



普通高等教育
电气工程与自动化类
“十一五”规划教材

ELECTRICAL NETWORK THEORY

电 网 络 理 论 (图论 方程 综合)

周庭阳 张红岩 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书共分十一章，主要内容有电网络概述、网络矩阵方程、网络撕裂法、多端和多端口网络、网络的拓扑公式、网络的状态方程、无源网络的策动点函数、无源网络传递函数的综合、逼近问题和灵敏度分析、单运放二次型有源滤波电路、模拟实现法等。

本书配有免费电子课件，欢迎选用本书作教材的老师登录 www.cmpedu.com 下载或发邮件到 wbj@cmpbook.com 索取。

本书可作为电类专业硕士生“电网络理论”课程的教材，也可供电气、电子工程专业的科技人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电网络理论：图论 方程 综合/周庭阳，张红岩编著. —北京：机械工业出版社，2008.6

普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材

ISBN 978-7-111-24305-2

I. 电… II. ①周…②张… III. 电力系统结构—高等学校—教材
IV. TM727

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 092693 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：王保家 责任编辑：任正一 责任校对：李秋荣

封面设计：王洪流 责任印制：杨 曦

北京机工印刷厂印刷 (兴文装订厂装订)

2008 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 17.25 印张 · 424 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-24305-2

定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010) 68326294

购书热线电话：(010) 88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：(010) 88379711

封面无防伪标均为盗版

序

随着科学技术的不断进步，电气工程与自动化技术正以令人瞩目的发展速度，改变着我国工业的整体面貌。同时，对社会的生产方式、人们的生活方式和思想观念也产生了重大的影响，并在现代化建设中发挥着越来越重要的作用。随着与信息科学、计算机科学和能源科学等相关学科的交叉融合，它正在向智能化、网络化和集成化的方向发展。

教育是培养人才和增强民族创新能力的基础，高等学校作为国家培养人才的主要基地，肩负着教书育人的神圣使命。在实际教学中，根据社会需求，构建具有时代特征、反映最新科技成果的知识体系是每个教育工作者义不容辞的光荣任务。

教书育人，教材先行。机械工业出版社几十年来出版了大量的电气工程与自动化类教材，有些教材十几年、几十年长盛不衰，有着很好的基础。为了适应我国目前高等学校电气工程与自动化类专业人才培养的需要，配合各高等学校的教学改革进程，满足不同类型、不同层次的学校在课程设置上的需求，由中国机械工业教育协会电气工程及自动化学科教育委员会、中国电工技术学会高校工业自动化教育专业委员会、机械工业出版社共同发起成立了“全国高等学校电气工程与自动化系列教材编审委员会”，组织出版新的电气工程与自动化类系列教材。这类教材基于“**加强基础，削枝强干，循序渐进，力求创新**”的原则，通过对传统课程内容的整合、交融和改革，以不同的模块组合来满足各类学校特色办学的需要。并力求做到：

1. 适用性：结合电气工程与自动化类专业的培养目标、专业定位，按技术基础课、专业基础课、专业课和教学实践等环节，进行选材组稿。对有的具有特色的教材采取一纲多本的方法。注重课程之间的交叉与衔接，在满足系统性的前提下，尽量减少内容上的重复。

2. 示范性：力求教材中展现的教学理念、知识体系、知识点和实施方案在本领域中具有广泛的辐射性和示范性，代表并引导教学发展的趋势和方向。

3. 创新性：在教材编写中强调与时俱进，对原有的知识体系进行实质性的改革和发展，鼓励教材涵盖新体系、新内容、新技术，注重教学理论创新和实践创新，以适应新形势下的教学规律。

4. 权威性：本系列教材的编委由长期工作在教学第一线的知名教授和学者组成。他们知识渊博，经验丰富。组稿过程严谨细致，对书目确定、主编征集、资料申报和专家评审等都有明确的规范和要求，为确保教材的高质量提供了有

力保障。

此套教材的顺利出版，先后得到全国数十所高校相关领导的大力支持和广大骨干教师的积极参与，在此谨表示衷心的感谢，并欢迎广大师生提出宝贵的意见和建议。

此套教材的出版如能在转变教学思想、推动教学改革、更新专业知识体系、创造适应学生个性和多样化发展的学习环境、培养学生的创新能力等方面收到成效，我们将会感到莫大的欣慰。

全国高等学校电气工程与自动化系列教材编审委员会

汪植生 陈明时 郑大钟

前 言

“电网络理论”是国内大多数院校电类专业硕士生的必修课程，该课程在硕士生培养环节中较重要的作用，可使学生的电网络理论知识体系得到充实和巩固。

在该课开设早期，各校均使用英、美教材，如巴拉巴尼亚的“电网络理论”等，但国外教材篇幅较大，且和国内本科生教材的内容重复较多。后期国内出版了一些同类的书籍，例如科学出版社出版的邱关源先生的“电网络理论”，该书内容简洁、精炼，是一本很好的参考书。1997年浙江大学出版社出版了作者编著的“电网络理论”，该书被国内许多院校作为电网络理论课程的教材，得到普遍的好评。本书就是在该书的基础上进行调整、充实，改写而成的。

“电网络理论”内容可以包括图论、有源和无源网络综合、开关电容网络、网络诊断、非线性电路、时变电路、电网络计算机辅助设计等等。在有限的学时数下究竟选用哪些作为基本讲座的内容，我们曾经有过徘徊。但经过多次实践，感到选用电网络图论和有源、无源网络综合作为基本内容较为合适，因为这些内容更具基础性，更有利于巩固学生的理论体系。我们以这些内容组织教学实践了十多年，学生反映较好，对他们的理论体系有较大的巩固和提高。

本书选材丰富，内容紧凑，体系合理，叙理严密，同时与本科生电路课程联系紧密，便于教学，也有利于学生思维能力和理论基础的巩固。

本书分为两篇，基本上是互为独立的，如果需要也可以先教第二篇。总教学时间约50学时，平均每章4~5学时完成。

本书有些内容在别的书籍和文献中还没有出现过，如基于不定导纳矩阵的撕裂法、多端网络的等效电路、多端口网络参数的图论表示式、多端口网络的拓扑公式、共点和共圈多端口网络的变换矩阵、含负电容T形网络实现的方法、桥式网络传输零点的推导方法、用拓扑公式计算有源网络前馈和反馈函数等。

本书配有免费电子课件，欢迎选用本书作教材的老师登录 www.cmpedu.com 下载或发邮件到 wbj@cmpbook.com 索取。

由于水平所限，缺点和错误在所难免，望读者批评指正。

编著者
于浙江大学

全国高等学校电气工程与自动化系列教材 编 审 委 员 会

主任委员 汪樵生 浙江大学

副主任委员 (按姓氏笔画排序)

王兆安 西安交通大学

王孝武 合肥工业大学

田作华 上海交通大学

刘 丁 西安理工大学

陈伯时 上海大学

郑大钟 清华大学

赵光宙 浙江大学

赵 曜 四川大学

韩雪清 机械工业出版社

委 员 (按姓氏笔画排序)

戈宝军 哈尔滨理工大学

王钦若 广东工业大学

吴 刚 中国科技大学

张纯江 燕山大学

张晓华 哈尔滨工业大学

邹积岩 大连理工大学

陈庆伟 南京理工大学

夏长亮 天津大学

萧蕴诗 同济大学

韩 力 重庆大学

熊 蕊 华中科技大学

方 敏 合肥工业大学

白保东 沈阳工业大学

张化光 东北大学

张 波 华南理工大学

杨 耕 清华大学

陈 冲 福州大学

范 瑜 北京交通大学

章 兢 湖南大学

程 明 东南大学

雷银照 北京航空航天大学

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等教育电气工程与自动化类“十一五”规划教材

书 名	主 编
★电路基础	东南大学 黄学良
电路实验教程	燕山大学 毕卫红
工程电磁场基础及应用	山东大学 刘淑琴
数字电子技术	中国计量学院 王秀敏
电子技术实验	天津大学 王萍
★计算机软件技术基础	哈尔滨工程大学 李金
通信技术基础(非通信类)	重庆邮电大学 鲜继清
★微型计算机原理及应用	西安交通大学 张彦斌
计算机网络与通信	清华大学 张曾科
★自动控制理论	合肥工业大学 王孝武 方敏 葛锁良
★自动控制理论	西安理工大学 刘丁
★现代控制理论基础(第2版)	合肥工业大学 王孝武
现代控制理论	浙江大学 赵光宙
控制工程基础	浙江工业大学 王万良
信号分析与处理(第2版)	浙江大学 赵光宙
自动化概论	四川大学 赵曜
★电力电子技术(第5版)	西安交通大学 王兆安 刘进军
电力电子技术(少学时)	华南理工大学 张波
Power Electronics	吴斌
★电机及拖动基础(第4版)(上下册)	合肥工业大学 顾绳谷
电力拖动基础	四川大学 张代润
★电力拖动自动控制系统——运动控制系统(第4版)	上海大学 阮毅 陈伯时
电力拖动自动控制系统——运动控制系统(少学时)	上海海运大学 汤天浩
控制系统数字仿真与CAD(第2版)	哈尔滨工业大学 张晓华
★过程控制与自动化仪表(第2版)	西安理工大学 潘永湘
过程控制与自动化仪表	浙江大学 张宏建
过程控制系统	华东理工大学 俞金寿
传感器与检测技术	清华大学 赵勇
自动检测技术与系统设计	东南大学 周杏鹏

(续)

书 名	主 编
计算机控制技术	沈阳大学 范立南
现场总线技术及应用	哈尔滨工业大学 佟为明
电磁兼容原理及应用	华中科技大学 熊蕊
★电气绝缘技术基础(第4版)	西安交通大学 曹晓琬
★电机学	重庆大学 韩力
电力工程基础	河海大学 鞠平
★供电技术(第4版)	西安理工大学 余健明
智能控制理论及应用	湖南大学 王耀南 孙炜
智能电器	大连理工大学 邹积岩
建筑智能化系统	东北大学 吴成东
控制电机	山东大学 李光友
智能机器人引论	中国科学技术大学 关胜晓
机器人引论	清华大学 张涛
嵌入式系统原理与应用	青岛大学 范延滨
数字图像处理与应用基础	西安理工大学 朱虹
电网络理论	浙江大学 周庭阳
非线性电路理论	北京机械工业学院 刘小河
非线性系统理论	上海大学 康惠骏
最优控制理论与应用	西安交通大学 吴受章
系统建模理论与方法	东南大学 夏安邦
高等数字信号处理	海军工程技术大学 吴正国
高等电力电子技术	合肥工业大学 张兴
现代电机控制技术	沈阳工业大学 王成元

1. 本套教材全部配有免费电子课件,欢迎选用本套教材的老师索取,索取邮箱: wbj@mail.machininfo.gov.cn
2. 书名前标“★”号的为“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”

目 录

序

前言

第 1 篇 网络图论 1

第 1 章 电网络概述 1

内容提要 1

1.1 电网络的基本性质 1

1.1.1 线性和非线性 1

1.1.2 时变和非时变 2

1.1.3 有源网络和无源网络 2

1.1.4 有损网络和无损网络 2

1.1.5 互易网络和非互易网络 3

1.1.6 集中参数电路 3

1.2 图论的术语和定义 3

1.3 树 5

1.4 割集 5

1.5 图的矩阵表示 6

1.6 关联矩阵、回路矩阵和割集矩阵之间的关系 9

1.7 矩阵形式的基尔霍夫定律 11

1.7.1 基尔霍夫电流定律的矩阵形式 11

1.7.2 基尔霍夫电压定律的矩阵形式 12

小结 13

习题 14

第 2 章 网络矩阵方程 16

内容提要 16

2.1 节点电压法 16

2.1.1 复合支路的伏安特性 16

2.1.2 支路导纳矩阵和支路阻抗矩阵 17

2.1.3 方程的建立 18

2.2 修正节点电压法 20

2.3 割集电压法 22

2.4 回路电流法 24

2.5 含零泛器网络的节点电压方程 27

2.5.1 零口器、非口器和零器 27

2.5.2 节点电压方程的建立步骤 27

2.6 表格法 30

2.6.1 二端元件和受控源伏安特性的

描述 30

2.6.2 多端元件的伏安特性的描述 32

小结 35

习题 35

第 3 章 网络撕裂法 37

内容提要 37

3.1 概述 37

3.2 支路撕裂法 37

3.3 支路排序法 42

3.4 节点撕裂法 45

3.5 回路分析法 49

3.6 多端口撕裂法 53

小结 57

习题 57

第 4 章 多端和多端口网络 59

内容提要 59

4.1 无源多端口网络的短路参数 59

4.1.1 短路参数的定义 59

4.1.2 利用节点法计算短路参数 60

4.2 无源多端口网络的开路参数 65

4.2.1 开路参数的定义 65

4.2.2 利用节点法计算开路参数 65

4.3 无源多端口网络的混合参数 67

4.3.1 混合参数的定义 67

4.3.2 利用节点法计算混合参数 69

4.3.3 短路参数、开路参数和混合参数

矩阵的关系 72

4.4 含源多端口网络的等效电路 73

4.4.1 含源多端口网络的诺顿等效

电路 73

4.4.2 含源多端口网络的戴维南等效

电路 73

4.4.3 含源多端口网络的混合等效

电路 74

4.5 多端网络的不定导纳矩阵 74

4.5.1 不定导纳矩阵的定义 74

4.5.2 Y_i 的等余因子	75	7.2 无源网络策动点函数	125
4.5.3 Y_i 的并端	76	7.3 无源导抗函数的性质	127
4.5.4 Y_i 的并联	76	7.4 LC 一端口网络	129
4.5.5 端点的收缩	77	7.4.1 LC 一端口网络的性质	129
4.6 多端网络的不定阻抗矩阵	78	7.4.2 LC 一端口网络的实现	130
4.7 多端网络的星形等效电路	81	7.5 RC 一端口网络	135
小结	83	7.5.1 RC 一端口网络的性质	135
习题	84	7.5.2 RC 一端口网络的实现	138
第 5 章 网络的拓扑公式	86	7.6 RL 一端口网络	141
内容提要	86	7.7 RLC 一端口网络	142
5.1 用节点导纳矩阵的行列式表示开路 参数	86	7.7.1 RLC 一端口网络的一般实现 步骤	142
5.2 无源网络入端阻抗的拓扑公式	87	7.7.2 RLC 一端口网络的 Brune 实 现法	143
5.3 无源网络转移阻抗的拓扑公式	89	小结	148
5.4 无源网络导纳的拓扑公式	91	习题	149
5.4.1 用节点导纳矩阵的行列式表示双 口网络的短路参数	91	第 8 章 无源网络传递函数的综合	151
5.4.2 节点导纳矩阵的二阶余因式的 拓扑公式	92	内容提要	151
5.4.3 双口网络短路参数的拓扑公式	93	8.1 转移参数的性质	151
5.4.4 多端口网络导纳参数的拓扑 公式	94	8.2 传输零点	153
5.5 无源网络电压传递函数的拓扑公式	95	8.3 梯形 RC 网络	155
5.6 用补树阻抗积表示的拓扑公式	98	8.4 一臂多元件的梯形 RC 网络	158
5.7 不定导纳矩阵的伴随有向图	98	8.5 并联梯形网络	160
5.8 有源网络的拓扑公式	101	8.6 梯形 LC 网络	161
小结	105	8.7 单边带载 LC 网络	164
习题	105	8.8 双边带载 LC 网络的达林顿实现	166
第 6 章 网络的状态方程	108	小结	170
内容提要	108	习题	170
6.1 线性非常态网络的状态方程的 系统编写法	108	第 9 章 逼近问题和灵敏度分析	174
6.2 多端口法	115	内容提要	174
6.3 差分形式的状态方程	117	9.1 概述	174
6.4 输出方程	118	9.2 勃特沃茨逼近	175
6.5 网络状态方程的解	120	9.3 切比雪夫逼近	177
小结	122	9.4 倒切比雪夫逼近	183
习题	122	9.5 椭圆函数	185
第 2 篇 无源和有源网络综合概论	124	9.6 贝塞尔-汤姆逊响应	186
第 7 章 无源网络的策动点函数	124	9.7 频率变换	190
内容提要	124	9.7.1 高通变换	190
7.1 归一化和去归一化	124	9.7.2 带通变换	191
		9.7.3 带阻变换	193
		9.8 灵敏度分析	193
		9.8.1 灵敏度及其计算	193

9.8.2 ω 和 Q 灵敏度	194	小结	230
9.8.3 增益灵敏度	196	习题	231
小结	199	第 11 章 模拟实现法	233
习题	200	内容提要	233
第 10 章 单运放二次型有源滤波		11.1 概述	233
电路	202	11.2 仿真电感模拟法	234
内容提要	202	11.3 频变负阻法	236
10.1 概述	202	11.4 梯形网络的跳耦模拟法	238
10.2 单运放二次型电路的基本结构	203	11.5 带通跳耦滤波器	243
10.3 萨伦-凯 (Sallen-Key) 电路	205	11.6 状态变量法	247
10.4 RC-CR 变换	211	11.7 入端导纳法	249
10.5 正反馈结构的带通电路	213	11.8 多运放双二次节电路	253
10.6 实现虚轴上的传输零点	216	11.9 开关电容网络 (SCN) 概述	259
10.7 负反馈低通滤波器	217	小结	260
10.8 负反馈带通电路	221	习题	260
10.9 全通滤波器	224	附录 $A_{\max} = 0.5\text{dB}$ 椭圆近似函数	262
10.10 单运放二次型通用滤波器	225	参考文献	263

第 1 篇 网络图论

第 1 章 电网络概述

内 容 提 要

本章介绍电网络分析计算的基本概念。内容包括：集中参数电路的基本性质，图论的基本知识，及矩阵形式的基尔霍夫方程。

1.1 电网络的基本性质

“电网络”和“电路”这两个术语事实上难以严格区分，它们都是由实际电路抽象出来的物理模型。从电网络性质来看，可以分为线性和非线性网络、时变和非时变网络、有源和无源网络、有损和无损网络、互易和非互易网络、分布参数和集中参数网络等。从电网络研究的任务来看，可以分为网络分析、网络综合、网络设计和网络诊断，分析和综合是网络理论的基础，设计和诊断属实际应用问题。以下对网络的性质作一简单叙述。

1.1.1 线性和非线性

线性与非线性网络的区分通常有三种方法：

- (1) 含有非线性元件的网络称为非线性网络，否则为线性网络；
- (2) 所建立的网络电压、电流方程是线性微分方程的称为线性网络，否则为非线性网络；
- (3) 按输入与输出之间是否满足线性和叠加性来区分。

例如，当输入向量为

$$\mathbf{Y}(t) = [Y_1(t) \quad Y_2(t) \cdots Y_k(t) \cdots Y_m(t)]^T$$

输出向量为

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t) \quad X_2(t) \cdots X_k(t) \cdots X_n(t)]^T$$

当输入向量为

$$\mathbf{F}(t) = [f_1(t) \quad f_2(t) \cdots f_k(t) \cdots f_m(t)]^T$$

输出向量为

$$\mathbf{R}(t) = [r_1(t) \quad r_2(t) \cdots r_k(t) \cdots r_n(t)]^T$$

若满足线性（也称齐次性），当输入为 $a\mathbf{Y}(t)$ 时输出应为 $a\mathbf{X}(t)$ ；若满足叠加性，当输入为 $\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}(t)$ 时输出应为 $\mathbf{X}(t) + \mathbf{R}(t)$ 。若网络输入为 $a\mathbf{Y}(t) + b\mathbf{F}(t)$ 时输出为 $a\mathbf{X}(t) + b\mathbf{R}(t)$ ，

则称该网络为线性网络, 否则为非线性网络。

以上三种区分方法大体上是等价的。但对某些特殊情况将有差异。例如图 1-1 所示电路中非线性电阻 R_1 和 R_2 的特性分别为: $i_1 = aV + bV^3$ 和 $i_2 = aV - bV^3$, 按区分法 (1), 它们应是非线性网络; 但若以 V_1 为输入, V_2 为输出, 显然能满足线性和叠加性, 按区分法 (3), 应是线性网络。

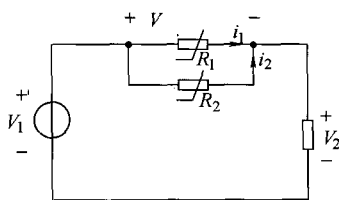


图 1-1 线性和叠加性关系的说明

即使线性和叠加性也不总是能同时满足的。例如带电阻负载由理想二极管构成的全波整流电路, 能满足线性关系, 但不能满足叠加性。

1.1.2 时变和非时变

区分时变和非时变 (也称定常或称时恒) 网络, 类似的也有三种分法, 即:

(1) 含时变元件的网络称为时变网络, 否则为定常网络;

(2) 建立的方程为常数系数方程者为定常网络, 否则为时变网络;

(3) 输入、输出间满足延时特性的网络为定常网络, 否则为时变网络。对于定常网络, 当输入为 $F(t)$ 时, 输出为 $R(t)$, 当输入为 $F(t - t_0)$ 时, 输出应为 $R(t - t_0)$ 。

1.1.3 有源网络和无源网络

设端口电压、电流方向一致, 并设端口电压向量为

$$\mathbf{V}(t) = [v_1(t) \quad v_2(t) \quad \cdots \quad v_k(t) \quad \cdots \quad v_m(t)]^T$$

端口电流向量为

$$\mathbf{I}(t) = [i_1(t) \quad i_2(t) \quad \cdots \quad i_k(t) \quad \cdots \quad i_m(t)]^T$$

若

$$\int_{-\infty}^t \mathbf{V}^T(\tau) \mathbf{I}(\tau) d\tau \geq 0 \quad (1-1)$$

则称该网络为无源网络。也即对于任何瞬间 t , 在任何可能的端口电压、电流情况下送入网络的总能量 (从 $t = -\infty$ 开始记) 始终不小于零者为无源网络, 否则为有源网络。这是从电网络理论角度出发的严格定义。实际应用中, 提法还可能粗糙一些, 例如, 对含运放或受控源电路即称为有源电路。电力电子电路中含晶体管的电路即为有源电路。这种实用提法在某些情况也可能与严格定义有差异, 例如理想的回转器, 其电压电流的关系为

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = (-r i_2) \left(\frac{v_2}{r} \right) + v_2 i_2 = 0$$

满足式 (1-1), 应是无源网络, 但是应用上往往又称其为有源网络。

1.1.4 有损网络和无损网络

若网络满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{V}^T(\tau) \mathbf{I}(\tau) d\tau = 0 \quad (1-2)$$

则称其为无损网络。以上认为 $V(-\infty)$ 、 $V(\infty)$ 均为零。

1.1.5 互易网络和非互易网络

符合互易关系（参照基本电路书籍）的网络称为互易网络，否则为非互易网络。互易网络的回路阻抗、节点导纳矩阵均为对称矩阵。

1.1.6 集中参数电路

对于器件尺寸远小于工作波长的网络称为集中参数网络，否则称为分布参数网络。本书叙述中将以线性集中参数网络为主要对象。

在网络分析中，借助图论是十分有效的。本章以下各节将对图论的基本概念加以叙述。

1.2 图论的术语和定义

今天，图论这个组合和离散数学的分支已渗透到大多数自然学科，电网络理论是最早应用图论的学科之一，电网络方程的建立、计算参数的拓扑公式、信号流图、故障诊断、集成电路布线、通信网络、电力系统等问题均与图论密切相关。

以下简要地叙述一下图论的有关术语和定义。

图 G 是一些点和边的集合，边连于两点，如图 1-2 所示，它是边 $e_1, e_2, e_3, \dots, e_7$ 和点 $V_a, V_b, \dots, V_f$ 所组成的集合。若边所连的两点重合于一点，则称该边为自环，如图 1-2 中的边 e_7 。点可以没有边相连，如图 1-2 中点 f ，称为孤点。边的长短、形状是无所谓的。一般称图 G 为线形图、拓扑图或线图。

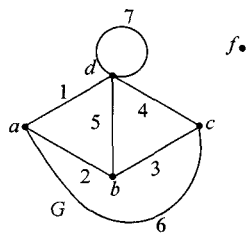


图 1-2 拓扑图

若不画出具体的图形，用边集 $e_1(V_a V_d), e_2(V_a V_b), e_3(V_b V_c), e_4(V_c V_d), e_5(V_a V_e), e_6(V_b V_c), e_7(V_d V_d)$ 和点集 $V_a, V_b, V_c, V_d, V_e, V_f$ 也可以充分代表图 G 。 $e_k(V_i V_j)$ 表示边 e_k 连于点 i 和点 j 。对于无孤点的图，仅一个边集便可充分地表征它。边集 $e_1(V_1 V_2), e_2(V_2 V_3), e_3(V_3 V_4), \dots, e_p(V_p V_{p+1})$ 称为径。若 V_{p+1} 即 V_1 ，即点 $p+1$ 和点 1 重合，则称为回路。回路中每个点关联两条边。若图 G_1 的点和边是图 G 的子集，则称图 G_1 是图 G 的子图，即 $G_1 \subset G$ 。若 G_1 包含 G 的全部点，则称 G_1 为生成子图。集合论中的并（Union）、交（Intersection）、差（Difference）和环和（Ring-Sum）运算同样可用于子图运算。

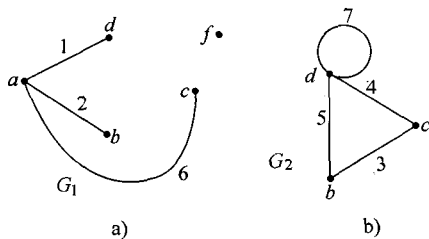


图 1-3 子图

a) 子图 1 b) 子图 2

以符号 $\cup$ 表示并， $G_1 \cup G_2$ 代表 G_1 和 G_2 中的所有点和边的集合。以符号 $\cap$ 表示交， $G_1 \cap G_2$ 代表 G_1 和 G_2 公有的点和边的集合。以符号负号表示差，如 $G_2 \subset G_1$ ，则 $G_1 - G_2$ 代表从 G_1 移走全部 G_2 的边及孤点后剩下的部分。图论规定边移走后，其两端的点不可移走。例如，图 1-3a 所示 G_1 是图 1-2 所示图 G 的子图， $G - G_1$ 如图 1-3b 所示，移走边 e_1, e_2, e_6 后点 a 成为孤点也移走。以符号 $\oplus$ 表示环和， $G_1 \oplus G_2$ 代表 G_1 和 G_2 中非公有部分之和。

显然

$$G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2) \quad (1-3)$$

若 G_1 是 G 的子图, 则称 $G_1' = G - G_1$ 为 G_1 的补图。图中与点关联的边数称为度, 用 d_i 表示。若 $d_i = 4$, 表示与点 i 关联的边数为 4; 若 $d_i = 0$, 表示点 i 是孤点。

若具有 n_i 个点的图 G , 所有点间都有一条边, 而度数均为 $n_i - 1 = n$, 则称其为完备图。图 1-4a 所示为 $n_i = 5$ 的完备图 (K_5), 其中 $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = 5 - 1 = 4$ 。图 1-4b 所示的图虽然各点度数都是 $n_i - 1 = 3$, 但点 1、4, 点 2、3 间没有边, 所以它不是完备图。若图 G 的任两点间至少有一条通路则称其为连通图, 否则为非连通图。

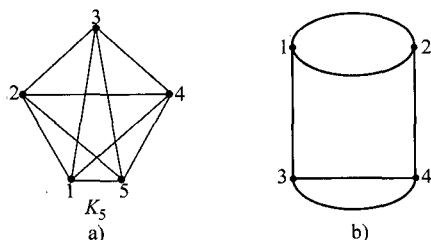


图 1-4 完备图说明

a) 完备图 K_5 b) 非完备图示例

将图 G 中的一个点移走, 是指将此点及与它关联的边一起移走。若连通图中某点移走后变为非连通图, 则称该点为断点。例如, 图 1-5a 中点⑤为断点, 将其移走后 (如图 1-5b 所示) 为非连通图。包含断点的连通图称为可分图, 否则为不可分图。对于不可分图, 包含其任两点至少能找出一个回路。设图 G 有 n_i 个点和 b 条边。将 n_i 个点分成两个集合, 若 b 条边中每条边的两端点分别属于这两个集合, 则称为二分图。如图 1-6 所示为一二分图。

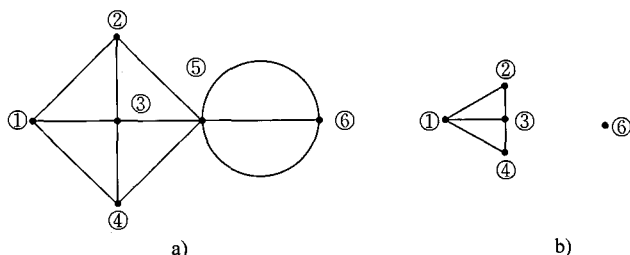


图 1-5 断点的说明

a) 含有断点的图 b) 移走断点后的非连通图

二分图的非零子图也是二分图。若图 G 任意两边能均不相交地画在平面上, 则称为平面图, 否则为非平面图。平面图中回路所形成的闭合圈内如不含别的边, 则此闭合圈称为网孔, 平面图的网孔数

$$m = b - n_i + 1 \quad (1-4)$$

式中 b 为边数, n_i 为点数。将平面图任一网孔贴在水平面上, 然后使其余的边任意伸缩, 其余网孔经上移即成为凸多面体。由欧拉公式知凸多面体的

$$\text{面} = \text{棱} - \text{顶} + 2$$

其中有一个面是外围回路移上来的, 其余面即网孔, 故式 (1-4) 得证。

平面图、对分图等集成电路布线问题中广为应用, 有时需判别一个复杂的图是否是平面图。图 1-4a 所示的 5 点完备图 (K_5) 和图 1-7 所示的对分图 (K_{33}) 是最基本的非平面图。C. Kuratowski 给出图 G 是平面图的充要条件是它不包含 K_5 和 K_{33} , 此即 Kuratowski 定理

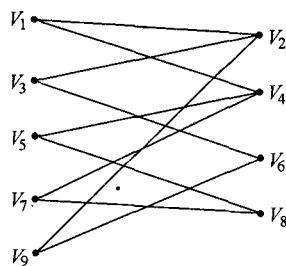


图 1-6 二分图

(证明从略)。在证明一个图是否是平面图时,同构(Isomorphism)和同胚(Homeomorphic)的概念可能用到。当两个图点数、边数均相等,且点和边的关联状况也相同时称为同构。两同构图的样子可以很不一样,如图1-7所示的 $K_{3,3}$ 和图1-8所示的图是同构的图。同胚是指将图 G 两条串联(或并联)的边简化为一条,成为 G_1 (或逆运算将一条边插入一点变为两条边),则图 G 与 G_1 是同胚图。

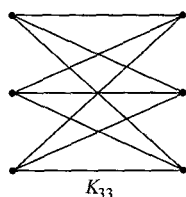
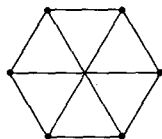
图1-7 对分图 $K_{3,3}$ 

图1-8 图1-7的同构图

若图 G 的边标有箭头方向,称为有向图,否则为无向图。讨论电网络的图时,边习惯称为支路,点则称为节点。以后,这些名称将兼用。

1.3 树

树在图论中很重要。连通图 G 的子图具备下述三个条件者称为树:

- (1) 包含全部节点;
- (2) 不包含回路;
- (3) 连通。

树 T 的补图称为补树。树的支路称为树支,补树的支路称为连支。对于有 n_i 个点的连通图,任一树的树支数为

$$n = n_i - 1 \quad (1-5)$$

用归纳法不难证明式(1-5)。(请读者自行证明)

若图 G 支路数为 b ,则连支数

$$l = b - (n_i - 1) \quad (1-6)$$

在图论中称 n 为图 G 的秩,称 l 为图 G 的环秩。

树 T 的任两点间必有且仅有一条通路。因为树是连通的,所以必有通路;因为不存在回路,所以不可能有第二条通路。这是树的一个重要定理。任两点间若加上连支,必存在一个唯一的单连支回路。如图1-9中 a 、 b 点加上虚线所示的连支,则必有且仅有一个只包含这条连支和 a 、 b 间唯一树路径构成的回路。 l 条连支,可以有 l 个单连支回路。这些单连支回路也称为基本回路。

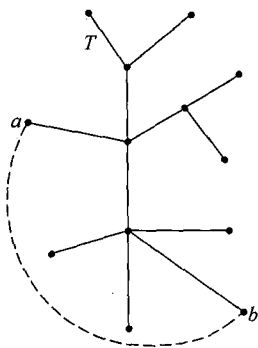


图1-9 单连支回路

1.4 割集

割集(Cut Set)是连通图 G 的部分支路集合,且满足条件:

(1) 移走这些支路后图 G 分为两个部分;

(2) 少移走其中任一条支路图仍连通。

图 1-10 所示支路集合 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 是一个割集, 显然满足上述两个条件。图 1-11 支路集合 $(3, 4, 5, 6)$ 、 $(1, 3, 6)$ 、 $(2, 3, 5)$ 、 $(2, 4, 6)$ 、 $(1, 5, 4)$ 、 $(1, 2, 3, 4)$ 、 $(1, 2, 5, 6)$ 等都是割集。移走割集支路剩下的两个独立部分之一可以是一个孤点。若将割集支路画成图 1-10 的形式, 可作一封闭面包围 G_2 (或 G_1), 则两个独立部分之一在封闭面内, 另一个在封闭面外, 割集支路即穿过封闭面的全体支路集合。

若对图 1-9 所示的树作割集, 则每一割集都仅有一条树支路。移走树支后树 T 变为两个分离的部分 T_1 、 T_2 , 跨接在 T_1 和 T_2 之间的那些连支将和该树支构成一个单树支割集。每一树支均有且仅有一个单树支割集, 单树支割集也称为基本割集。

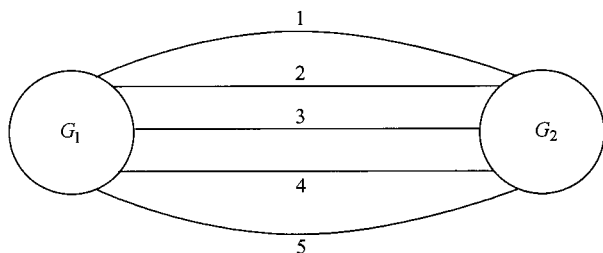


图 1-10 割集示例 1

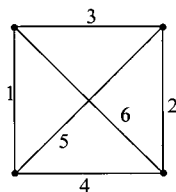


图 1-11 割集示例 2

1.5 图的矩阵表示

不管有向图还是无向图, 其边与点、回路、割集分别都有确定的关系, 这些关系均可用不同的矩阵表征, 以下将采用有向图来叙述。

表明边与点的关系的矩阵称为关联矩阵, 用 A_a 表示。以 A_a 的行代表点, 列代表边, 即 A_a 的阶数为 $n_i \times b$ 。 A_a 的元素

$$a_{jk} = \begin{cases} +1 & (\text{当边 } k \text{ 与点 } j \text{ 关联且离开 } j) \\ -1 & (\text{当边 } k \text{ 与点 } j \text{ 关联且指向 } j) \\ 0 & (\text{当边 } k \text{ 不与点 } j \text{ 关联}) \end{cases} \quad (1-7)$$

例如图 1-12 所示的图的关联矩阵

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

因为每一边连于两点, 且一进一出, 所以 A_a 的每一列仅有两个非零元素, 且一个为 1 另一个为 -1, 所以将 A_a 的全部行相加将为零, 也即 A_a 的行不是线性独立的, 可以任意划去一行, 划去行 (例如划去第四行) 后的矩阵称为降阶关联矩阵, 并用 A 表示。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$