高等学校函授教材

理论力学

下册

汪厚礼 周巨伯 李廷孝 编

水利电力出版社

高等学校函授教材

理　论　力　学

下　册

汪厚礼　周巨伯　李廷孝　编

水利电力出版社

内 容 提 要

全书分为上、下两册共有三篇。本书为下册，由第三篇动力学的十章组成。内容包括：动力学的基本定律，动量定理，动量矩定理，动能定理，碰撞，动静法，虚位移原理，拉格朗日方程，单自由度系统的振动及质点的相对运动。

本书为高等学校函授教材，适用于土建、水利、机械等类专业的本科函授教学，也可作为同类专业业余教育和自学用书。

高等学校函授教材

理 论 力 学

下 册

汪厚礼 周巨伯 李廷孝 编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 25印张 570千字

1990年10月第一版 1990年10月北京第一次印刷

印数 0001— 1660册

ISBN 7-120-01118-9/TV·382

定价 11.50元

目　　录

第三篇　动　力　学

绪　　言

上册讨论的静力学和运动学不仅在工程技术上有重要意义，而且为进一步研究物体机械运动的一般规律奠定了基础。

在静力学中，研究了作用在物体上的力系平衡的条件，就是说只研究了在力系作用下，物体处于平衡或静止状态的条件，没有讨论物体在不平衡力系的作用下，运动状态将怎样改变。在运动学中，也只是从几何方面研究了物体的运动描述，而未涉及物体所受的力。事实上，物体运动状态的改变与作用在这物体上的力是密切相关的。动力学的任务是**研究物体的运动变化与作用在物体上的力之间的关系，从而建立物体机械运动的普遍规律**。因此动力学是理论力学中最普遍、最重要的一部分。

动力学知识，在工程技术和自然科学中有着广泛的应用。特别是今天，随着现代化生产的发展，科学技术的进步，对人们提出了越来越多的动力学问题。例如，在机械工程中，从设计、选材到制造都需要进行动力分析和计算，尤其是高速旋转机械的均衡与振动问题、动反力问题更不能忽视；在水利、土建工程中，结构物的振动与抗震问题、动力基础的隔振与减振问题，在设计、施工和使用过程中都必须加以考虑和解决；在宇航工程中，如人造卫星的发射和运行轨道、火箭反推力与飞行方向的控制等等问题，都需要动力学的基本知识。虽然这些问题涉及到许多专门的领域，不可能在本课程中解决，但动力学的基本理论和方法，却是研究和解决这些问题必不可少的重要基础。因此，学好动力学有着十分重要的意义。

在动力学中经常用到两种力学模型：质点和质点系。

质点是具有一定质量的几何点。当物体的大小和形状与所研究的问题无关或不起明显作用，因而可以忽略不计时，便可将物体抽象为质点。例如，研究人造地球卫星的运行轨道及运动规律时，可将卫星抽象成一质点；当刚体作平行移动时，体内各点的运动情况完全相同，因而这刚体也可抽象为一质点来研究。

质点系（有时称系统）是有限个或无限个相互联系着的质点的集合。质点系的含义十分广泛，它既可指固体、液体或气体，也可指刚体或由几个体刚体组成的系统。在动力学中，将着重研究质点系的动力学问题。

第十二章　动力学的基本定律

学　习　指　导

本章的内容是动力学的基本定律和由它导出的质点的运动微分方程。重点是应用质点的运动微分方程求解质点动力学的两类问题（已知运动，求力；已知力，求运动）。

学习本章的要求和应注意的问题：

（1）动力学的基本定律是牛顿总结的运动三定律。这些内容虽然在物理学中已学过，但它是动力学的理论基础。学习时应深刻领会定律的内容、概念（如惯性、质量、惯性参考系等）以及适用范围。

（2）掌握质点运动微分方程的三种形式：矢量形式、直角坐标形式和自然轴形式，学会根据给定的条件，建立质点的运动微分方程的方法。

（3）熟练掌握质点动力学两类问题的一般解法。第一类问题比较简单，在解算过程中不会遇到数学上的困难。第二类问题比较复杂，学习时要注意：分清力是常力还是变力，如果是变力，要建立力的函数形式；求微分方程的解时会出现积分常数，这些常数应由运动的初始条件来确定。

第一节　动力学基本定律

在人们长期的生产活动与科学实验的基础上，牛顿总结了前人的研究成果，加上他自己的观察和实验，提出了三条运动定律。这些定律通常称为**牛顿运动定律**，它是动力学的理论基础，现将这几条定律叙述如下：

第一定律　**任何物体如果没有受到外力作用，都将保持静止或匀速直线运动状态。**

这个定律表明，任何物体都具有保持原有的运动状态不变的特性。这种特性称为**惯性**。因此，第一定律又称为**惯性定律**。物体的匀速直线运动就称为**惯性运动**。但必须指出，不受力作用的物体是不存在的。由静力学知，若作用在物体上的力系为平衡力系，则该力系的效应等于零。因此，呈惯性运动的物体不是不受力作用的物体，而是受平衡力系作用的物体。

惯性定律不仅指出了物体具有惯性，而且定性地说明了力和运动状态改变之间的关系，定律表明：若物体不受力作用，则运动状态保持不变；反之，运动状态发生改变，物体必定受到力的作用。可见，力是使物体的运动状态发生改变的原因，或者说，力是使物体获得加速度的原因。

第二定律　**当物体受外力作用时，该物体所获得的加速度的大小与力的大小成正比，而与物体的质量成反比；加速度的方向与力的方向相同。**这定律可用矢量形式表示为

$$\boldsymbol{F}=k m \boldsymbol{a}$$

式中 m——物体的质量;

$\boldsymbol{F}$——作用在物体上的力;

$\boldsymbol{a}$——在这力作用下物体获得的加速度;

k——比例系数，它决定于力、质量和加速度的单位。

如果选择适当的单位，可令 $k=1$，于是上式可写成

$$m \boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{12-1}$$

若物体同时受到若干个力作用，则这个物体的加速度等于每个力单独作用于该物体时所获得的加速度的矢量和，这就是**力的独立作用原理**。因此，当物体同时受到 n 个力作用时，第二定律又可表为

$$m \boldsymbol{a}=\Sigma \boldsymbol{F}_i \tag{12-2}$$

可见，第二定律中所说的力$\boldsymbol{F}$既可以是一个力，也可以是若干个力的合力。

第二定律建立了力、质量、加速度三者之间的关系。由这定律可知，在相同的力作用下，质量愈大的物体，获得的加速度愈小，这说明物体的运动状态不容易改变，或者说，物体保持原有运动状态的能力大，即物体的惯性大；反之，质量愈小的物体，获得的加速度就愈大，这说明物体的运动状态容易改变，或者说，物体保持原有运动状态的能力小，即物体的惯性小。因此，质量是物体惯性的量度。在第二定律中，对于给定的物体，质量被认为是不变的量。但由相对论力学知，当物体运动的速度接近于光速时，物体的质量是随速度的不同而改变的。在工程实际中，由于我们所考察的物体运动的速度远小于光速，所以把质量看作常量是足够准确的。

应用这个定律时，要注意两点：

（1）由于力和加速度都是矢量，所以式（12-1）或式（12-2）是矢量形式。它说明加速度的方向始终与力或合力的方向相同。

（2）定律中的加速度是指某一瞬时的加速度，所以力与加速度的关系是瞬时关系。这就是说只有力作用时，物体才获得加速度。若某瞬时作用在物体上的力为零，则此瞬时物体的加速度也等于零；若在某一段时间内，作用于物体的力始终等于零，则在此段时间内物体的加速度也始终等于零，这就是第一定律所表明的情况。但决不能认为第一定律只是第二定律的特殊情形，因为第一定律是一个独立的定律，它说明了物体运动的惯性，并断定了物体惯性运动的客观存在。

当质量为m的物体在地球表面的真空中自由落下时，物体在重力$\boldsymbol{W}$的作用下，产生一向下的重力加速度$\boldsymbol{g}$。根据第二定律，得

$$m \boldsymbol{g}=\boldsymbol{W}$$

若将上式写成标量形式，则有

$$m=\frac{W}{g}$$

式中 W——重力的大小，通常称为重量；

g——重力加速度的大小，在工程问题中，一般取$g=9.80 \mathrm{m/s^2}$。

第二定律包含长度、时间、质量和力 4 个物理量。这 4 个量之间只能选择其中的 3 个量作为基本量。由于选择的基本量不同，形成了不同的单位制。

本书采用的国际单位制(SI)，是以长度、时间和质量作为基本量，并以它们的单位：米（m）、秒（s）和千克（kg）作为基本单位。力是导出量，它的单位是导出单位。力的单位是这样规定的：使质量为 1 kg 的物体获得 1 m/s² 的加速度所需要的力的大小，用基本单位表示为 1 千克·米/秒²（1kg·m/s²），称为1牛顿（N），即

$$1(\mathrm{N})=1(\mathrm{kg})\times 1(\mathrm{m/s^2})=1(\mathrm{kg\cdot m/s^2})$$

根据第二定律，质量为1kg的物体，它的重量是

$$W=mg=1\mathrm{kg}\times 9.80\mathrm{m/s^2}=9.80\mathrm{N}$$

第三定律　**两个物体之间相互作用的力，即作用力与反作用力，总是大小相等，方向相反，作用线重合，分别作用在这两个物体上。**

此定律在静力学中曾作为公理四介绍和应用过。这里是作为动力学的定律提出的。第三定律对于所有的力不论是常力还是变力，也不论相互作用的两个物体是处于平衡状态还是运动状态发生变化，以及在力作用的每一瞬时都是适用的。在动力学中，这个定律仍然是分析物体间相互作用关系的依据，尤其对于研究质点系的动力学问题具有重要意义。

上面介绍的牛顿运动三定律就是动力学的基本定律。应用这些定律时，参考系不能任意选择，因为牛顿运动定律不是对任何参考系都成立的。把牛顿运动定律能够成立的参考系，称为**惯性参考系**。要确定一个参考系是不是惯性参考系，只能由观察和实验来确定。实践表明，在绝大多数工程问题中，如不考虑地球自转的影响时，可将固结在地球上或相对于地球作匀速直线运动的参考系作为惯性参考系，对于这样的参考系，应用牛顿运动定律，所得结果是足够准确的。如果需要考虑地球自转的影响，可以选择以地心为原点、3 根轴分别指向 3 颗恒星的参考系作为惯性参考系。本书中如无特别说明，都是将固结在地球上的参考系作为惯性参考系。

必须指出，牛顿运动定律只适用于研究速度远小于光速的宏观物体的运动，而不适用于研究接近光速的物体的运动和微观粒子的运动。由于牛顿所处时代的生产力水平的限制，他在叙述运动定律时，引入了与物质运动完全无关的“绝对空间”与“绝对时间”的观念，把空间和时间与物质运动割裂开来。近代科学实践已经证明，空间和时间与物质的运动是不可分割的。这就是说，空间和时间与物质的运动速度有关。但是，当物体运动的速度远小于光速时，速度对空间和时间的影响极其微小，应用牛顿运动定律解决一般工程技术中的力学问题可以获得足够准确的结果。因此牛顿运动定律仍然在工程实际中广泛应用。

思　考　题

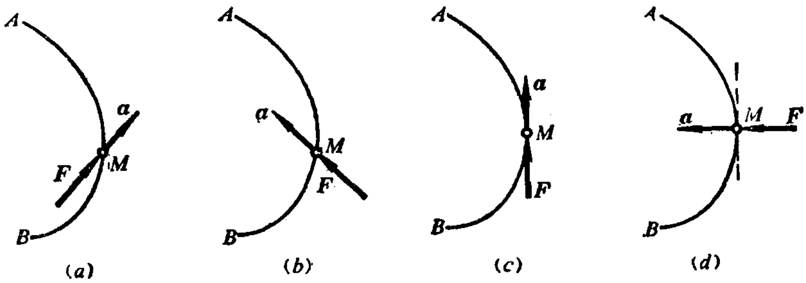
12-1　一个物体如果运动，试问这物体是否一定受有力的作用？物体的运动方向（即速度方向）是否一定与所受的力的方向一致？

12-2　质点运动时，是否速度大受力也大，速度小受力也小，速度等于零则不受力？

12-3　绳的一端固定，另一端系一质量为m的小球，使它在水平面内作圆周运动。问

小球除受绳的张力作用外，是否还受向心力和离心力的作用？为什么？

12-4　设质量为m的质点M沿轨迹曲线AB运动，试判别在图示4种情形中，质点M的运动哪种是可能的，哪种是不可能的？



思 12-4图

第二节　质点运动微分方程

设质量为m的质点M在力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、…、$\boldsymbol{F}_n$的作用下沿一空间曲线运动，加速度为$\boldsymbol{a}$，如图12-1所示。

由运动学知，$\boldsymbol{a}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$，式中$\boldsymbol{r}$为质点$M$对固定点$O$的矢径。于是根据式（12-2），有

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\Sigma\boldsymbol{F}_i \tag{12-3}$$

式（12-3）称为质点运动微分方程的矢量形式。应用此式解决实际问题时，常将它写成投影形式。

1.质点运动微分方程的直角坐标形式

如以任一固定点O为原点，作直角坐标系$Oxyz$（图12-1），将矢量方程式（12-3）向直角坐标轴投影，得到

$$\left.\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2}&=\Sigma X_i\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=\Sigma Y_i\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=\Sigma Z_i\end{aligned}\right\} \tag{12-4}$$

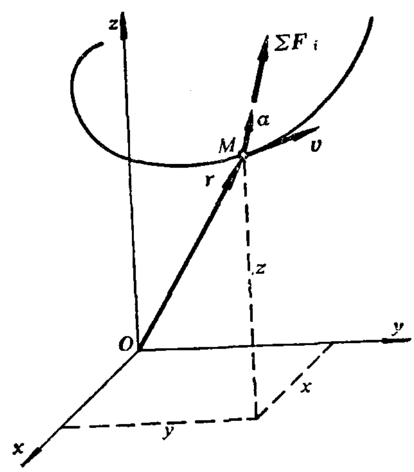


图 12-1

式中　x、y、z——质点M的坐标；

ΣX_i、ΣY_i、ΣZ_i——各力在坐标轴上的投影的代数和。

2.质点运动微分方程的自然轴形式

当质点M的轨迹为已知时，可在轨迹上任取一点O作为原点，并规定正负方向。质点

M在任意位置的自然轴可用单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$来表示，如图12-2所示。将矢量方程式（12-3）向自然轴投影，得到

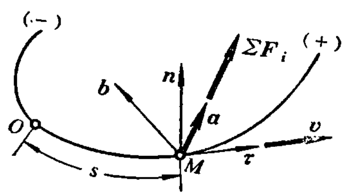


图 12-2

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2s}{dt^2} &= \Sigma F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= \Sigma F_n \\ 0 &= \Sigma F_b \end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}5)$$

式中　s——质点M的弧坐标；

ρ——轨迹上质点M所在位置的曲率半径；

ΣF_τ、ΣF_n、ΣF_b——各力在自然轴上的投影的代数和。

第三节　质点动力学的第一类问题

质点的动力学问题可以分为两类：第一类是已知质点的运动（即运动方程或速度方程或加速度方程等），求质点所受的力；第二类是已知质点所受的力，求质点的运动。本节讨论第一类问题。

应用运动微分方程求解质点动力学的第一类问题比较简单，如已知质点的运动方程，只需将它对时间 t 求两次导数，代入式（12-4）或式（12-5）中便可求得作用在质点上的力。

下面举例说明此类问题的解法。

【例 12-1】 重量为 W 的人站在电梯底板上，如图 12-3(a)所示。电梯以匀加速度 $\boldsymbol{a}$ 上升，试求电梯底板对人的约束反力。

【解】（1） 确定研究对象。根据题意，人作加速直线平动，现要求底板对人的约束反力，故可将人视为质点，并作为研究对象。

（2）分析质点的受力，画受力图。当人在任意位置时，人所受的力有重力$\boldsymbol{W}$和底板的约束反力$\boldsymbol{N}$，受力图如图12-3(b)所示。

（3）分析质点的运动。人随电梯一起以匀加速度 $\boldsymbol{a}$作铅直向上的直线运动，故在任意瞬时，人也具有与电梯相同的匀加速度 $\boldsymbol{a}$，并将$\boldsymbol{a}$画在图12-3(b)上。

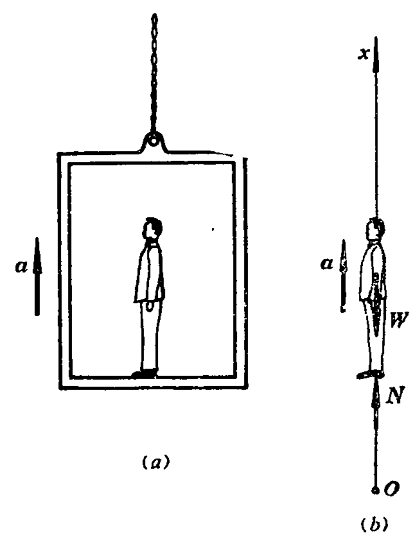


图 12-3

（4）建立质点运动微分方程，求未知量。因人作直线运动，故沿运动方向取 x 轴，向上为正（即与加速度$\boldsymbol{a}$的方向一致）。根据式（12-4），可得人的运动微分方程

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = N - W$$

式中$\frac{d^2x}{dt^2}$为加速度a在x轴上的投影，即$\frac{d^2x}{dt^2}=a$。将它代入上式后，解得

$$N=W\left(1+\frac{a}{g}\right)$$

从此结果可以看出，电梯底板对人的约束反力N的大小由两部分组成：一部分等于W，相当于电梯静止或作匀速直线运动时产生的反力的大小，故这部分反力称为**静反力**；另一部分等于$W\frac{a}{g}$，是因电梯作加速运动而产生的反力的大小，因而这部分反力称为**附加动反力**；总的反力N称为**动反力**。由此可见，动力学中的约束反力与静力学中的约束反力不同，它除与质点所受的主动力有关以外，还与质点的运动有关。

【例 12-2】 图12-4(a)是离心转速计的示意图。重量为P的小球固连在不计重量的杆AB的A端，杆的B端与转动着的铅直轴BE铰接。球受弹性线ACD的限制，此线穿过轴线与BC共线的套管CD，而末端固定在D。线的原长（即未受力时的长度）为CD，弹性系数（使线伸长单位长度所需的力）为c。设$AB=BC=l$，试求偏角α为定值时，转速计匀速转动的角速度ω与偏角α的关系以及杆AB所受的力。

【解】 因小球A的速度与转速计的角速度和偏角相关联，故将小球A作为研究的质点。

设小球位于偏角α为任意确定值的位置[图12-4(a)]，作用于小球A的力有：重力$\boldsymbol{P}$、杆的约束力$\boldsymbol{S}$以及线的弹性力$\boldsymbol{F}$，如图12-4(b)所示。在图中假设$\boldsymbol{S}$指向小球A，即假设杆AB受压。弹性力$\boldsymbol{F}$沿线AC，其大小与线的伸长AC成正比，即$F=cAC$，c为已知的弹性系数。

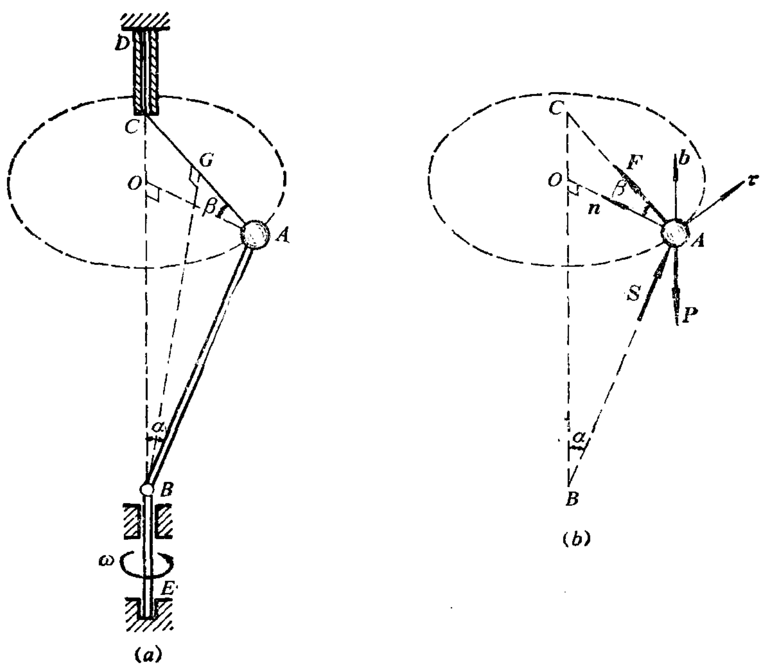


图 12-4

当偏角 α 为定值时，小球 A 只能在垂直于 BC 的平面内绕 BC 作圆周运动。由于研究对象的运动轨迹已知，所以本题取图12-4(b)所示自然轴系，应用自然轴形式的运动微分方程求解。

小球 A 的速度

$$v=\omega AO=\omega l\sin\alpha=\text{常量}$$

式中 $AO=l\sin\alpha$ 为小球的转动半径，如图12-4(b)所示。小球 A 的切向加速度 $a_\tau=\frac{dv}{dt}=0$；法向加速度 $a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{(\omega l\sin\alpha)^2}{l\sin\alpha}=l\omega^2\sin\alpha=\text{常量}$，方向沿 AO 指向点 O。

因为 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 始终在同一平面 ABC 内，它们在切线方向的投影都应等于零，所以只需沿主法线和副法线方向写出小球 A 的运动微方程。由式（12-5）有

$$\frac{P}{g}l\omega^2\sin\alpha=F\cos\beta-S\sin\alpha \tag{a}$$

$$0=F\sin\beta+S\cos\alpha-P \tag{b}$$

因题设 $AB=BC=l$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形。过点 B 作线段 BG 垂直于 AC，则由图12-4(a)所示几何关系可知

$$\beta=\frac{\alpha}{2},\quad AC=2l\sin\frac{\alpha}{2}$$

所以弹性力的大小

$$F=2cl\sin\frac{\alpha}{2}$$

将 β 和 F 代入式（a）、（b），得

$$\frac{P}{g}l\omega^2\sin\alpha=2cl\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-S\sin\alpha \tag{c}$$

$$0=2cl\sin^2\frac{\alpha}{2}+S\cos\alpha-P \tag{d}$$

若 $\sin\alpha\neq 0$，则由式（c）解得

$$S=l\left(c-\frac{P}{g}\omega^2\right)$$

根据牛顿第三定律，杆 AB 所受的力 $\boldsymbol{S}'$ 与 $\boldsymbol{S}$ 大小相等、方向相反。由式(d)有

$$cl(1-\cos\alpha)+S\cos\alpha-P=0$$

把 S 代入上式即可解得

$$\omega=\sqrt{\frac{(cl-P)g}{Pl\cos\alpha}}$$

这就是要求的 ω 与 α 之间的关系。当 $\cos\alpha=1$，$\omega=\sqrt{\frac{(cl-P)g}{Pl}}$ 时，转速计的小球飞不起来，因为 $\alpha=0$，表明 ω 小了；要使转速计的小球飞起来，必须是 $\cos\alpha<1$，$\omega>\sqrt{\frac{(cl-P)g}{Pl}}$。

因此，转速计作匀速转动只可能发生在$\omega>\sqrt{\frac{(cl-P)g}{Pl}}$时；如果$\omega\leqslant\sqrt{\frac{(cl-P)g}{Pl}}$，则$\alpha$始终等于零。

由以上例题可见，质点动力学的第一类问题的解题步骤大致如下：

（1）确定研究对象。根据题意将所考察的物体视为质点，并以它作为研究对象。

（2）分析质点的受力，画受力图。考察质点在任意位置所受的力，包括主动力和约束反力。在动力学中，约束对于运动质点作用的力称为动约束反力，简称动反力，通常它的大小是未知的，应由运动微分方程求出，其方向同静力学一样，按约束性质来确定。

（3）分析质点的运动。考察质点在任意瞬时的运动，计算该质点的加速度。根据质点的运动情况在受力图上标出研究对象的速度方向和加速度方向。如果加速度的方向暂时不能确定，一般可假设它与所选坐标轴的正向一致。

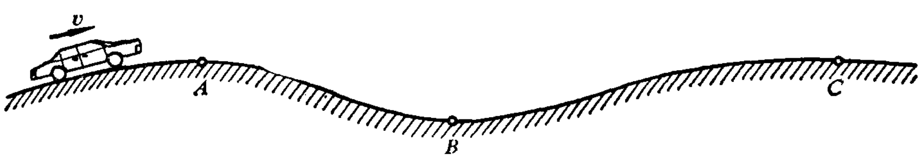
（4）建立质点的运动微分方程，求未知量。建立方程时坐标系可以任意选择，但要考虑计算是否简便。此外，还要注意两点：

1）式（12-4）是常用形式，而式（12-5）只有当质点的运动轨迹已知时才采用；

2）力和加速度在坐标轴上的投影是代数量，应注意它们的正负号，即力、加速度与轴的正向一致时取正号，反之取负号。

思　考　题

12-5　汽车以大小不变的速度v沿图示公路行驶，问当汽车通过路面上A、B、C 3处时，汽车对路面的压力是否相等？（C处路面水平）。

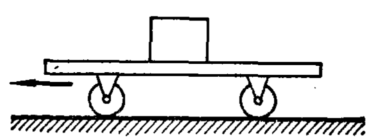


思 12-5图

12-6　重量为W的物块放在小车上，小车沿水平直线轨道运动，试问：

（1）若小车作匀速运动，物块相对于小车不动，物块的受力情况如何？

（2）若小车作加速运动，物块与小车间无摩擦阻力，物块的受力情况与运动情况如何？



思 12-6图

12-7　在动力学中，约束反力有何特点？

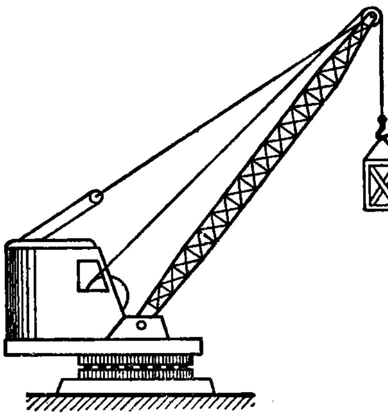
习　　题

12-1　图示起重机在起吊重量$W=20\text{kN}$的物体时，已知重物的加速度$a=5\text{m/s}^2$，试求铅直方向的那段钢丝绳的最大和最小拉力。挂钩与钢丝绳的质量均略去不计。

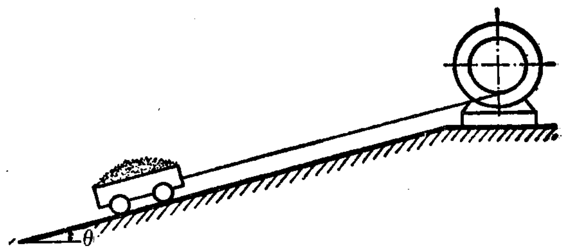
答：$T_{max}=30.2\text{kN}$，$T_{min}=9.8\text{kN}$

12-2　质量为70kg的载货小车，以1.6m/s的速度沿缆车轨道匀速下降。设轨道的倾角$\theta=15°$，小车运动的总阻力系数$f=0.015$，求小车下降时缆绳的张力；若小车开始制动到停止运动的时间为4s，此时小车作匀减速运动，求缆绳的张力。

答：$T_1=167.6\text{N}$，$T_2=195.6\text{N}$



题 12-1图



题 12-2图

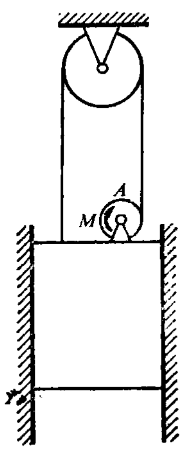
12-3　重为200N的物体沿水平直线作简谐运动，物体至某固定点的距离按方程$x=10\sin\dfrac{\pi}{2}t$变化（x以m计，t以s计），试求作用于该物体的力及其最大值。

答：$P=-503\sin\dfrac{\pi}{2}t$ N，$P_{max}=503\text{N}$

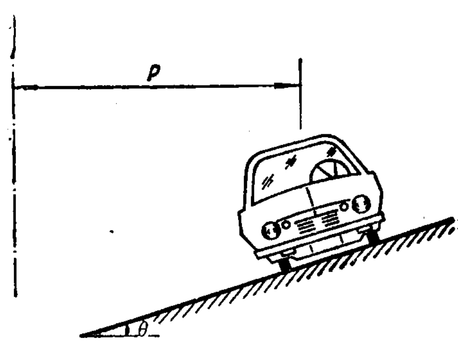
12-4　质量为2kg的质点，沿半径$r=5\text{m}$的水平圆弧轨道绕圆弧的圆心以角速度$\omega=t^2$转动（ω以rad计，t以s计），求质点在第2s末所受力的大小。

答：$F=165\text{N}$

12-5　鼓轮A在矩为M的力偶作用下将绳卷进，使质量为700kg的电梯沿铅直导轨向



题 12-5图



题 12-6图

上运动。若电梯在3.7m内从静止达到$v=3$m/s的速度，试求力偶矩M的大小。设鼓轮A的半径$r=20$cm，鼓轮的质量以及导轨与电梯之间的摩擦均略去不计。

答：$M=771.4$N·m

12-6　汽车以250km/h的等速率沿曲率半径$\rho=500$m的圆弧形道路转弯。路面倾角$\theta=30°$，问欲使汽车不发生侧向滑动，路面与车轮间的摩擦系数应为多少？

答：$f_{min}=0.259$

第四节　质点动力学的第二类问题

质点动力学的第二类问题是已知质点所受的力，求质点的运动。

在此类问题中，作用力可以是常力，也可以是变力，而变力可以是时间或坐标或速度的函数，也可以同时是这三者的函数（参阅第二十章）。当力或力的函数已知时，只需将它代入式（12-4）或式（12-5），通过积分便能求得质点的运动（如质点的速度方程、运动方程等）。因此，求质点的运动实际上是求运动微分方程的解。如果力的函数形式比较复杂，可能得不到解析解，只可能求得近似的数值解。在微分方程的通解中包含一些积分常数，这些常数应由质点运动的初始条件来确定。**初始条件**是指初瞬时质点所在的位置和它具有的速度，即初位置和初速度。因为对于同一质点来说，即使受到相同的力作用，如果运动的初始条件不同，求得的运动方程也不相同。可见，解决第二类问题，不仅需要知道作用在质点上的力，而且还要知道质点运动的初始条件，才能完全确定质点的运动。

现举例说明在这类问题中运动微分方程的建立及其解法。

【例 12-3】 排水量为P的轮船以初速$\boldsymbol{v}_0$沿直线运动。当船的速度增加时，螺旋桨的推力$\boldsymbol{Q}$的大小与时间成正比，即$Q=kt$，式中k为待定系数。设船受到水的阻力$\boldsymbol{R}$为常力。若在时间间隔t_1内，船的速度增至初速的2倍，试求这段时间内轮船所走过的路程s。

【解】 将轮船视为质点，沿船的运动方向取x轴，以船的初位置O为坐标原点；设在任意位置质点的坐标为x，作用于质点的力有：重力$\boldsymbol{P}$、浮力$\boldsymbol{D}$、螺旋桨的推力$\boldsymbol{Q}$以及水的阻力$\boldsymbol{R}$，受力图如图12-5所示。

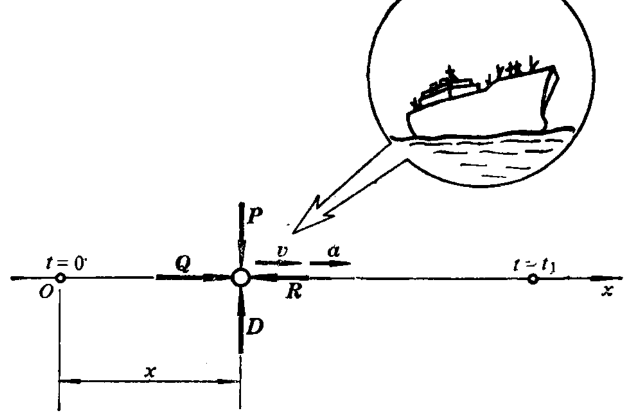


图 12-5

因船沿水平直线运动，加速度在铅直方向的投影等于零，故$\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{D}$构成一平衡力系。设质点在任意瞬时的速度为$\boldsymbol{v}$，加速度为$\boldsymbol{a}$，均沿x轴的正向，则由式（12-4）可得质点的运动微分方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=Q-R$$

即

$$m\frac{dv}{dt}=kt-R$$

方程右端显然含时间t，表明力是时间的函数。将上式分离变量后得

$$\frac{P}{g}dv=(kt-R)dt$$

为求速度v随时间t的变化规律，对上式进行积分。积分下限由运动的初始条件决定：当$t=0$时，船速为v_0；积分上限为任意瞬时t和与其对应的船速$\boldsymbol{v}$（这里，t，v均为变量）。于是有

$$\frac{P}{g}\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t(kt-R)dt$$

$$\frac{P}{g}(v-v_0)=\frac{k}{2}t^2-Rt$$

$$v=\frac{g}{P}\left(\frac{k}{2}t^2-Rt\right)+v_0 \qquad (a)$$

式（a）为速度随时间t的变化规律，即速度方程。根据题意还需求出质点的运动方程，为此，将$v=\dfrac{dx}{dt}$代入上式，并分离变量，得

$$dx=\left[\frac{g}{P}\left(\frac{k}{2}t^2-Rt\right)+v_0\right]dt \qquad (d)$$

对上式积分，积分下限仍由运动的初始条件决定：$t=0$时，$x_0=0$；上限是任意瞬时t和质点相应的坐标x（这里，t、x也是变量），故有

$$\int_0^x dx=\int_0^t\left[\frac{g}{P}\left(\frac{k}{2}t^2-Rt\right)+v_0\right]dt$$

$$x=\frac{g}{P}\left(\frac{k}{6}t^3-\frac{R}{2}t^2\right)+v_0t \qquad (b)$$

式（b）为质点的运动方程。

为了求得轮船在时间间隔t_1内所走过的路程s，还需先求出式（b）中的待定系数k。由题设条件知：当$t=t_1$时，$v=2v_0$。于是，从式（a）解得

$$k=\frac{2}{t_1^2}\left(\frac{P}{g}v_0+Rt_1\right)$$

将k值代入式（b），且当$t=t_1$时，$x=s$，从而求得

$$s=\frac{4}{3}v_0t_1-\frac{gR}{6P}t_1^2$$