟为发展现代控制理论提供了第一批实际模型。由于最优控制问题的引人注目的严格表述形式，特别是空间技术的迫切需要，从而吸引了大批数学家的密切注意。经典变分理论只能解决一类简单的最优控制问题，因为它只对无约束或开集性约束是有效的。而实际上碰得更多的却是容许控制属于闭集的一类最优控制问题，这就要求人们去探索、求解最优控制问题的新途径。在种种新方法中，有两种方法最富成效：一种是苏联学者庞特里亚金(Л.С.Понтрягин)的“极大值原理”；另一类是美国学者贝尔曼(R. E. Bellman)的“动态规划”。受力

学中哈密顿(Hamilton)原理的启发，庞特里亚金等人把“极大值原理”作为一种推测首先推出来，随后不久又提供了一种严格的证明，并于1958年在爱丁堡召开的国际数学会议上首先宣读。“极大值原理”发展了经典变分原理，成为处理闭集性约束变分问题的强有力工具。“动态规划”是贝尔曼在1953年—1957年逐步创立的。它依据最优性原理，发展了变分学中的哈密顿——雅可比理论，构成了“动态规划”。它是一种适用于计算机计算，处理问题范围更广的方法。在现代控制理论的形成与发展中，极大值原理、动态规划和卡尔曼(R. E. Kalman)的最优估计理论都起过重要的推动作用。

现代控制理论的形成与发展和数字计算机的飞速发展和广泛应用密不可分。作为经典控制理论技术基础的模拟技术，由于运算精度及运算功能上的限制，已经逐渐被高速电子计算机所代替。由于运算速度的提高、存储容量的扩大、体积的缩小以及软件的广泛采用，计算机不仅是控制系统分析与设计的强有力工具，并且逐渐成为自动控制的主要技术工具之一。由于计算机“在线”参与控制，这样，既不要求把控制器归结为简单的校正网络，也不一定要求有封闭形式的解析解，因此，使得最优控制的工程实现有了可能。反过来又提出了许多新的理论问题，导致诸如最优控制的直接和间接计算方法的大批研究成果的出现，进一步推动了控制理论的发展。

50多年来，现代控制工程和现代控制理论吸收现代技术进步和现代数学发展的一切成就，又得到了很大发展，并渗透到生产、生活、国防乃至规划、管理等一切领域，发挥愈来愈大的作用。在此期间最优控制也有很大发展，如分布参数的最优控制、随机最优控制、自适应控制、大系统的最优控制和微分对策等，其中有大量的工程和理论问题尚待解决。可以毫不夸张地说，最优控制仍是一个十分活跃的研究领域。

1.2 最优控制问题及其提法

1.2.1 最优控制问题

最优控制是一门工程背景很强的学科分支，其研究的问题都是从大量实际问题中提炼出来的，它尤其与航空、航天、航海的制导、导航和控制技术密不可分，如飞船的月球软着陆问题。

飞船靠其发动机产生与月球重力方向相反的推力$f(t)$，实现软着陆(落到月球上时速度为零)。问题要求选择最好发动机推力程序$f(t)$，使燃料消耗最少。

设飞船质量为$m(t)$，它的高度和垂直速度分别为$h(t)$和$v(t)$，月球的重力加速度可视为常数g，飞船自身质量及所带燃料质量分别是M和$m(t)$。

飞船自某一时间t=0时刻开始进入着陆过程，其运动方程为

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \dfrac{f(t)}{m(t)} - g \\ \dot{m}(t) = -kf(t) \end{cases} \tag{1-1}$$

式中：k是一常数。

要求控制飞船从初始状态

$$\dot{h}(0)=h_0,\quad v(0)=v_0,\quad m(0)=M+F(0) \tag{1-2}$$

出发，在某一终端 t_f 时刻实现软着陆，即

$$h(t_f)=0,\quad v(t_f)=0 \tag{1-3}$$

控制过程中推力 $f(t)$ 不能超过发动机所能提供的最大推力 f_{max}，即

$$0\leqslant f(t)\leqslant f_{max} \tag{1-4}$$

满足上述约束，使飞船实现软着陆的推力程序 $f(t)$ 不止一种，其中燃料消耗最少的才是问题所要求的最好推力程序，即问题可归纳为求

$$J=m(t_f) \tag{1-5}$$

最大的数学问题。

最优控制任务就是系统式(1-1)，在满足式(1-4)的推力约束条件下，寻求发动机推力的最优变化律 $f^*(t)$，使飞船由已知初态转移到要求的终端状态，并使性能指标 $J=m(t_f)=\max$，从而使飞船软着陆过程中燃料消耗量最小。

通过对飞船的燃耗最优控制的分析可知，凡属最优控制问题的数学描述，应包含以下几方面的内容。

1. 受控系统的数学模型

受控系统的数学模型即系统的微分方程，它反映了动态系统在运动过程中所应遵循的物理或化学规律。在集中参数情况下，动态系统的运动规律可以用一组一阶常微分方程即状态方程来描述，即

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \tag{1-6}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)$ 表示 n 维状态向量；$\boldsymbol{u}(t)$ 表示为r维控制向量；$\boldsymbol{f}(\cdot)$ 是 $x(t)$、$u(t)$ 和 t 的 n 维函数向量；t 是实数自变量。

式(1-6)不仅能概括式(1-1)所属飞船的方程，而且可以概括一切具有集中参数的受控系统数学模型。如定常非线性系统、线性时变系统和线性定常系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)]$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

都是式(1-6)系统的一种特例。

2. 边界条件与目标集

动态系统的运动过程是系统从状态空间的一个状态到另一个状态的转移，其运动轨迹在状态空间中形成曲线 $x(t)$。为了确定要求的曲线 $x(t)$，需要确定曲线的两点边界值如式(1-2)和式(1-3)。因此，要求确定初始状态 $x(t_0)$ 和终端状态 $x(t_f)$，这是求解状态方程式(1-6)必需的边界条件。

在最优控制问题中，初始时刻 t_0 和初始状态 $x(t_0)$ 通常是已知的，但是终端时刻 t_f 和终端状态 $x(t_f)$ 可以固定，也可以自由。

一般地说，对终端的要求可以用如下的终端等式或不等式约束条件来表示，即

$$\begin{cases} N_1[x(t_f),t_f]=0 \\ N_2[x(t_f),t_f]\leqslant 0 \end{cases} \tag{1-7}$$

它们概括了对终端的一般要求。实际上，终端约束规定了状态空间的一个时变或非时变的集合，此种满足终端约束的状态集合称为目标集M，并可表示为

$$M=\{x(t_f):x(t_f)\in R^n, N_1[x(t_f),t_f]=0, N_2=[x(t_f),t_f]\leqslant 0\}$$

为简单起见，有时终端约束式(1-7)称为目标集。

3. 容许控制

控制向量$u(t)$的各个分量$u_i(t)$往往是具有不同物理属性的控制量。在实际控制问题中，大多数控制量受客观条件限制只能取值于一定范围，如式(1-4)。这种限制范围，通常可用约束条件

$$0\leqslant u(t)\leqslant u_{\max} \tag{1-8}$$

或

$$|u_i|\leqslant m_i\ ,\quad i=1,2,\cdots,r \tag{1-9}$$

来表示。

式(1-9)表示一个控制空间R^r中包括原点在内的超方体，式(1-8)和式(1-9)都规定了R^r空间中的一个闭集。

由控制约束条件所规定的点集称为控制域，并记为R_u。凡在闭区间$[t_0,t_f]$上有定义，且在控制域R_u内取值的每一个控制函数$u(t)$均称为容许控制，并记为$u(t)\in R_u$。

通常假定容许控制$u(t)\in R_u$是一有界连续函数或分段连续函数。

需要指出，控制域为开集或为闭集，其处理方法有很大差别。后者的处理较难，结果也很复杂。

4. 性能指标

从给定初始状态$x(t_0)$到目标集M的转移可通过不同的控制律$u(t)$来实现，为了在各种可行的控制律中找出一种效果最好的控制，这就需要首先建立一种评价控制效果好坏或控制品质优劣的性能指标函数。性能指标的内容与形式，取决于最优控制问题所完成的任务。不同的最优控制问题，有不同的性能指标，即使是同一问题其性能指标也可能不同。尽管不能为各种各样的最优控制问题规定一个性能指标的统一格式，但是通常情况下，对连续系统时间函数性能指标已可以归纳为以下三种类型。

1) 综合型或波尔扎(Bolza)型性能指标

设综合型或波尔扎型性能指标为

$$J[u(\cdot)]=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),u(t),t]\mathrm{d}t \tag{1-10}$$

式中：L为标量函数，它是向量$x(t)$和$u(t)$的函数，称为动态性能指标；Φ为标量函数，与终端时间t_f及终端状态$x(t_f)$有关，$\Phi[x(t_f),t_f]$称为终端性能指标；J为标量，对每个控制函数都有一个对应值；$u(\cdot)$表示控制函数整体，而$u(t)$表示t时刻的控制向量。

式(1-10)类型的性能指标称为综合型或波尔扎问题，它可以用来描述具有终端约束下的最小积分控制，或在积分约束下的终端最小时间控制。

2) 积分型或拉格朗日(Lagrange)型性能指标

若不计终端性能指标，则式(1-10)成为

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)]=\int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\mathrm{d}t \tag{1-11}$$

这时的性能指标称为积分型或拉格朗日问题，它更强调系统的过程要求。在自动控制中，要求调节过程的某种积分评价为最小(或最大)就属于这一类问题。

3) 终端型或麦耶尔(Mager)型性能指标

若不计动态性能指标，式(1-10)成为如下形式：

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)]=\Phi[\boldsymbol{x}(t_f),t_f] \tag{1-12}$$

这时的性能指标称为终端或麦耶尔问题。这要求找出使终端的某一函数为最小(或最大)值的 $\boldsymbol{u}(t)$，终端处某些变量的最终值不是预先规定的。

以上讨论表明，所有最优控制可以用上述三种类型的性能指标之一来表示，而综合性问题是更普遍的情况。通过一些简单的数学处理，即引入适合的辅助变量，它们三者可以互相转换。

综上所述，性能指标与系统所受的控制作用和系统的状态有关，但是它不仅取决于某个固定时刻的控制变量和状态变量，而且与状态转移过程中的控制向量 $\boldsymbol{u}(t)$ 和状态曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 有关，因此性能指标是一个泛函。

1.2.2 最优控制的含义

最优控制，就是将通常的最优控制问题抽象成一个数学问题，并用数学语言严格地表示出来。最优控制可分为静态最优和动态最优两类。

静态最优是指在稳定工况下实现最优，它反映系统达到稳态后的静态关系。系统中各变量不随时间变化，而只表示对象在稳定工况下各参数之间的关系，其特性用代数方程来描述。大多数的生产过程受控对象可以用静态最优控制来处理，并且具有足够的精度。

静态最优控制一般可用一个目标函数 $J=f(x)$ 和若干个等式约束条件或不等式约束条件来描述。要求在满足约束条件下，使目标函数J为最大或最小。

动态最优是指系统从一个工况变化到另一个工况的变化过程中，应满足最优要求。在动态系统中，所有的参数都是时间的函数，其特性可用微分方程或差分方程来描述。动态最优控制要求寻找出控制作用的一个或一组函数而不是一个或一组数值，使性能指标在满足约束条件下为最优值。这样，目标函数不再是一般函数，而是函数的函数。因此，在数学上这是属于泛函求极值的问题。

根据以上最优控制问题的基本组成部分，动态最优控制问题的数学描述为：在一定的约束条件下，受控系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t] \tag{1-13}$$

和使目标函数

$$J[\boldsymbol{u}(\cdot)]=\Phi[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f} L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\mathrm{d}t \tag{1-14}$$

为最小的最优控制向量 $\boldsymbol{u}^*(t)$。

1.2.3 最优控制的求解方法

最优控制研究的主要问题是根据建立的被控对象的数学模型，选择一个容许的控制律，使得被控对象按预定要求运行，并使给定的某一性能指标达到极小值(或极大值)。

静态最优问题的目标函数是一个多元普通函数，求解静态最优控制问题经常采用经典微分法、线性规划、分割法(优选法)和插值法等。

动态最优问题的目标函数是一个泛函，求解动态最优控制问题常用的方法有经典变分法、极大(极小)值原理、动态规划和线性二次型最优控制法等。对于动态系统，当控制无约束时，采用经典微分法或经典变分法；当控制有约束时，采用极大值原理或动态规划；如果系统是线性的，性能指标是二次型形式的，则可采用线性二次型最优控制问题求解。

应当指出，在求解动态最优问题中，若将时域$[t_0,t_f]$分成许多有限区域段，在每一分段内，将变量近似看做常量，那么动态最优化问题可近似按分段静态最优化问题处理，这就是离散时间最优化问题。显然分段越多，近似的精确程度越多。所以，静态最优和动态最优问题不是截然分立，毫无联系的。

最优控制问题也可以分为确定性和随机性两大类。在确定性问题中，没有随机变量，系统的参数都是确定的。本书仅介绍确定性最优控制问题。

本书的学习内容包括最优控制的基本概念、静态最优控制的解、最优控制中的变分法、极大值原理、动态规划以及线性二次型最优控制问题。

本 章 小 结

本章简要介绍了最优控制的基本概念。所谓最优控制，就是寻找一个最优控制方案或最优控制规律，使所研究的对象(或系统)能最优地达到预期的目标。

最优控制一般可分为动态最优和静态最优控制两类。静态最优控制也称为参数最优化问题，动态最优控制也简称为最优控制。

解决最优控制问题则采用经典变分法、极大(极小)值原理、动态规划和线性二次型最优控制法等。

第2章 最优控制中的变分法

在动态最优控制中，由于目标函数是一个泛函数，因此求解动态最优化问题可归结为求泛函极值。变分法是研究泛函极值的一种经典方法，它与数学物理中的许多问题有着密切的联系。从17世纪末开始，经典变分法逐渐发展成为一门独立的数学分支，并早就应用于经典力学、空气动力学、光学和电磁理论等方面。目前，在控制理论方面有着广泛的应用。

因为泛函的极值问题与普通函数的极值问题在处理途径和概念上有一定的联系，且静态最优问题的目标函数是一个多元普通函数，其最优解也可以通过经典微分法对普通函数求极值的途径解决，因此为了便于学习，本章先介绍普通函数的极值问题，然后再讲变分法的基本概念和它在动态最优控制中的应用。关于静态最优控制问题的其他求解方法，如线性规划、分割法(优选法)和插值法等，本书不予介绍，具体内容可参考其他有关书籍。

2.1 静态最优控制的解

2.1.1 一元函数的极值

设连续可微一元函数 $y=f(x)$ 在定义区间 $[a,b]$ 有极值，则函数在 x_0 处可导，并在 x_0 处存在极值的必要条件为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(x)\big|_{x=x_0}=0 \tag{2-1}$$

反之，$f'(x)=0$ 点不一定是函数的极小值点或极大值点，而可能是拐点。因此，函数 $f(x)$ 在 x_0 处为极小值点的充分必要条件为

$$f'(x)\big|_{x=x_0}=0，\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}=f''(x_0)>0$$

而函数 $f(x)$ 在 x_0 处为极大值点的充分必要条件为

$$f'(x)\big|_{x=x_0}=0，\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}=f''(x_0)<0$$

如果 $f''(x_0)=0$，则还要从 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的变化情况，来判别 x_0 是极小值点、极大值点还是拐点。

例 2-1 试求函数 $y=3x-x^3$ 的极值。

解 由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，得

$$y'' = 3 - 3x^2 = 3(1+x)(1-x) = 0$$

由此可见，当 $x = 1$ 或 $x = -1$ 时可能出现极值。

因

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = y''(x) = -6x$$

故当 $x = 1$ 时，$y'' < 0$，y 出现极大值 $y_{\max} = 2$；$x = -1$ 时，$y'' > 0$，y 出现极小值 $y_{\min} = -2$。

对于以上问题也可以采用 MATLAB 求解。在 MATLAB 中，提供了两个基于单纯形算法求解多元函数极小值的函数 fmins( )(仅适用于 MATLAB6.5 及以前的版本)和 fminsearch( )，以及一个基于拟牛顿法求解多元函数极小值的函数 fminunc( )，其调用格式分别为

```
x=fmins(fun, x0,options)
x=fminsearch(fun, x0,options)
x=fminunc(fun, x0,options)
```

式中：fun 表示函数名；x0 表示函数的初值，其大小往往能决定最后解的精度和收敛速度；x 为所求极小值点；选项 options 是由一些控制变量构成的向量，例如，它的第一个分量不为 0 表示在求解时显示整个动态过程(其默认值为 0)，第二个分量表示求解的精度(默认值为 1e−4)，可以指定这些参数来控制求解的条件。

针对例 2-1 问题，首先根据给定函数编写以下 MATLAB 函数文件 myfunex2_1_1.m。

```
%ex2_1_1.m
function y=ex2_1_1(x)
y=3*x-x^3;
```

然后根据下面的极小值命令来求该函数的极小值和极小值点 x。

```
>>x=fmins('ex2_1_1',0),ymin=ex2_1_1(x)
```

结果显示：

```
x =
  -1.0000
ymin =
   -2
```

结果表明，函数在 x=−1 时有极小值 ymin=−2。

以上函数的极值问题，也可直接利用以下命令得到与上面相同的结果。

```
>>f='3*x-x^3',x=fmins(f,0), ymin=3*x-x^3
```

因为函数 $f(x)$ 的极小值问题等价于函数 $-f(x)$ 的极大值问题，所以，利用函数 fmins( )也可用来求解函数 $f(x)$ 的极大值，这时只需在所求函数前加负号即可。求函数 $f(x) = 3x - x^3$ 的最大值，可利用以下命令：

```
>>f='-(3*x-x^3)',x=fminsearch(f,0), ymax=3*x-x^3
```

运行结果：

```
x =
      1.0000
ymax=
```

    2

结果表明，函数在 x=1 时有极大值 ymax=2。

在 MATLAB 中的符号数学工具箱中，符号表达式是代表数字、函数和变量的 MATLAB 字符串或字符串数组，它不要求变量要有预先确定的值。其中，符号微分由函数 diff( )来实现，符号极限由函数 limit( )来实现，符号代数线性方程由函数 solve( )来实现。它们的调用格式如下：

```
diff(f)                    %符号表达式 f 对独立变量求微分
diff(f,n)                  %符号表达式 f 对独立变量求 n 次微分
diff(f,'x')                %符号表达式 f 对变量 x 求微分
diff(f,'x',n)              %符号表达式 f 对变量 x 求 n 次微分
limit(f,x,a)               %符号表达式 f 对变量 x 趋于 a 时的极值
limit(f,a)                 %符号表达式 f 对独立变量趋于 a 时的极值
solve(f,'x')               %对符号代数线性方程 f=0 求变量 x 的解
solve(f)                   %对符号代数线性方程 f=0 求独立变量的解
```

针对例 2-1 的函数极值也可利用 MATLAB 中的符号函数来实现，其 MATLAB 程序如下。

```
%ex2_1_2.m
clear
f='3*x-x^3';               %利用单引号来生成符号表达式 f
df=diff(f,'x');            %符号表达式 f 对变量 x 求微分，得符号表达式 df
x=solve(df,'x')            %对符号代数线性方程 df=0 求变量 x 的解
fmax=limit(f,x(1))         %对符号表达式 f 求独立变量趋于 x(1)时的极值
fmin=limit(f,x(2))         %对符号表达式 f 求独立变量趋于 x(2)时的极值
```

结果显示：

```
x =
   [ 1]
   [ -1]
fmax =
   2
fmin =
   -2
```

同样可得函数的极大值为 2，极大值点为 $x=1$；函数的极小值为-2，极小值点为 $x=-1$。

例 2-2　对边长为 a 的正方形铁板，在四个角处去掉相等的正方形，如图 2-1 所示，折起各边以制成容积最大的方形无盖水槽，试求所截去的小正方形的边长。

解　设减去的正方形边长为 x，则正方形箱底的边长为 $(a-2x)$，方形无盖水槽的容积为

$$f(x)=(a-2x)^2 x$$

令

$$f'(x)=2(a-2x)\cdot(-2)\cdot x+(a-2x)^2=(a-2x)(a-6x)=0$$

由此可见，当

$$x_1=\frac{1}{2}a,\quad x_2=\frac{1}{6}a$$

时可能出现极值。

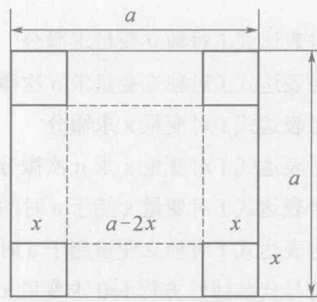

图 2-1　无盖水槽示意图

显然 x_1 不合实际意义，因若去 4 个边长为 $\frac{1}{2}a$ 的正方形相当于将铁板全部截去。现来判定 x_2 是否为极大值点。因为 $f''(x)=24x-8a$，将 x_2 代入得 $f''\left(\frac{a}{6}\right)=-4a<0$，说明 $x_2=\frac{1}{6}a$ 是极大值点，且极大值为

$$f(x)_{\max}=\left[a-2\left(\frac{a}{6}\right)\right]^2\frac{a}{6}=\frac{2}{27}a^3$$

对于例 2-2 所示的问题，也可以采用 MATLAB 的以上符号微分函数求解，其 MATLAB 程序如下。

```
%ex2_2.m
f='(a-2*x)^2*x';                 %利用单引号生成符号表达式 f
df=diff(f,'x');                  %符号表达式 f 对变量 x 求微分，得符号表达式 df
x=solve(df,'x')                  %对符号代数线性方程 df=0 求变量 x 的解
fmax=limit(f,x(1))               %对符号表达式 f 求独立变量趋于 x(1)时的极值
```

结果显示：

```
x =
   [ 1/6*a]
   [ 1/2*a]
fmax =
   2/27*a^3
```

本例符号表达式 $f(x)=(a-2x)^2x$，在 MATLAB 中除利用以上单引号生成外，还可利用函数 sym( )和命令 syms 来生成，即

```
>>f=sym('(a-2*x)^2*x');
```