高等数学教程

第五卷 第一分册

B. И. 斯米尔诺夫著
宋 正 译

人民教育出版社

高 等 数 学 教 程

第五卷 第一分册

В.И. 斯米尔诺夫著
宋　　正　　译

人 民 教 育 出 版 社

本书系前高等教育出版社出版的斯米尔诺夫(В. И. Смирнов)著"高等数学教程(Курс высшеи математики)第五卷第一分册"(宋正译),按1960年原书新版的修订本,由本社委托何纪勤同志修订。

本书中译本仍分二册出版。本分册包括原书前三章,内容基本上与旧版一致,仅有个别改动,详情见原序及目录。

本书可作为我国综合大学,高等师范院校数学类、物理类各专业高等数学课程的参考书。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少,本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷,定价相应减少20%。希鉴谅。

高等数学教程

第五卷 第一分册

В. И. 斯米尔诺夫著

宋 正 译

人民教育出版社出版(北京沙滩后街)

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0337 开本 787×1092 1/32 印张 9 4/16

字数 233,000 印数 40,501—140,500 定价 0.72 元

1959年2月第1版 1963年8月第2版

1979年6月北京第10次印刷

序 言

在数学物理的現代理論概型中，实变函数論、各种函数空間以及算子的一般理論，都有重大的意义。本书基本上就是論述这些問題的，它是根据我的"高等数学教程"第五卷1947年版本写成的。

本书中，实变函数論的內容是：古典的斯提勒杰斯积分論，勒貝格-斯提勒杰斯积分論，以及完全加法的集合函数論。

在第一章中叙述古典的斯提勒杰斯积分論，同时还討論依任意类型区間的更一般的斯提勒杰斯积分的定义，它是建立在当基本区間分割为任意类型区間时，相应的上下达布积分相等的基础上的。作为古典斯提勒杰斯积分的例子，我們討論了富里埃-斯提勒杰斯积分与柯西-斯提勒杰斯积分，并建立它們的反演公式。对平面的情形也定义斯提勒杰斯积分。

此外，在第一章中还研究連續函数空間 C，并求出其中的綫性泛函的一般形式。

在第二章中討論实变函数的度量論基础，以及勒貝格-斯提勒杰斯积分論基础。全部理論是对平面情形建立的，并指出了把它推广到 n-維歐氏空間的明显途徑。測度理論是建立在任一非負加法正常函数(这函数定义在二維半开区間上)的基础上的。有界函数的勒貝格-斯提勒杰斯积分是根据把基本可測集分割为可測集时，达布上积分与下积分相等来定义的。在第二章的末尾，詳細地論述平均函数的方法，以及在某些关于平均核的条件下，均值函数的性质。平均函数的方法在本书的后面部分有广泛的应用。

第三章叙述完全加法集合函数的理論。在证明了这理論的几

个初步定理后，就給出关于完全加法集合函数分解为特异部分与絕对連續部分之和的定理，但暂不加证明；同时还叙述和这分解有关的一些基本結果。对一个变数的情形作了詳細的討論。此外，还研究在一般情形下的絕对連續集合函数，以及建立多变数勒貝格-斯提勒杰斯积分的变数代换公式。

在第三章的末尾，給出上面提到的关于完全加法集合函数分解为两个部分的定理的证明。此外，还引入多維情形的黑林格尔积分的概念，并研究它的性质。特别是指出黑林格尔积分与勒貝格-斯提勒杰斯积分的联系。对一个变数的黑林格尔积分作了詳細的研究。第三章后面部分的全部证明，是以前面詳細研究过的完全加法集合函数的性质为基础的[78, 79]。

第四章叙述度量空間与賦范空間一般理論的基础。这一章的后面部分詳細地研究广义导数，关于各种不同函数空間的嵌入定理，以及連續可微函数空間上泛函的理論。所有这些問題都与С. Л. 索伯列夫卓有成效的研究有关，这些研究成果反映在他的“泛函分析在数学物理中的应用”(1950 年)一书中。

我們用两种方法定义广义导数，其一是借分部积分公式建立的，另一由封閉具有連續导数的函数建立的，而且证明这两个定义是等价的。对于星形域的情形作了专門的討論。此外还引入完备賦范函数空間 $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ 与 $W_p^{(l)}(D)$，前者由那些在域 D 中定义并具有所有前 l 阶广义导数而函数本身及这些导数均屬于 $L_p(D)$ 的函数 $\varphi(x)$ 組成，后者是由那些具有所有前 l 阶各种可能广义导数的函数 $\varphi(x)$ 所組成。在其后证明，对于一类較寬广的域 D，$\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ 与 $W_p^{(l)}(D)$ 由同样的函数集合組成，而且对它們引入的范数是等价的。其次，对于空間 $W_p^{(l)}(D)$，相当簡单地证明一些关于 $W_p^{(l)}(D)$ 的嵌入定理的特殊情形的定理。

还有，这些定理都是先叙述，然后再給出用小号字排印的完全

证明。证明是以 С. Л. 索伯列夫的积分表示为基础的。所有这些材料与索伯列夫的上述著作都有密切的联系。

在最末的第五章中叙述希尔伯特空間的一般理論，而且全部理論首先对有界算子作出。对于含有全連續算子的綫性积分方程的各个弗列德和蒙定理作了证明。对于賦范空間則只叙述这些定理而证明付闕。

对于具有連續譜的自共軛算子，借助于黑林格尔积分用微分解給出相应的积分表現。举出 l_2 与 L_2 上有界算子一般理論的一些应用例子。

第五章的最后一节是討論希尔伯特空間中的无界算子的理論的。在证明了这理論的一些一般定理后，举出大量具有一个或多个变数的微分算子的例子。在討論了扩展閉对称算子的一般理論后，专門研究了半有界算子的情形，特别是它們按弗列德列克斯的扩展。

計划出版的第六卷，是叙述具有一个或多个自变量的微分算子的若干現代理論問題。

在写本书时，我除了使用一些专題文献外，还有另外不少的著作。現在举出主要的几种：В. И. 格利汶科的“斯提勒杰斯积分”，И. П. 那湯松的“实变函数論基础”，薩克斯的“积分論”，瓦雷·布桑的“勒貝格积分·集合函数·貝尔类”，斯通的“希尔伯特空間中的綫性变換及其在分析上的应用”，Н.И. 阿赫叶澤尔和 И.М. 格拉兹曼的“綫性算子的理論”，А. И. 蒲列斯涅尔的“綫性算子的譜理論”(数学进展第九卷，1941 年)，以及該卷中的 Н. И. 阿赫叶澤尔的“雅可比无穷矩陣与矩量問題”，还有 С. Л. 索伯列夫的“泛函分析在数学物理中的应用”一书。

我应向 С. М. 罗辛斯基表示謝意，他看过本书的初稿并提出一系列的宝貴意見。

本书第二部分（四——五章）中的許多問題的叙述是屬于O. A. 拉德任斯卡婭教授的。她是本书这部分的作者之一。我还与她詳細地討論过本书的結构。

M. C. 别尔曼对本书的第二部分的完成有很大的帮助。关于嵌入定理的几节[**114—118**]以及譜的微小摄动理論[**198**]的叙述是屬于他的。他曾对对称算子的譜及其扩展的問題以及第四章的写作提出了不少宝貴的意見。

我应向O. A. 拉德任斯卡婭和M. C. 别尔曼致深切的謝意。沒有他們的帮助我就不能完成本书的全部工作。

Г. П. 阿基洛夫看过本书的前三章，从中我得到許多关于某些問題的論述方面的宝貴意見。特向他表示深切的謝意。

B. 斯米尔諾夫　1959. 7. 20.

第一分册目录

第三章 集合函数·絕对連續性·积分概念的推广

第一章　斯提勒杰斯积分

1. 集合及其势　应用数学分析于近代自然科学时，各种积分概念都起着很大的作用，因此在第一、二两章中，我們将以更一般的形式来讲积分理論。在本节中先介紹一些集合論的初步知識。这些知識是对[IV; 15]中所述的补充。

設有两个由某种物体(元或元素)形成的集合 A_1 及 A_2。所謂两集合有相同的势，是指在 A_1 的諸元与 A_2 的諸元之間有一一对应的关系，就是說，有一对应关系，对于每一屬于 A_1 的元，必有一屬于 A_2 的确定元与它相应，反之，对于 A_2 的每一元，必有一个屬于 A_1 的元而且只有一个这样的元与它相应。无穷集合(即包含无穷多个元的集合)叫做可計的或可数的，是指它与全部正整数所成的集合有相同的势，也就是說，这集合的諸元可以用正整数来編号：$a_1, a_2, a_3, \cdots$。两个可数集合必有相同的势。現在叙述一下可数集合的某些性质。考察可数集合的一个无穷子集合，設后者由 $a_{p_1}, a_{p_2}, \cdots$等构成，其中 $p_1, p_2, \cdots$是一个正整数的增序列。这新集合的元也可以用正整数来編号。每个元的标号就是 p 的足标。換句話說，新集合中的元是按递增指数 $p_1, p_2, \cdots$的次序来編号的。如此，可数集合的无穷部分仍是可数集合。現在考察两个可数集合：由諸元 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 組成的 $A(a_1, a_2, a_3, \cdots)$，及由諸元 $b_1, b_2, b_3, \cdots$組成的 $B(b_1, b_2, b_3, \cdots)$；作二者之和，即把屬于上面两个集合的一切元合成一个集合 C。如此而得的新集合 C 通常叫做集合 A 及 B 的和。这新集合仍是可数的。事实上，只須把 C 中的諸元依下面次序排列：$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$，就可以看出其可数性。如果諸元 a_k, b_l 中有相同的，則应保留其中一个，而去掉其余的。对于有

穷多个可数无穷集合之和，相似的推理也适用，就是説，有穷多个可数集合之和仍是可数集合。

設有可数多个可数集合。所有这些集合的元可以用具有两个整数标号的字母 $a_p^{(q)}$ 来表示。上标号表示这元所屬的集合标号，而下标号表示这元在包含它的集合中所具有的标号。不难把这一切元 $a_p^{(q)}$ 用正整数来編号。取上下标号都是 1 的元做第一个元：$a_1^{(1)}$。此后取上下标号之和为 3 的諸元，并把它們依其上标号增加的順序排列下来：$a_2^{(1)}$，$a_1^{(2)}$。于是得到諸集合之和中的第二元与第三元。再取上下标号之和为 4 的諸元，并把它們依其上标号增加的順序排列下来：$a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}$。这就給出了諸集合的和中的第四元、第五元及第六元。继續作下去，可以看出可数多个可数集合的和仍是可数集合。显然，如果集合和中某些項不是可数集合，而是有穷集合，則上面命題仍然有效。

設有一无穷集合 A。由其中取某一元，并附以标号 1。所余剩的集合仍是无穷的。由它再取出一元，并附以标号 2。继續下去，可知由任一无穷集合必可提出一个可数集合。經过如此提取后所余的集合可能是空的（就是説，它可能不含任一元），也可能是有穷的，也可能是无穷的。我們证明，如果所余集合是无穷的，那末它与原来集合有相同的势，就是説，下面的命題是正确的：如果由无穷集合 A 中提出可数集合 P 来，而余下的是一无穷集合 B，那末集合 A 及 B 有相同的势。由无穷集合 B 重新取出某一可数集合 Q，并設 C 是所余集合。如此原来的集合 A 分解成三个集合 $A= =P+Q+C$，而其中的集合 C 可能是空的，也可能是无穷的，而 P 及 Q 都是可数集合。在第二次提取之前，$A=P+B$。不难在 A 及 B 的諸元間建立一一对应关系。事实上，$A=P+Q+C$，$B= =Q+C$。可数集合之和 $P+Q$ 仍是可数集合，所以在 $P+Q$ 及 Q 的諸元之間可以建立一一对应。集合 C 中的每一元与它自己对

应。如此可以在A及B的諸元間建立一一对应。由所证的命题直接可得:如果对于无穷集合增添一可数集合,則所得的新集合与原来的集合有相同的势。在上述关于减去和增添可数集合的两个命题中,如果把可数集合换成有穷集合,則命题依然有效。证明与上面完全一样。

以前曾证明过[**IV**; **15**],屬于某一区間$[a, b]$的一切有理数的集合是可数集合,全部有理数的集合也是可数集合。其证明与证明"可数多个可数集合之和仍是可数的"这一命题完全一样。分数的分子起着上标号的作用,分母起着下标号的作用,而首先只要考察正分数。現在举一个不可数集合的例。考察凡屬于区間$[0, 1]$的实数。除零以外,其中每个数可以表成无尽十进小数,其整数部分是零;反之,凡如此的十进小数一定与上述区間中的一个实数相应。我們不使用有尽小数,因为这种有尽小数与那些以9为周期的无尽小数表示同样数,例如$0.37=0.36\dot{9}99\cdots$。我們证明上述实数的集合是不可数的。用归謬法证明。設上述一切十进小数,包括代表区間左端的小数$0.00\cdots$,是可数的并附好标号。依下述方式作一个新的十进小数,其整数部分是零。取某一与第一个十进小数的第一位数不同的数字做第一位数,取某一与第二个十进小数的第二位数不同的数字做第二位数,等等。作新的十进小数时我們不使用0做任何一位上的数,于是所得的无尽十进小数与原有的一切十进小数相异。如此与它相应的实数沒有包含在上面那可数集合之中,这与所設区間$[0,1]$中一切实数已附好标号这一事实相冲突。如此证明了:屬于区間$[0,1]$的一切实数是不可数的。我們說这集合具有連續統的势。不难看出,屬于任意一个有穷区間$[a, b]$的一切实数的集合与屬于区間$[0,1]$的一切实数的集合具有同样的势。这两集合諸元間的一一对应关系由公式$y=\frac{x-a}{b-a}$給

出。当 x 遍历区間$[a, b]$时，变数 y 就遍历区間$[0, 1]$。如果引用公式 $y=\mathrm{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$，那末当变数 x 在区間$[0, 1]$內变化时，变数 y 遍历一切实数的集合，就是說由一切实数所組成的集合也具有連續統的势。如果不把区間的端点算在集合之中，那末其势并不改变，因为对于无穷集合增添或减去一个有穷集合并不改变其势。

在下面，我們常用記号$[a, b]$表示閉区間，而不包含端点的开区間則用記号(a, b)表示。如果左端不算入，而右端算进去，我們用記号$(a, b]$表示，同样可規定記号$[a, b)$的意义。这里的数 a 及 b 也可以取无穷值：$a=-\infty, b=+\infty$，就是說所論的区間可以在左边或在右边是无穷的。例如閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 包含两个无穷远点。与此相应，函数 $f(x)$ 也可以在 $x=-\infty$ 及 $x=+\infty$ 处定义，例如，可以引用記号 $f(-\infty)$。在 $x=-\infty$ 处 $f(x)$ 的連續性与条件 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty)$同效。同样可以处理 $x\to+\infty$ 的情形。

此外，也可以应用通常的表示法 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty+0)$及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty-0)$。

不难证明[**I**; **43**]，閉区間$[-\infty, +\infty]$上的有界連續函数$f(x)$一定在这区間上一致連續。

2. 斯提勒杰斯积分及其基本性质 回忆一下黎曼积分的定义，这种积分在前几卷中是常用的。設$[a, b]$是一个有穷区間，而 $f(x)$ 是定义于这区間上的有界函数。把这区間分割成部分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，在每一部分区間$[x_{k-1}, x_k]$上取某一点 ξ_k，并作乘积的和：

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}). \tag{1}$$

如果无限地把区間分細，并随意地取点 ξ_k 时，这个和有确定的极限 A，那末这极限值称做 $f(x)$在区間$[a, b]$上的积分。設 δ 是

諸差 x_k-x_{k-1} 中的最大者。无限地細分区間 $[a, b]$ 成部分与 $\delta\to 0$ 同义；而所謂在(1)中之和有确定极限 A 存在，与下面所說的同义．对于任意預定的正数 ε，存在一正数 η，使当 $\delta\leqslant\eta$ 时，

$$\left| A-\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \right| \leqslant \varepsilon.$$

我們可以用同样方式建立更一般的积分观念。这是由荷兰数学家斯提勒杰斯在 1894 年研究連分数时首先引进的，其后得到很寬广的发展，并在純粹数学問題与自然科学問題中都得到应用。設在有穷区間 $[a, b]$ 上給出两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 并設二者在这区間上每一点处都取有穷值。今不用和(1)，而代之以和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]. \tag{2}$$

这和叫做黎曼-斯提勒杰斯和。如果无限地細分区間，并随意地取点 ξ_k 时，上面的和趋于确定的有穷极限，那末我們說函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上依 $g(x)$ 可积，并写成

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\lim\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})].$$

在黎曼积分中 $g(x)$ 的任务由 x 担当。显然，現在介紹的新积分有很多类似于黎曼积分的性质，这些性质的证明也与对于黎曼积分的证明完全相同。現在枚举这些性质，并設下列各式中的一切积分都存在：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a^b \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(x)dg(x)=\sum_{k=1}^{p} a_k \int_a^b f_k(x)dg(x);\\
&\int_a^b f(x)d\sum_{k=1}^{p} a_k g_k(x)=\sum_{k=1}^{p} a_k \int_a^b f(x)dg_k(x);\\
&\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x).
\end{aligned}\right\}\text{(a_k 都是常数).} \tag{3}$$

此外还有一个明显的公式:

$$\int_a^b dg(x)=g(b)-g(a). \tag{4}$$

在 (3) 的前两式中，由右面的积分的存在可推知左面积分存在。

現在詳細地推出分部积分公式。設函数 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在,我們证明 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在。变更和(2),把函数 $g(x)$ 在相同点取值的項归并,得

$$\sigma=-\sum_{k=1}^{n-1}g(x_k)[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)]+g(b)f(\xi_n)-g(a)f(\xi_1)$$

加上差值

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b=f(b)g(b)-f(a)g(a),$$

再減去它,可写成

$$\begin{aligned}\sigma=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\Big\{&\sum_{k=1}^{n-1}g(x_k)[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)]+\\&+g(a)[f(\xi_1)-f(a)]+g(b)[f(b)-f(\xi_n)]\Big\}.\end{aligned} \tag{5}$$

在花括弧中者恰是 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分之黎曼-斯提勒杰斯和(2)。依所知条件, $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在,这就是說当无限細分区間时,花括弧中之和趋于这积分值。如此,依(5),和 σ 有一极限值,也就是說, $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在，并且可以写成分部积分公式

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b g(x)df(x) \tag{6}$$

或

$$\int_a^b f(x)dg(x)+\int_a^b g(x)df(x)=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b, \tag{7}$$

而在这式中，由两积分中的一个存在可推得第二个存在。

斯提勒杰斯积分有两种特殊情形，現在提一下。設区間$[a,b]$分割成有穷多的部分: $a=c_0<c_1<\cdots<c_{p-1}<c_p=b$, 并且在每个部分区間$(c_{k-1},c_k)$中函数 $g(x)$ 的值是常数 g_k。如此在位于区間$[a,b]$中每一点 c_k 处, 函数 $g(x)$有一跃度 $s_k=g_{k+1}-g_k$。可能在区間两端也有跃度: 在左端是 $s_0=g_1-g(a)$, 而在右端是 $s_p==g(b)-g_p$。再設函数 $f(x)$在一切間断点 c_k 处并在区間端点处連續。設 c_q 点不是和(2)中分割区間的点，但 c_0 与 c_p 除外。在和(2)中，如一項里的 x_{k-1} 与 x_k 是在同一区間(c_{q-1},c_q)中，那末这項必等于零，因为在这情形下，$g(x_{k-1})=g(x_k)$。如果区間$[x_{k-1},x_k]$包含間断点 c_q, 則当无限地細分区間时，$f(\xi_k)$趋于$f(c_q)$, $g(x_k)--g(x_{k-1})$趋于 s_q, 而显然(2)中之和趋于下列的有穷和:

$$\lim\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{q=0}^{p}f(c_q)s_q. \tag{8}$$

如果点 c_q 是分割$[a,b]$的点，那末要考虑以 c_q 为端点的两个区間，而其結果一样。現在考察第二种特殊情形。設 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上是連續的，而 $g(x)$在$[a,b]$上有导函数 $g'(x)$, 并且后者是黎曼可积的，从而是有界的。对于差值 $g(x_k)-g(x_{k-1})$ 使用拉格朗日公式，可以把和(2)写成下面形式:

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1}), \tag{9}$$

式中 ξ_k' 是位于$[x_{k-1},x_k]$內部的数。我們可以令 $f(\xi_k)=f(\xi_k')++\varepsilon_k$, 由于$f(x)$在$[a,b]$上是一致連續的，故当无限地細分区間时，$|\varepsilon_k|$中的最大者趋于零，也就是說，对于任意預定的正数 ε, 存在一个正数 η, 当 $\delta<\eta$ 时就有$|\varepsilon_k|<\varepsilon$。我們可以把(9)中的和写成

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1}). \quad (9_1)$$

两个黎曼可积函数的积还是可积分的[**I**; **117**], 因此在上面的公式中, 当无限地細分区間时右边第一和数趋于积 $f(x)g'(x)$ 的黎曼积分。不难证明第二和数趋于零。事实上, 依假設, 函数 $g'(x)$ 是有界的, 即有一确定的正数 M, 使 $|g'(x)|<M$。上面已經說过, 如果給定一个正数 ε, 必有一正数 η 存在, 使当 $\delta<\eta$ 时就有 $|\varepsilon_k|<\varepsilon$。于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k g'(\xi_k')(x_k-x_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon M(x_k-x_{k-1})=\varepsilon M(b-a),$$

由于 ε 是任意的, 故式 (9_1) 中右边的第二和数趋于零。如此取极限可得

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=\int_a^b f(x)g'(x)\,dx, \tag{10}$$

就是說, 在前述的假定下, 斯提勒杰斯积分归結为平常的黎曼积分。在前面的第一情形中, 則归結为有穷和。不难证明, 如果不設 $f(x)$ 連續而設它是黎曼可积的, 那末公式(10)依然成立。在以后我們将討論上面所定义的斯提勒杰斯积分存在的問題, 也将論及一些将来再定义的更一般的积分的存在問題。在这里, 重要的乃是假定函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是不减的。

以后常把不减函数叫做增函数。对于这样的函数 $g(b)$ 是其最大值, $g(a)$ 是其最小值。下面一节是准备性的。它不但对于研究上面所定义的斯提勒杰斯积分的存在問題有基本的意义, 就是对于研究以后将介紹的更一般型的积分問題也是如此。

3. 达布和 在討論黎曼积分时曾介紹过所謂达布和。对于以后将介紹的所有推广的积分概念, 相类似的和也起着基本的作