21世纪高职高专教育统编教材

# 高等数学

主　编　张子杰
副主编　王洪林　胡景明


中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪 高职高专教育统编教材

# 高等数学

主　编　张子杰

副主编　王洪林　胡景明



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

## 内 容 提 要

本书是高等院校“十一五”精品规划教材，根据高职高专教育对高等数学的要求编写。本书着力体现当前高职高专教育教学改革的特点，突出针对性、适用性和实用性。编写时注重精选内容，重点突出，文字准确，图文配合紧密。

本书共分十章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程，多元函数微分学，多元函数积分学，级数。每章后配有一定数量的习题，书末附有习题答案。

本书可作为高职高专类高等数学课程的教材，也可作为有关工程技术人员的参考用书。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学/张子杰主编.—北京：中国水利水电出版社，2008

21世纪高职高专教育统编教材

ISBN 978-7-5084-5556-3

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第060226号

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 21世纪高职高专教育统编教材<br>**高等数学** |
| 作　　者 | 主编　张子杰　　副主编　王洪林　胡景明 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社（北京市三里河路6号　100044）<br>网址：www. waterpub. com. cn<br>E-mail：sales@ waterpub. com. cn<br>电话：（010）63202266（总机）、68367658（营销中心） |
| 经　　售 | 北京科水图书销售中心（零售）<br>电话：（010）88383994、63202643<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 中国水利水电出版社微机排版中心 |
| 印　　刷 | 北京市地矿印刷厂 |
| 规　　格 | 184mm×260mm　16开本　13.75印张　326千字 |
| 版　　次 | 2008年5月第1版　2008年5月第1次印刷 |
| 印　　数 | 0001—6500册 |
| 定　　价 | **29.50**元 |

# 前　言

本书是在分析和研究当前高职高专教育大众化的教育现状，总结多年教学改革经验的基础上，依据教育部制定的“高职高专教育高等数学教学基本要求”而编写的。

高等数学是一门重要的基础学科，又是一门有广泛应用的工具性学科。学习时不仅要学习它的理论和解题技巧，还要注意学习它处理问题的观点和方法，以便真正提高分析问题和解决问题的能力。

本书叙述简明扼要，通俗易懂。在引入概念时，尽可能从实际问题出发，使之符合认知规律，便于接受。注重突出针对性、适用性和实用性，符合高职高专层次培养应用型人才的要求。

本书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程，多元函数微分学，多元函数积分学，级数。书后附有常用平面曲线及其方程和习题参考答案。

本书的基本教学时数不少于90学时（不含习题课及带*号内容）。

本书是由河北工程技术高等专科学校数学教研室部分教师在集体研究、讨论的基础上编写的。本书由张子杰任主编，王洪林、胡景明任副主编，其中张建业、王洪林、张敏编写了第1~3章，胡景明、田飞、肖金桐、杨凯编写了第4~7章，张子杰、顾晓青、王焕东编写了第8~10章。本书框架结构的安排和统稿工作由张子杰承担。孟庆才教授认真审阅了本书的全部内容，提出了很多有价值的指导性意见，编者在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，本书难免有错误和不妥之处，敬请同行和读者批评指正。

编者

2008年3月

# 目　录

# 第 1 章　函数、极限与连续

高等数学的主要内容是微积分理论，函数（特别是初等函数）是微积分学的研究对象，极限理论是微积分学的基础．本章首先给出函数的概念，然后介绍极限理论的基本知识，最后在极限概念的基础上讨论函数的连续性．

## 1.1 函　数

### 1.1.1 函数的概念

**定义 1.1** 设有两个变量 $x$ 和 $y$，如果变量 $x$ 在实数集 $D$ 内任取一个数值，按照某个对应法则 $f$，变量 $y$ 都有唯一确定的数值与之对应，则称**变量 $y$ 是 $x$ 的函数**，记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中 $x$ 称为**自变量**，$y$ 称为**因变量**．自变量 $x$ 的取值范围 $D$ 称为函数的**定义域**．当自变量 $x$ 在定义域内取某一值 $x_0$ 时，$y$ 的对应值 $y_0$ 称为函数在 $x_0$ 处的函数值，记为

$$y_0 = f(x_0) = y|_{x=x_0}$$

全体函数值构成的集合，称为函数的值域．

函数的对应法则和定义域是函数的两个要素．如果两个函数的定义域、对应法则分别相同，不管自变量和因变量用何字母表示，这两个函数都是相等的．

表示函数对应法则的方法主要有解析法、列表法、图像法三种．用数学式子给出函数的对应法则来表示函数的方法称为解析法．微积分中所涉及的函数大多用解析法给出．如果一个函数由解析法给出，而自变量 $x$ 又无确定的实际背景，则此函数的定义域就是使这个数学式子有意义的自变量 $x$ 所有可能取值的全体．这时，函数的定义域一般是若干个区间的并集．

**【例 1.1.1】** 求函数 $y = \dfrac{\sqrt{2-|x|}}{x^2+1} + \lg x$ 的定义域．

**解** 使得 $\dfrac{\sqrt{2-|x|}}{x^2+1}$ 有意义的 $x$ 必须满足 $|x| \leqslant 2$，即 $-2 \leqslant x \leqslant 2$；使得 $\lg x$ 有意义的 $x$ 必须满足 $x > 0$；两者的交集即为函数 $y = \dfrac{\sqrt{2-|x|}}{x^2+1} + \lg x$ 的定义域 $(0,2]$．

在研究函数的某些性质的时候，只需要求函数在某点的附近有定义即可，为叙述方便，引入邻域的概念．设 $x_0$ 和 $\delta$ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \| x - x_0| < \delta, x \in R\}$ 称为**点 $x_0$ 的 $\delta$ 邻域**，记为 $N(x_0,\delta)$，它等价于开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$．数集 $\{x | 0 < |x - x_0| < \delta, x \in R\}$ 称为**点 $x_0$ 的去心 $\delta$ 邻域**，记为 $N(\hat{x}_0,\delta)$，它等价于 $(x_0-\delta,x_0) \cup (x_0,x_0+\delta)$．

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，则平面上的点集 $G = \{(x,y) | y = f(x), x \in D\}$ 在坐

标平面上的图形称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**. 借助于函数图形我们可以比较直观地研究函数的性质. 用解析法表示的函数的图形一般是平面上的一条曲线，同时，一般情况下我们也用函数表示平面上的曲线.

设 $y$ 是 $x$ 的函数 $y=f(x)$. 如果把 $y$ 当作自变量、$x$ 当作函数，则由关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=g(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 由于习惯上用字母 $x$ 表示自变量，用字母 $y$ 表示函数，因此，函数 $y=f(x)$ 的反函数也可写成 $y=g(x)$. 例如，对数函数 $y=\ln x$ 和指数函数 $y=e^x$ 互为反函数.

### 1.1.2 函数的几个性质

在研究函数的时候，需要经常考虑函数的以下几个几何性质.

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称，如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 偶函数的图形关于 $y$ 轴对称，奇函数的图形关于原点对称. 例如，函数 $y=x^2$ 和 $y=\cos x$ 在其定义域上都是偶函数，函数 $y=x^3$ 和 $y=\sin x$ 在其定义域上都是奇函数.

2. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得对任意 $x\in D$，都有 $x\pm T\in D$，且使得

$$f(x\pm T)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，其中 $T$ 称为函数 $f(x)$ 的周期，周期函数的周期通常是指它的最小正周期. 例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数. 周期函数的图形可以由它的一个周期 $[a,a+T]$ 内的图形沿 $x$ 轴的两个方向延拓得到.

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$，如果对于任意两点 $x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 $I$ 上**单调增加**，区间 $I$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调增区间**；如果对于任意两点 $x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 $I$ 上**单调减少**，区间 $I$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**单调减区间**. 例如，函数 $y=x^2$ 的单调增区间为 $[0,+\infty)$，单调减区间为 $(-\infty,0]$.

如果函数在某个区间 $I$ 上单调，则它存在反函数.

4. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D$，区间 $I\subset D$，如果存在一个数 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leq M$，则称**函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有界**，也可称**函数 $f(x)$ 为区间 $I$ 上的有界函数**. 例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域上有界；函数 $y=x^2$ 在其定义域上无界，而在任意有限区间上有界.

### 1.1.3 初等函数

微积分的研究对象主要为初等函数，初等函数由基本初等函数及函数间的运算构成.

1. 基本初等函数

基本初等函数有以下六种：

常数函数 $y=C$（$C$ 为常数）

幂函数 $y = x^{\mu}$（$\mu$ 为常数）

指数函数 $y = a^{x}$（$a > 0$，$a \neq 1$，$a$ 为常数）

对数函数 $y = \log_{a} x$（$a > 0$，$a \neq 1$，$a$ 为常数）

三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$，$y = \sec x$，$y = \csc x$

反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$

2. 简单函数

由基本初等函数经过有限次四则运算后所得到的函数称为**简单函数**．例如

$$y = (\sin x + \cos x) \cdot \frac{\ln x - \sqrt{x}}{\arctan x}$$

是一个简单函数．

3. 复合函数

设 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 是两个函数，且 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集不是空集，那么 $y$ 通过 $u$ 的联系也是 $x$ 的函数，这个函数称为 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 的**复合函数**，记为 $y = f[\varphi(x)]$．其中 $u$ 称为中间变量．例如，由函数 $y = \ln u, u = \sin x$ 可以构成复合函数 $y = \ln\sin x$，其定义域为所有区间 $(2k\pi,(2k+1)\pi), k \in Z$ 的并集．

复合函数中可以出现多个中间变量，这时复合函数由多个函数复合而成．例如，函数 $y = u^2$，$u = \sin v - \cot v$，$v = e^{w}$，$w = 8x$ 可构成复合函数 $y = (\sin e^{8x} - \cot e^{8x})^2$，这里 $u$、$v$、$w$ 都是中间变量．同样，复合函数也可以分解为若干个简单函数．

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成，并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**．

分析初等函数的结构对以后的学习很重要．

**【例 1.1.2】** 函数 $y = 10(\sin e^{8x} - \ln x)^2$，是由常数函数 10 与函数 $u = (\sin e^{8x} - \ln x)^2$ 乘积而成，函数 $u = (\sin e^{8x} - \ln x)^2$ 是由幂函数 $u = v^2$ 和函数 $v = (\sin e^{8x} - \ln x)$ 复合而成，函数 $v = (\sin e^{8x} - \ln x)$ 是由复合函数 $w = \sin e^{8x}$ 和基本初等函数 $\ln x$ 相减而成，函数 $w = \sin e^{8x}$ 是由基本初等函数 $w = \sin\theta$、$\theta = e^{t}$ 和简单函数 $t = 8x$ 复合而成，简单函数 $t = 8x$ 是常数函数 8 和幂函数 $x$ 的乘积．这样函数 $y = 10(\sin e^{8x} - \ln x)^2$ 的结构为：$y = 10u$，$u = v^2$；$v = w - \ln x$，$w = \sin\theta$，$\theta = e^{t}$，$t = 8x$．其中每个函数或为基本初等函数或为简单函数．

**双曲函数**是在工程技术中经常用到的一种初等函数，其定义为：

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

双曲正切函数 $\operatorname{th} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

**分段函数**是微积分中经常遇到的非初等函数，分段函数是指在定义域内不同的区间上用不同的解析式表示的函数．例如，$y = |x|$ 就是分段函数，它的形式为 $y = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geqslant 0 \end{cases}$．

## 习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$；(2) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\frac{1}{x}$；

(3) $y = \arcsin(x-3)$；  (4) $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$.

2. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；(2) $f(x+a)$（其中 $a > 0$ 为常数）.

3. 已知函数 $y = f(x)$ 的周期为 2，且

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

试在 $(-\infty, +\infty)$ 上作出函数 $y = f(x)$ 的图形.

4. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成？

(1) $y = \sin\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$；  (2) $y = 10\arctan(x^2+x+1)^2$.

5. 分析下列初等函数的结构：

(1) $y = \frac{\arcsin\sqrt{1-x^2}}{\ln(x^2+x)}$；(2) $y = (1+\sin x)^2 - e^{\tan 8x}$.

## 1.2 极限的定义

函数给出了两个变量之间的关系，极限主要研究在自变量的某个变化过程中，函数值的变化趋势. 在这一节，先给出数列极限的定义，然后介绍函数的极限及其性质.

### 1.2.1 数列的极限

**定义 1.2** 定义域为自然数集的函数 $a_n = f(n)$ 的函数值按照自变量 $n$ 增大的次序写出来，得到的一列数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

称为**数列**，记为 $\{a_n\}$，数列里的每一个数称为数列的项，$a_n = f(n)$ 称为数列的第 $n$ 项，也称为一般项或通项.

例如

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots \tag{1.2.1}$$

$$1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots \tag{1.2.2}$$

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots \tag{1.2.3}$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \cdots \tag{1.2.4}$$

都是数列，它们的通项分别为 $\dfrac{n}{n+1}$，$n$，$(-1)^{n+1}$，$\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

对于数列 $\{a_n\}$，我们主要观察当 $n\to\infty$（符号“$\to$”读作“趋于”）时，通项 $a_n$ 的变化趋势. 我们将式（1.2.1）、式（1.2.2）、式（1.2.3）、式（1.2.4）的各项画在数轴上，如图1.2.1（$a$）、（$b$）、（$c$）、（$d$）所示. 当 $n$ 增大时，式（1.2.1）的通项 $\dfrac{n}{n+1}$ 越来越大，越来越接近于1；式（1.2.2）的通项 $n$ 也越来越大，但不能趋于一个固定的常数，而是趋于无穷；式（1.2.3）的通项 $(-1)^{n+1}$ 在1与 $-1$ 之间来回跳动，不能趋于一个固定的常数；式（1.2.4）的通项 $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 虽然有正有负，但是从0的两侧越来越接近于0.

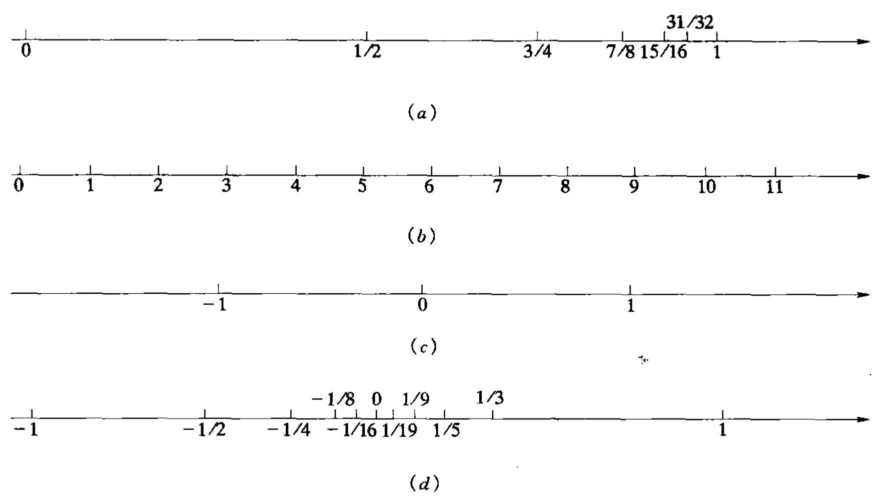


图 1.2.1

由上面的叙述，可见，以上四个数列随着 $n$ 的增大，通项的变化趋势不尽相同. 为了区别它们，下面引入数列极限的概念.

**定义 1.3**　设 $\{a_n\}$ 是一个数列，$A$ 是一个常数，如果当 $n$ 无限增大时，通项 $a_n$ 的值无限接近于 $A$，则称 $A$ 为数列 $\{a_n\}$ 当 $n$ 趋于无穷时的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad 或者 \quad a_n \to A(n\to\infty)$$

这时，也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $A$，$\{a_n\}$ 为收敛的数列.

如果数列的极限不存在，则称它为发散的数列. 例如，式（1.2.1）、式（1.2.4）为收敛的数列，其极限分别为1、0，记 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}=0$；而式（1.2.2）、式（1.2.3）为发散的数列.

从直观角度出发，我们可以得到说明数列极限存在的一个定理.

**定理 1.1**　单调有界的数列必有极限.

例如数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 就是一个单调增加的有界数列，随着 $n$ 的增大，$\dfrac{n}{n+1}$ 越来越接近于

1，与 1 的距离要多近有多近，永远达不到 1，这时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

### 1.2.2 函数的极限

数列是一种特殊的函数，它的定义域内任意两个点的距离都是 1 的整数倍，对自变量 $n$ 的变化过程，仅考虑趋于无穷的情形. 而对于微积分的主要研究对象初等函数，其定义域一般为若干个区间的并集，其自变量既可以无限地接近某个常数，也可以趋于无穷，这时就需要分别在这两种情形下，考察函数值的变化趋势.

1. 自变量趋于无穷时函数的极限

**定义 1.4** 如果当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 $A$，则称常数 $A$ 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限**. 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或者 $f(x)\to A(x\to+\infty)$.

如果当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 $A$，则称常数 $A$ 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限**. 记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或者 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

例如，由函数 $y=\arctan x$ 的图像（图 1.2.2）可以看出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，此函数两个方向的极限不相等. 再如，由函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像（图 1.2.3）可以看出 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，此函数两个方向的极限相等.

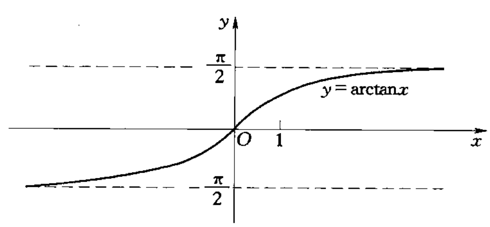


图 1.2.2

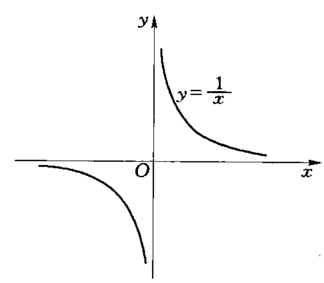


图 1.2.3

**定义 1.5** 如果当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 $A$，则称常数 $A$ 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**. 记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或者 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

$|x|$ 无限增大包含 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$，于是可以得到：

**定理 1.2** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 同时成立.

由此可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2. 自变量趋于某个点时函数的极限

**定义 1.6** 如果当自变量 $x$ 从点 $x_0$ 的左侧趋于 $x_0$（记为 $x\to x_0^-$）时对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 $A$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A$$

如果当自变量 $x$ 从点 $x_0$ 的右侧趋于 $x_0$（记为 $x \to x_0^+$）时对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 $A$，则称 $A$ 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时的**右极限**，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 + 0) = A$$

对于函数在某点处的左、右极限需要注意的是，因为考察自变量无限接近某点时函数值的变化趋势，所以要求函数在该点的左、右两侧附近有定义即可.

**【例 1.2.1】** 设三个函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases};\quad g(x) = \frac{x^2 + x}{x};\quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

试分别讨论三个函数在点 $x_0 = 0$ 处的左、右极限.

**解** 这三个函数的图像如图 1.2.4（$a$）、（$b$）、（$c$）所示.

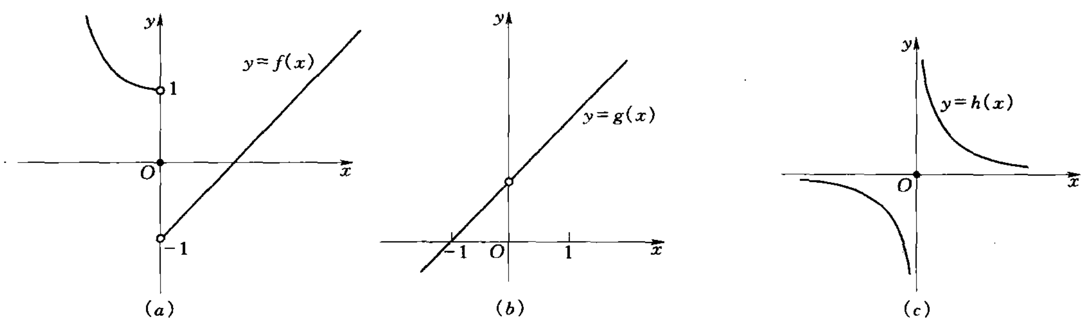


图 1.2.4

由此可直接看出：$f(x)$ 在点 0 处的左、右极限都存在，且 $f(0-0) = 1$，$f(0+0) = -1$，二者不相等，且都不等于 $f(0)$；$g(x)$ 虽然在点 0 处没有定义，但是 $g(0-0) = g(0+0) = 1$；$h(x)$ 在点 0 处的左、右极限都不存在，但有变化趋势，因为当 $x$ 从 0 的左、右两侧趋于 0 时，$|h(x)|$、$h(x)$ 无限增大.

由此例可看出，函数在某点处的左、右极限是单侧极限，其存在与否与该点处的定义无关. 下面给出双侧极限的概念.

**定义 1.7** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某去心邻域内有定义，如果当自变量 $x$ 无限趋近于 $x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于一个确定的常数 $A$，则称 $A$ 为**函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限**，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to x_0)$$

由此定义可知道，函数在某点处的极限与该点的定义无关；若函数在某点处极限存在是指不论自变量从该点的左侧还是从该点的右侧趋于该点，函数值都无限趋近于同一个常数，反过来说也是正确的. 于是可得：

**定理 1.3** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

由定理 1.3 可知，上例中 $f(x)$ 和 $h(x)$ 在点 0 处的极限不存在，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x}=1$.

在这一部分最后，需要强调，我们讨论函数极限，必须是在自变量的某个变化过程的前提下；否则，毫无意义.

### 1.2.3 函数极限性质

下面给出当自变量趋于某点时函数极限的几个常用性质.

**性质 1** （极限存在的唯一性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.

**性质 2** （极限存在的局部有界性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在 $x_0$ 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$，在 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内函数 $f(x)$ 有界.

**性质 3** （极限存在的局部保号性）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $x_0$ 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$，在 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

**性质 4** （极限存在的夹逼性质）如果存在 $x_0$ 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$，对任意 $x\in N(\hat{x}_0,\delta)$，都有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证明从略.

## 习 题 1.2

1. 观察下列数列的变化趋势，判断它们是否存在极限.

(1) $a_n=(-1)^{2n}$；(2) $a_n=(-1)^{3n}$；(3) $a_n=2+\dfrac{1}{n^2}$；(4) $a_n=n+(-1)^n$.

2. 根据基本初等函数的图形，考察它们在自变量趋于某点和趋于无穷时的极限情况.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$，作出 $y=f(x)$ 的图形，求 $f(0+0)$，$f(0-0)$，判断 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{2}{x}, & x>1\end{cases}$，判断当 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

## 1.3 极限的运算法则

初等函数由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合得到，求初等函数的极限，要知道基本初等函数的极限情况、极限的四则运算法则和复合函数求极限的法则. 对于基本初等函数的极限，可根据其图形观察得到，下面介绍极限的运算法则.

### 1.3.1 极限的四则运算法则

**定理 1.4** 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$

特别地，$\lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = CA$（$C$ 为常数）

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n = A^n$（$n$ 为自然数）

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}\ (B \neq 0)$

证明从略.

上述定理当自变量以其他方式变化时（如 $x \to +\infty$，$x \to x_0^-$ 等），定理的结论仍然成立.

**【例 1.3.1】**　求 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arctan x + x^2 \ln x}{e^x - 8\cos x}$.

**解**　$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arctan x + x^2 \ln x}{e^x - 8\cos x} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} \arctan x + \lim\limits_{x \to 1} x^2 \cdot \lim\limits_{x \to 1} \ln x}{\lim\limits_{x \to 1} e^x - 8\lim\limits_{x \to 1} \cos x} = \dfrac{\frac{\pi}{4} + 1 \times 0}{e - 8\cos 1}$

$$= \frac{\pi}{4(e - 8\cos 1)}$$

**【例 1.3.2】**　求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 6}{2x^3 + 7}$.

**解**　$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 6}{2x^3 + 7} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} x^4 + 3\lim\limits_{x \to 2} x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 6}{2\lim\limits_{x \to 2} x^3 + \lim\limits_{x \to 2} 7} = \dfrac{16 + 3 \times 4 - 6}{2 \times 8 + 7} = \dfrac{22}{23}$

**【例 1.3.3】**　求 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$.

**解**　此题分子、分母的极限都为 0，先把公因式消去，再求极限，则有

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{6}$$

**【例 1.3.4】**　求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 - x + 5}$.

**解**　此题分子、分母的极限都不存在（函数值无限增大），把此函数变形，分子、分母同时除以 $x^2$，则有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 - x + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{3}{2}$$

**【例 1.3.5】**　求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{2x^2 - x + 5}$.

**解**　$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 1}{2x^2 - x + 5} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}} = 0$

一般地，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}$

**【例 1.3.6】**　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

**解**　需求极限的函数为两个函数的差，而此两个函数的极限都不存在（函数值的绝对值无限增大），先通分，再求极限，则有

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$$

**【例 1.3.7】**　求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{t+9}-3}{t}$.

**解**　需求极限的函数为两个函数的商，分子、分母的极限都为 0，且表达式中含有根式，分子、分母同时乘以分子的共轭根式，然后求极限，则有

$$\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{t+9}-3}{t}=\lim_{t\to0}\frac{(\sqrt{t+9}-3)(\sqrt{t+9}+3)}{t(\sqrt{t+9}+3)}=\lim_{t\to0}\frac{t}{t(\sqrt{t+9}+3)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\sqrt{t+9}+3}=\frac{1}{6}$$

### 1.3.2　复合函数求极限的法则

**定理 1.5**　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(u_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

证明从略.

上述定理中，$x\to x_0$ 也可改为 $x\to\infty$，$x\to x_0^+$ 等.

**【例 1.3.8】**　求 $\lim\limits_{x\to1}\sin(\arctan x)$.

**解**　$\lim\limits_{x\to1}\sin(\arctan x)=\sin(\lim\limits_{x\to1}\arctan x)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**【例 1.3.9】**　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{2x+1}{x}$.

**解**　$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{2x+1}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}\right)=\ln2$

## 习　题　1.3

求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4}{x+2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6}{x-4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{x^4-3x+1}$;  (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x-1}{2x^2-x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-1}{8x^3+12x+2}$;  (8) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;

(9) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$;  (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(5x+2)^{50}}$;

(11) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$;  (12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+x)\arctan x}{4x^2-1}$;

(13) $\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$;  (14) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x^2-6x+1}{5x^2}\right)^3$.

## 1.4 两个重要极限

上一节介绍的求极限的法则并不能求所有初等函数的极限，本节给出求极限时常用的两个重要极限.

### 1.4.1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

虽然函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在点0处没有定义，但是通过函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在点0附近的函数值（表1.4.1），可以看出：当$x$越来越趋近于0时，函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的值越来越接近于常数1.

**表1.4.1**

| $x$ | $\pm\frac{\pi}{2}$ | $\pm\frac{\pi}{4}$ | $\pm\frac{\pi}{8}$ | $\pm\frac{\pi}{16}$ | $\pm\frac{\pi}{32}$ | $\pm\frac{\pi}{128}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sin x}{x}$ | 0.6366 | 0.9003 | 0.9745 | 0.9936 | 0.9984 | 0.9999 | … |

**定理1.6** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

**证** 作单位圆（图1.4.1），设$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，显然有

$$S_{三角形OAD}<S_{扇形OAD}<S_{三角形OAB}$$

即 $$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x \quad 或 \quad \sin x<x<\tan x$$

上式两边同时除以$\sin x$，可得

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad 或 \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

如果$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$，$\dfrac{\sin x}{x}$与$\cos x$均不变号，即当$0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$时，上式仍成立. 又因为$\lim\limits_{x\to0}\cos x=\lim\limits_{x\to0}1=1$，由极限存在的

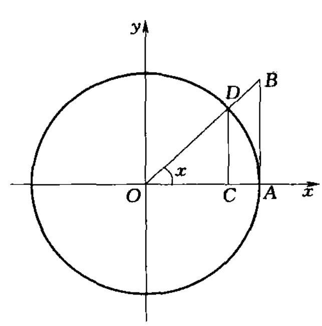

图1.4.1