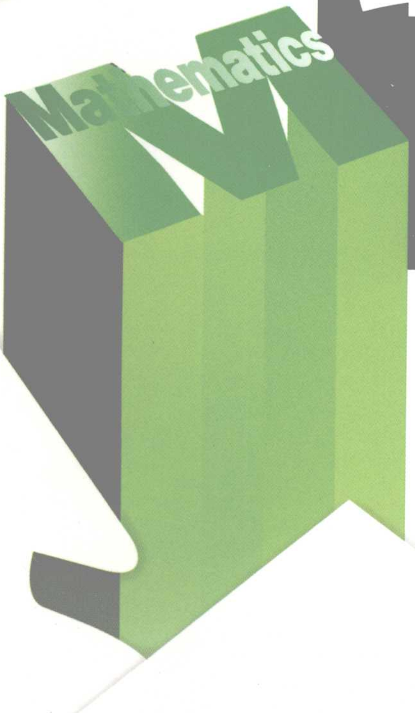
安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

高职高专基础课教材

Jingji shuxue yingyong jichu

经济数学应用基础



杨文兰◎主　编

汪　伟
程善明◎副主编

A·P·G 安徽人民出版社
安徽出版集团 ANHUI PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

安徽省高等学校“十一五”省级规划教材

高职高专基础课教材

经济数学应用基础

主　编：杨文兰

副主编：汪　伟　程善明

A·P·G 安徽人民出版社
安徽出版集团 ANHUI PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

选题策划：杜国新
责任编辑：张　旻　洪　红
装帧设计：钱志刚

图书在版编目(CIP)数据

经济数学应用基础 /杨文兰主编—合肥：安徽人民出版社，2008.8

ISBN 978-7-212-03307-1

Ⅰ.经...　Ⅱ.杨...　Ⅲ.经济数学—高等学校—教材　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 089422 号

经济数学应用基础

杨文兰　主编

汪　伟　程善明　副主编

出版发行：安徽人民出版社
地　　址：合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场　邮编：230071
发 行 部：0551-3533258　0551-3533292(传真)
编 辑 室：0551-3533270　0551-3533273
经　　销：新华书店
制　　版：合肥市中旭制版有限责任公司
印　　刷：合肥瑞丰印务有限公司
开　　本：787×960　1/16　印张：13.25　字数：270 千
版　　次：2008 年 8 月第 1 版　2008 年 8 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-212-03307-1
定　　价：23.00 元

前　言

随着经济的迅速发展，量化分析被越来越广泛地运用于经济与管理科学，并正在显著地促进金融业、服务业、制造业、营销业和咨询业的商务运作模式的改变，显示了数学应用的魅力. 近年来，我们为了使数学教学更加符合高等职业教育的培养目标，体现职业教育鲜明的应用性特色，适应高职学生的特点，进行了课程体系和教学方式的改革和探索，在此基础上编写了这本《经济数学应用基础》.

本教材分线性代数、函数与极限、导数及其应用、积分、概率统计初步五章，涵盖了高职经济和管理专业主要课程所需的数学内容且力求体现如下特色：

第一，全书在科学性的基础上，力争跳出传统数学理论体系的约束，对一元函数的微分与积分、多元函数的微分、线性代数的编写方式进行大胆的改革与创新，贯彻“必须、够用为度”的原则，实现数学教学与专业教学的衔接，体现数学知识的应用性.

第二，较好地突现“以应用为核心”的培养目标，本书力争以经济和管理中的实际案例驱动数学内容的编写，围绕专业学习与实践的需要整合数学教学内容，每一章前有与本章内容相关的经济问题，通过问题引入数学概念与内容，每一章后有知识应用链接与问题思考，促进学生会用数学工具分析、预测、决策简单的经济问题。

第三，突出学生的主体地位，每一章节都给出了学生的学习目标，便于学生自学与评估。

第四，弱化了复杂及技巧性较高的数学计算内容，引入了语言简洁、交互性较好、易于掌握的 *MATLAB* 数学软件知识，希望学生掌握这一门功能强大的数学计算工具，能用它处理较为复杂的数学计算。

本教材由杨文兰任主编，参与编写的人员有安徽商贸职业技术学院叶迎春（第一章及数学实验（一）—（五））、安徽工贸职业技术学院汪伟（第二章）、安徽国际商务职业技术学院崔跃林（第三章）、安徽商贸职业技术学院程善明（第四章）、安徽商贸职业技术学院杨文兰（第五章及每章的知识应用链接）。

由于编者水平有限，时间仓促，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　　者

2008 年 4 月

目录

Contents

第一章 线性代数

学习目标

1. 了解矩阵及阶梯矩阵的概念，掌握矩阵的运算法则；
2. 掌握逆矩阵、矩阵秩的求法及矩阵的初等行变换；
3. 会用矩阵的初等行变换求出线性方程组的全部解.

【经济问题 1－1】

你知道 A、B、C 三家公司本年投资收益是多少吗

假设 A、B、C 三家股份公司交叉持股(如图 1－1 所示)，即：A 公司持有 B 公司 24% 的股份，B 公司持有 C 公司 35% 的股份，C 公司持有 A 公司的 25% 的股份，C 公司持有 B 公司 22% 的股份，B 公司持有 A 公司的 20% 的股份. 若已知 2007 年 A、B、C 三家公司独立的营业净利润(税后) 分别为 100 万、85 万、60 万. 试求各公司本年投资收益与本年净利润.(本年净利润 ＝ 营业净利润 ＋ 投资收益)

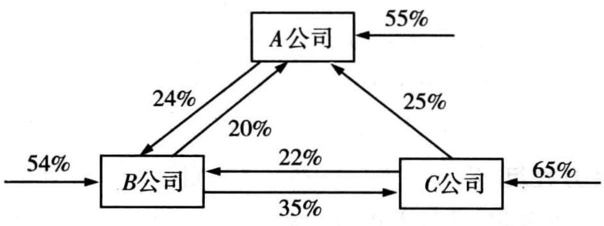


图 1－1

第一节　n 元线性方程组与矩阵

一、n 元线性方程组

公司间相互持股是我国公司改制实现股权多元化的一种有益的形式,【经济问题 1－1】就是一个双向交叉循环相互持股的公司投资收益问题. 根据我国相关法律规定:

投资企业的投资收益 = 被投资单位的当年实现的净利润 × 投资企业的股权

因此,设 x_1、x_2、x_3 分别为 A、B、C 公司的本年度投资收益,则各公司的本年投资收益由下列方程求解得到:

$$\begin{cases} x_1 = (850000 + x_2)0.24 \\ x_2 = (1000000 + x_1)0.2 + (600000 + x_3)0.35 \\ x_3 = (1000000 + x_1)0.25 + (850000 + x_2)0.22 \end{cases}$$

整理得:

$$\begin{cases} x_1 - 0.24x_2 = 204000 \\ -0.20x_1 + x_2 - 0.35x_3 = 410000 \\ -0.25x_1 - 0.22x_2 + x_3 = 437000 \end{cases}$$

称这个方程组为**三元线性方程组**. 在经济预测、决策时,我们也常常遇到类似【经济问题 1－1】的问题,最终归结为线性方程组解的问题.

一般地,设有 m 个方程,n 个未知元组成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 **n 元线性方程组**. 若 $b_1 = b_2 = \cdots b_m = 0$,则称方程组为**齐次线性方程组**,否则,称为**非齐次线性方程组**. 满足方程组的数组 $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $\cdots$, $x_n = c_n$ 称为方程组的**特解**,若方程组有不止一个解,则称所有解的共同表达式为**通解**. 若两个方程组有相同的非空解集合,则称两个方程组为**同解方程组**.

对 n 元线性方程组的求解,我们常采用消元法.

例 1　解线性方程组$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 = -3 \\ -3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$.

解　将第二个方程与第一个方程互换，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ -3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases},$$

用 -2 乘以第一个方程的两端后加到第二个方程上去，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases},$$

第二步，用 3 乘以第二个方程的两端后加到第三个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_3 = 16 \end{cases},$$

第三步，用$\frac{1}{2}$乘以第三个方程的两端，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_3 = 8 \end{cases},$$

将第三个方程加到第二个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 8 \end{cases},$$

最后，将第二个方程加到第一个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 8 \end{cases}.$$

分析上述求解过程，我们对方程组施行了一系列的变换，这些变换包括：

(1) 互换两个方程的位置；

(2) 用一个非零的数乘某个方程的两端；

(3) 用一个数乘一个方程后加到另一个方程上.

上述三种变换称为线性方程组的**初等变换**.

定理 1.1 线性方程组与其经过初等变换后得到的新的线性方程组是同解方程组.

二、矩阵

从上例的消元法求解线性方程组的过程可以看出，对方程组施行初等变换，实质上只与未知数的系数有关，而与未知数无关. 因此，可以将未知数略去不写，只将未知数系数按照原来的顺序关系排成一张数表，对这张数表施行上述三种变换即可. 为此，引入矩阵概念.

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 阶**矩阵**.

其中 m 为矩阵的**行数**，n 为矩阵的**列数**，a_{ij} 称为位于矩阵第 i 行、第 j 列的**元素**，i 是行标，j 是列标. 习惯上，矩阵常用大写字母 A,B,C 或 $A_{m\times n},B_{m\times n},C_{m\times n}$ 等表示. 有时，为了方便，我们把它简记成：$(a_{ij})_{m\times n}$.

将 $\boldsymbol{n}$ 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的系数按原来的顺序排列构成的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组的**系数矩阵**；

由方程组的系数及常数项构成的矩阵

$$\overline{A}=(A,b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为线性方程组的**增广矩阵**.

例 2　【经济问题 1－1】所对应的三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-0.24x_2 = 204000 \\ -0.20x_1+x_2-0.35x_3=410000 \\ -0.25x_1-0.22x_2+x_3=437000 \end{cases}$$

的系数矩阵与增广矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.24 & 0 \\ -0.2 & 1 & -0.35 \\ -0.25 & -0.22 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -0.24 & 0 & 204000 \\ -0.2 & 1 & -0.35 & 410000 \\ -0.25 & -0.22 & 1 & 437000 \end{pmatrix},$$

其中系数矩阵称为三阶方阵.

一般地,行数、列数都是 n 的矩阵,称为 **n 阶方阵**,简称**方阵**. n 阶方阵中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**,右上角到左下角的对角线称为**次对角线**.

一般地,只有一行(列) 的矩阵称为**行(列) 矩阵**;特别:只有一个元素的矩阵称为**单元素矩阵**,记作(a). 形如$(1\quad 0\quad 5\quad -2)$ 的矩阵称为一行四列的矩阵,简称行矩阵. 而形如$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$的矩阵称为三行一列的矩阵,简称列矩阵.

在实际问题中,还会遇到以下几种特殊类型的矩阵:

(1) **零矩阵**:所有元素均为零的矩阵称为零矩阵,记作 O 或 $O_{m\times n}$;

(2) **单位矩阵**:主对角线上元素全为 1,其余元素全为零的方阵称为单位矩阵,一般用 E 或 E_n 表示;如

$$E_1=1, E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(3) **对称矩阵**:关于主对角线对称的元素相等的方阵称为对称矩阵;如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(4) **反对称矩阵**:关于主对角线对称的元素互为相反数,且主对角线上的元素为 0 的方阵称为反对称矩阵;如

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(5) **转置矩阵**:设矩阵 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 阶矩阵,把矩阵 A 的行与列按顺序互换后得到的 $n\times m$ 阶矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$,称为矩阵 A 的转置矩阵,记作 A^T.

例如,$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}^T=(6\quad 10\quad 2)$.

一般地,已知 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,则 $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

显然 $(A^T)^T=A$.

定理 1.2　A 为对称矩阵的充要条件是 $A^T=A$;A 为反对称矩阵的充要条件是 $A^T=-A$.

三、矩阵的初等变换与秩

前面我们提到了线性方程组的初等变换,则由方程组的系数及常数项构成的增广矩阵也具有相应的初等变换.我们首先通过一个熟悉的线性方程组的求解来说明矩阵的初等变换.

例 3　解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ x_1+2x_2=-1 \end{cases}$.

解　用消元法解线性方程组时,观察同解的线性方程组之间对应的增广矩阵的变化情况:

线性方程组	消元过程	增广矩阵	初等行变换过程
$\begin{cases} 2x_1+x_2=1 \\ x_1+2x_2=-1 \end{cases}$	将第 1 个方程与第 2 个方程互换	$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	将 $\overline{A}$ 的第 1 行与第 2 行互换
$\Rightarrow\begin{cases} x_1+2x_2=-1 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$	第 1 个方程乘数 (-2) 加到第 2 个方程	$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	将第 1 行乘数 (-2) 加到第 2 行

$\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=-1\\ \quad -3x_2=3\end{cases}$	第 2 个方程乘数$\left(-\frac{1}{3}\right)$	$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}$	第 2 行乘数$\left(-\frac{1}{3}\right)$
$\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=-1\\ \quad x_2=-1\end{cases}$	第 2 个方程乘数(-2)加到第 1 个方程	$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$	将第 2 行乘数(-2)加到第 1 行
$\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ \quad x_2=-1\end{cases}$		$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$	

由此得线性方程组的解为 $x_1=1, x_2=-1$.

分析可见,以上线性方程组的初等变换也就是对增广矩阵施行相应的变换,我们有:

定义 1.2 矩阵的初等行变换:

(1) 换行变换:矩阵某两行(列)互换位置,记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;

(2) 倍乘变换:以非零数 k 乘矩阵某一行(列)的所有元素,记作 $kr_i(kc_i)$;

(3) 倍加变换:把矩阵某一行(列)所有的元素乘同一数加到另一行(列)对应的元素上去,记作 $kr_i+r_j(kc_i+c_j)$.

定义 1.3 矩阵中每一行第一个非零元素(称为该行的首非零元)必在上一行首非零元的右下方,称该矩阵为**阶梯形矩阵**,简称**阶梯矩阵**.

如果阶梯矩阵非零行的首非零元素都是 1,并且这一列的其余元素都是零,那么该矩阵被称为**行简化阶梯矩阵**.

例 4 设

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 1 & -5\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

其中 B、C、D 是阶梯矩阵,A 不是阶梯矩阵,因为其第五行首非零元 1 不在上一行首非零元 5 的右下方;矩阵 C 同时为行简化阶梯矩阵,而矩阵 B 不是,因为第一、二行首非零元虽然均为 1,但第二行首非零元上面的元素不为零,而是 2.

不加证明地给出如下定理:

定理 1.3　(1) 矩阵 A 经过一系列初等行变换后必可化为阶梯矩阵；
(2) 阶梯矩阵经过一系列初等行变换后必可化为行简化阶梯矩阵.

例 5　将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&3&-2&-1\\0&-1&0&-5\\2&2&-2&6\end{pmatrix}$ 化为行简化阶梯矩阵.

解

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&3&-2&-1\\0&-1&0&-5\\2&2&-2&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-2)+r_4]{r_1\times(-2)+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&-1&0&-5\\0&-1&0&-5\\0&-2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-2)+r_4]{r_2\times(-1)+r_3}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&-1&0&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&12\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&-1&0&-5\\0&0&0&12\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3\times\frac{1}{12}\\ r_2\times 2+r_1\\ r_2\times(-1)}}\begin{pmatrix}1&0&-1&-8\\0&1&0&5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times 8+r_1]{r_3\times(-5)+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

由于选用的方法不同，任意矩阵 A 经过一系列初等行变换后化成的阶梯矩阵也不唯一，但是，所有化成的阶梯矩阵都具有相同个数的非零行，称这个数为**矩阵的秩**，记作 $r(A)$.

例 6　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{4}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$ 的秩.

解　$A=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{4}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\times 15\\ r_2\times 12\\ r_3\times 5}}\begin{pmatrix}12&-5&0\\3&-8&6\\0&1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}3&-8&6\\12&-5&0\\0&1&-4\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1\times(-4)+r_2}\begin{pmatrix}3&-8&6\\0&27&-24\\0&1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}3&-8&6\\0&1&-4\\0&27&-24\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-27)+r_3}\begin{pmatrix}3&-8&6\\0&1&-4\\0&0&84\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=3$.

例 7　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1\\2&1&-1&-1&-1\\1&3&-2&-2&0\\3&-1&0&0&-2\end{pmatrix}$ 的秩.

解　$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1\\2&1&-1&-1&-1\\1&3&-2&-2&0\\3&-1&0&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-3)+r_4]{\substack{r_1\times(-2)+r_2\\ r_1\times(-1)+r_3}}\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1\\0&5&-3&-3&1\\0&5&-3&-3&1\\0&5&-3&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2\times(-1)+r_3\\ r_2\times(-1)+r_4}}\begin{pmatrix}1&-2&1&1&-1\\0&5&-3&-3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $r(A)=2$.

第二节　矩阵的运算

矩阵理论应用广泛，内容丰富，矩阵的初等变换和矩阵的秩十分重要，但还远不能满足需要，还需要掌握矩阵的基本运算.

一、矩阵的加法与数乘

定义 1.4　设矩阵 $A=(a_{ij})$ 与矩阵 $B=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵，称矩阵 $(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 A 与 B 的**和(差)矩阵**. 记为 $A\pm B$，即

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$$

定义 1.5　设矩阵 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，k 为常数，以数 k 乘矩阵 A 的每一个元素所得到的矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$，称为数 k 与矩阵 A 的**数乘矩阵**. 记作 kA，即 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&5&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&7&5\\1&4&0\end{pmatrix}$，求 $A+B$，$A-B$，$(-1)A$，$3A^T$.

解 $A+B=\begin{pmatrix}1+2&2+7&3+5\\-2+1&5+4&6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9&8\\-1&9&6\end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix}1-2&2-7&3-5\\-2-1&5-4&6-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-5&-2\\-3&1&6\end{pmatrix}$

$(-1)A=(-1)\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\2&-5&-6\end{pmatrix}$

$3A^T=3\begin{pmatrix}1&-2\\2&5\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6\\6&15\\9&18\end{pmatrix}$.

显然，矩阵 $(-1)A$ 的所有元素是矩阵 A 的元素的相反数，所以矩阵 $(-1)A$ 称为矩阵 A 的**负矩阵**，记为 $-A$. 矩阵的减法运算也可以看成加法运算的逆运算. 即

$$A-B=A+(-B)$$

容易验证：矩阵的加法满足以下运算规律：

$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$
$$A+O=A$$
$$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$$

矩阵的数乘运算满足下列运算规律：

$$k(A+B)=kA+kB$$
$$(k+l)A=kA+lA$$
$$k(lA)=(kl)A$$
$$1\cdot A=A;(-1)\cdot A=-A;0\cdot A=O$$
$$(kA)^T=kA^T$$

其中 k 与 l 是常数.

例 2 设 $A=\begin{pmatrix}3&-2&7\\5&3&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}9&4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$，且 $A+3X=B$；求 X.

解 $X=\frac{1}{3}(B-A)=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}9&4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-2&7\\5&3&4\end{pmatrix}\right]$

$=\begin{pmatrix}2&2&-2\\-\frac{2}{3}&-\frac{8}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.