TURING 图灵数学·统计学丛书 27

CAMBRIDGE

Inequalities

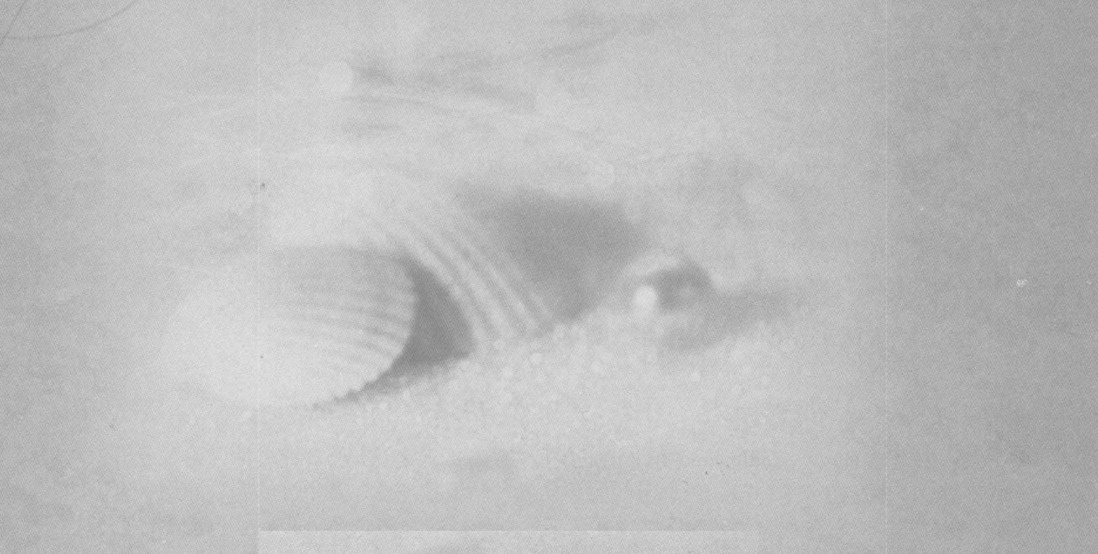
不等式

（第 2 版）

[英] G. H. Hardy
[英] J. E. Littlewood 著
[美] G. Pólya
越民义 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书 27



Inequalities

不等式

[英] G. H. Hardy
[英] J. E. Littlewood 著
[美] G. Pólya
越民义 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（ＣＩＰ）数据

不等式：第2版 / （英）哈代（Hardy, G. H.），（英）利特尔伍德（Littlewood, J. E.），（美）波利亚（Pólya, G.）著；越民义译. —北京：人民邮电出版社，2008.12

（图灵数学·统计学丛书）

书名原文：Inequalities，Second Edition

ISBN 978-7-115-18802-1

I. 不… II. ①哈…②利…③波…④越… III. 不等式 IV. O178

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第137297号

内 容 提 要

本书是由 Hardy、Littlewood 和 Pólya 合著的一部经典之作. 作者详尽地讨论了分析中常用的一些不等式, 涉及初等平均值、任意函数的平均值和凸函数理论、微积分的各种应用、无穷级数、积分、变分法的一些应用、关于双线性形式和多线性形式的一些定理、Hilbert 不等式及其推广等内容.

本书适合于高等院校数学专业高年级本科生和研究生, 以及对数学感兴趣的研究人员阅读参考.

图灵数学·统计学丛书

不等式（第 2 版）

◆ 著　　　　［英］G. H. Hardy　［英］J. E. Littlewood　［美］G. Pólya
　译　　　　越民义
　责任编辑　明永玲
　执行编辑　张继发

◆ 人民邮电出版社出版发行　　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　　　电子函件 315@ptpress.com.cn
　网址：http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：18.5
　字数：384 千字　　　2008 年 12 月第 1 版
　印数：1–3 000 册　　2008 年 12 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2008-4080 号

ISBN 978-7-115-18802-1/O1

定价：49.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

版 权 声 明

译者简介

越民义　1921年6月生，贵州省贵阳人. 1945年毕业于浙江大学数学系. 早年曾在浙江大学数学系、贵州大学数理系任教. 1951—1990年，在中国科学院数学研究所、应用数学研究所做研究工作. 研究员曾担任《中国大百科全书》数学卷运筹学分卷主编，《应用数学学报》副主编(1978—1985)、主编(1985—1995)，以及《运筹学学报》主编(1982年至今). 著作有《组合优化导论》(浙江科学技术出版社, 2001)等.

译者序

本书的三位作者都是数学界，特别是古典分析学界杰出的学者. 记得有人说过，英国的数学之为世界同行所重视，是从由Hardy形成的具有世界影响的英国分析学派开始的. 其工作涉及解析数论、三角级数、调和分析、发散级数等诸方面，影响深远. 在20世纪上半叶，Hardy的文风对数学工作者也有很大的影响. 无论是写书，还是写论文，他总能做到像苏轼所说的“如行云流水，初无定质，但常行于所当行，常止于不可不止，文理自然，姿态横生”，将复杂深奥的东西写得明白易懂，使读者在不知不觉之间“轻舟已过万重山”. 这一点，在我们的这本书中，读者将会有所体会.

不等式是我们数学工作中常遇到的东西. 当我们求解一个问题时，常会遇到一个复杂的表达式，很难判断它的大小，而这正是我们所关心的，希望有一个较简单的式子去代替它，这时就出现了不等式. 当作者解决了他的问题之后，作为过渡工具的不等式往往遭到遗弃. 因此，同样的一个不等式可能在不同的时间、不同的场合多次出现. 但每次出现，作者的注意力只限于解决他当时所考虑的问题，从普遍性和完整性的角度看，这总会带有某些缺陷. 因此，要去搜索历史上留下的众多不等式，将它们加以整理，发现它们之间的关系，并加以推广，使之完善，以便能适应更宽阔一些的场合，这确是一件重要而又艰难的工作. 我们眼前的这部著作就是由Hardy、Littlewood和Pólya三位数学巨匠经过6年(1929—1934) 的辛勤劳动完成的. 它是一本工具书，是数学工作者必备的一本书，又是一本关于不等式的经典著作. 读者从中不仅可以查到许多著名的不等式，而且还可以学到如何处理问题，如何将一个不等式加以推广、扩大其应用范围，使之臻于完善，如何将一个复杂的证明以严格而又流畅的语言来表达，这些都是每一位严肃的数学工作者所期盼做到的. 从这一角度来看，本书又是一本典范的教材.

原书第2版出版于1951年，但作为一本无可替代的工具书，仍为广大的数学工作者所需要. 故乐为翻译再飨读者.

越民义

2008年9月

第 1 版前言

我们在 1929 年就拟订计划并且着手写作本书,我们原来想要把它们列入“剑桥小丛书”,但随即就发觉,一本小丛书的篇幅显得过于短小,不足以实现我们的目标.

本书的写作目标在第 1 章已经给予了充分的解释,但在这里我们还要就历史方面和文献方面补充一点说明.像不等式这样的一个主题,它在数学的各个方面都有应用,但又没有得到系统的阐述,它的历史问题和文献问题是特别麻烦的.

要追寻一个众所周知的不等式的起源常常是很困难的.很可能它是在一篇关于几何学或天文学方面的论文中作为一个辅助命题(通常缺乏明确的论证)首先出现的.过了若干年之后,它或许又被许多其他作者重新发现,但可能始终缺乏容易理解且十分完善的的叙述.我们总会发现,即使对于那些最著名的不等式,也还是可以增添一些新的内容.

我们已经尽力做到精确可靠,并且尽可能地给出所有的文献,但我们并没有去做系统的文献研究工作.当某个特定的不等式按照习惯要冠上某一特定的数学家的名字时,我们遵照一般惯例.我们仍旧称呼 Schwarz 不等式、Hölder 不等式以及 Jensen 不等式等,尽管这些不等式还可以追溯到更早的年代.同时,我们也没有把所有小的增补一一明白地列举出来,尽管这些增补对于不等式的绝对完善是必要的.

我们从朋友们那里得到了大量的援助. G. A. Bliss, L. S. Bosanquet, R. Courant, B. Jessen, V. Levin, R. Rado, I. Schur, L. C. Young, A. Zygmund 诸先生或者给我们以批评和建议,或者为我们提供原始资料. Bosanquet 博士、Jessen 博士、Zygmund 教授阅读了校样,并改正了诸多不妥之处.特别应当指出的是,由于 Jessen 博士的建议,我们对第 3 章进行了大刀阔斧的修订.我们希望本书现在可以在相当程度上免于错误,尽管它包含了大量的细节.

Levin 博士撰写了文献目录.该目录包含了我们在正文中直接或间接引用到的全部图书和论文,但并没有超出这个范围之外.

G. H. H.

J. E. L.

G. P.

1934 年 7 月于剑桥和苏黎士

第 2 版前言

本书再版时我们对正文作了一些小的修订,并增加了 3 个附录.

J. E. L.

G. P.

1951 年 3 月于剑桥和斯坦福

目　录

第1章 导 论

1.1 有限的、无限的、积分的不等式

选取一个特殊而又典型的不等式作为贯穿本章讨论的主题是很方便的,于是,我们就选取了 Cauchy 的一个重要定理,即通常所说的"Cauchy 不等式".

Cauchy 不等式(定理7)的内容是

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \tag{1.1.1}$$

或

$$\left(\sum_1^n a_\nu b_\nu\right)^2 \leqslant \sum_1^n a_\nu^2 \sum_1^n b_\nu^2. \tag{1.1.2}$$

它对于任何实数值 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots b_n$ 都成立. 我们称 $a_1,\cdots,b_1,\cdots$ 为该不等式的*变量*. 在这里,变量的数目是有限的,而此不等式表达了某些有限和之间的关系. 我们称这种不等式为*初等不等式*或*有限不等式*.

最基本的不等式都是有限的,但我们也要讨论非有限的不等式以及涉及和数概念的推广的不等式. 在这种推广之中,最重要的是无限和

$$\sum_1^\infty a_\nu,\ \sum_{-\infty}^\infty a_\nu \tag{1.1.3}$$

及积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1.4}$$

(其中 a,b 可以是有限的或无限的). 与这些推广相对应的类似于(1.1.2)的不等式是

$$\left(\sum_1^\infty a_\nu b_\nu\right)^2 \leqslant \sum_1^\infty a_\nu^2 \sum_1^\infty b_\nu^2 \tag{1.1.5}$$

(或求和范围两边皆为无限的类似不等式),以及

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1.1.6}$$

我们称(1.1.5)为*无限不等式*,(1.1.6)为*积分不等式*.

1.2　记　　号

我们常常要把不同的变量集加以区分，例如(1.1.2)就把 $a_1, a_2\cdots, a_n$ 和 b_1, $b_2,\cdots, b_n$ 这两个集区别开来. 用一个简短的记号来表示变量集是很方便的，于是，我们就把"集 $a_1, a_2\cdots, a_n$"写成"集(a)"或者简写为"诸 a". 在不致引起误解的情况下，我们习惯性地把求和记号中的附标和上下限省去，于是，

$$\sum_1^n a_\nu,\ \sum_1^\infty a_\nu,\ \sum_{-\infty}^\infty a_\nu$$

就可以写成

$$\sum a.$$

因而

$$(\sum ab)^2 \leqslant \sum a^2 \sum b^2 \tag{1.2.1}$$

依照上下文含义的不同可以指的是(1.1.2)或(1.1.5).

在积分不等式中，集由函数代替，因而在从(1.1.2)过渡到(1.1.6)时，(a)和(b)就分别由 f 和 g 代替. 在积分中，我们也常常把变量和上下限略去，(1.1.4)可以写成

$$\int f\,\mathrm{d}x.$$

因而，(1.1.6)就写成了

$$\left(\int fg\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int f^2\mathrm{d}x\int g^2\mathrm{d}x. \tag{1.2.2}$$

无论是在和数中还是在积分中，变量的范围都在各章或各节之首预加说明，或者可以由上下文明确地推断出来.

1.3　正不等式

我们主要是讨论"正"不等式①. 若一个有限或无限的不等式中所含的全部变量 $a, b,\cdots$皆为非负实数，则称该不等式为*正的*. 这类不等式通常都把一个显然是更一般的，对于所有的实数甚至复数 $a, b,\cdots$都成立的不等式作为它的简单推论. 例如由(1.1.2)和对于任何实数或复数 u 都成立的不等式

$$|\sum u| \leqslant \sum |u|, \tag{1.3.1}$$

我们就推出

① 这也有例外，比如8.8节至8.17节中的例题. 该处所讨论的定理的"正的"情形是相当浅显的.

$$|\sum ab|^2 \leqslant (\sum |a||b|)^2 \leqslant \sum |a|^2 \sum |b|^2, \tag{1.3.2}$$

在这里,诸 a 和诸 b 是任意的复数.

将定理表达成基本的"正的"形式通常已经足够,因而我们把那些推导所引申出来的结果留给读者. 但若所讨论的不等式非常重要,我们有时也把它明确地表示成最一般的形式.

对于积分不等式,类似的说明也适用. 独立变量 x 是实变量,但(如同求和变量 ν 一样)可以取正值或负值,而函数 $f(x), g(x), \cdots$ 一般都只取非负值. 对于像(1.1.6)这样的一个不等式,它对非负的 f, g 都成立,相应地就有更一般的不等式

$$\left|\int fg\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \int |f|^2\mathrm{d}x \int |g|^2\mathrm{d}x, \tag{1.3.3}$$

它对于实变量 x 的任意复函数 f, g 都成立.

作为指标在我们定理中出现的数 $k, l, r, s, \cdots$ 都是实的,但一般可取正负号.

1.4 齐次不等式

(1.1.2)的两边是诸 a 的二次齐次函数,对诸 b 亦然. 一般说来,我们的不等式的两边都是某些变量组的同次齐次函数. 因为当次数为正的齐次函数的所有变量都为 0 时,此函数为 0,故不等式的两边,若次数都为正,那么当所涉及的变量组全为 0 时都将为 0,因而相等. 故(1.1.2)当所有的 a 或所有的 b 为 0 时化为等式.

如果上下文明确无歧义,则全由 0 所组成的集称为*零集*. 一般说来,若定理中所包含的变量组有一组或所有的组为 0 时,则定理中的"$\leqslant$"或"$\geqslant$"即化为"$=$". 有时,等号仅在这种情形下出现. 但更常见的则是在别的情形下出现,例如在(1.1.2)中若每一个 a 都等于相应的 b,则"$=$"即显然出现. 只要有可能,我们将仔细地把等号出现的情形弄清楚.

若不等式在某些变量组方面具有齐次性,那么我们常常可以对这些变量加上另外的限制(*正规化*)而使证明简化. 例如,2.2 节中的平均值 $\mathfrak{M}_r(a)$ 对权 p 是齐次的,次数为 0,于是,若是愿意,我们总可以假定 $\sum p = 1$. 再有,假若我们希望证明当 $0 < r < s$ 时,有

$$(a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s)^{1/s} \leqslant (a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r)^{1/r} \tag{1.4.1}$$

(定理 19),则可以假定 $\sum a^r = 1$(因两边都为次数为 1 的 a 的齐次式). 故可得

$$a_\nu^r \leqslant 1, a_\nu^s = (a_\nu^r)^{s/r} \leqslant a_\nu^r,$$

因而 $\sum a^s \leqslant \sum a^r = 1$. 不经过这种准备性质的正规化,那么证明就要是

$$\frac{(\sum a^s)^{1/s}}{(\sum a^r)^{1/r}} = \left(\sum \frac{a^s}{(\sum a^r)^{s/r}}\right)^{1/s} = \left\{\sum\left(\frac{a^r}{\sum a^r}\right)^{s/r}\right\}^{1/s} \leqslant \left(\sum \frac{a^r}{\sum a^r}\right)^{1/s} = 1.$$

还有另外一种意义的"齐次性",它有时很重要. 现将(1.4.1)和(1.1.2)加以比较. (1.4.1)可以写成

$$(\sum a^s)^{1/s} \leqslant (\sum a^r)^{1/r}. \tag{1.4.2}$$

上式两边关于变量都为齐次,但(1.1.2)有另外一种齐次性是(1.4.2)所没有的:可以称之为"关于Σ为齐次",即若将Σ作为一个数看待,则它在(1.1.2)式的两边以同样的方次出现.

这种关于Σ的齐次性的意义在于:若将(1.1.2)中所出现的每一和数都以相应的平均值代替,即若把它写成

$$\left(\frac{1}{n}\sum ab\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum a^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum b^2\right),$$

则不等式仍成立. 这种齐次性的重要性在2.10节和6.4节中将会显露无遗. 大体上讲,具有这一性质的不等式总有一个相似的积分不等式;当没有这一性质时,例如(1.4.2),则没有相似的积分不等式.

1.5 代数不等式的公理基础①

我们的主题是很难确切定义的,但它部分属于"代数",部分则属于"分析". 代数和分析,正如同几何一样,可以利用公理化方法. 与其如同在Dedekind的实数理论中那样,说我们是在讨论某种或某些确定的对象,不如像在射影几何中那样,说我们是在讨论具有由一组公理所界定的某些性质的任何一组对象. 我们不打算详细地考虑主题中各个部分的"公理学",但对于像(1.1.2),以及第2章中的大部分定理,虽然它们完全是属于代数的,却值得我们在它们的公理基础方面多增添一些说明.

可以只取寻常的加法和乘法公理来作为代数的公理,于是,我们所有的定理在许多不同的域(实代数、复代数或者关于任意模的剩余的算术)中都成立. 或者,可以加上有关线性方程组可解的公理,保证差与商的唯一性和存在性的公理,这时我们的定理就将在实代数或复代数中,或在关于素数模的算术中都成立.

在现在的主题中,我们所关心的是一些不等的关系,这是实代数所特有的一个概念. 为了给有关不等式的定理奠定一个公理基础,除了已经说过的公理和"未定义物"之外,现再增加一个新的未定义物和两个新的公理. 我们取正数这一概念作为未定义物,又取下列两个命题作为公理:

Ⅰ. a为0,或a为正,或$-a$为正,而这些可能性是相互排斥的;

Ⅱ. 两个正数的和与积仍为正数.

① 见Artin and Schreier[1].

若 $-a$ 为正,则称 a 为负;若 $a-b$ 为正(负),则称 a 大于(小于)b. 任何一个代数不等式,例如(1.1.2),都可依据这一基础作出.

1.6 可比较的函数

对于函数 $f(a)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$g(a)=g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,若在它们之间存在一个对所有非负实数 a 都成立的不等式,就是说,对所有此种 a 都有 $f\leqslant g$ 成立,或 $f\geqslant g$ 成立,则称此 f 和 g 为可比较的. 两个给定的函数并不常常都是可比较的. 例如两个不同次数的正齐次多项式就必然是不可比较的[①]. 若 $0\leqslant f\leqslant g$ 对所有非负的 a 都成立,且两边都是齐次的,则 f 和 g 必为同次.

这一定义自然可推广到多个变量集的函数 $f(a,b,\cdots)$ 上去.

本书全书都在讨论函数的可比较性问题. 例如诸 a 的算术平均和几何平均是可比较的:$\mathfrak{G}(a)\leqslant\mathfrak{A}(a)$(定理 9). 函数 $\mathfrak{G}(a+b)$ 和 $\mathfrak{G}(a)+\mathfrak{G}(b)$ 是可比较的(定理 10). 函数 $\mathfrak{A}(ab)$ 和 $\mathfrak{A}(a)\mathfrak{A}(b)$ 是不可比较的,它们相对的大小取决于诸 a 和诸 b 的大小关系(定理 43). 函数

$$\psi^{-1}(\sum p\psi(a)),\quad \chi^{-1}(\sum p\chi(a))$$

为可比较的充要条件是,$\chi\psi^{-1}$ 为凸的或凹的(定理 85).

讨论形如

$$\sum a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}$$

的两个函数的可比较性的一个重要的一般性定理,可以在 2.18 节中找到,它是由 Muirhead 得出的.

1.7 证明的选择

本节中各个部分所使用的证明方法采用了一些显然属于不同范畴的思想方法. 对于同一个定理,我们常常给出几个不同的证明,特别在第 2 章中是如此. 这里提醒大家,要注意一下我们所使用的方法之间的某些巨大差别.

首先,第 2 章中许多的证明都是“严格初等的”,因为它们只使用了有限代数中的一些思想和方法. 凡是真正重要的定理,我们原则上都尽量给出一个这样的证明,只要它的性质允许这样做.

其次,我们还有(即使在第 2 章中)许多证明,它们在此种意义上不是初等的,因为其中包含了极限和连续的思想. 我们也还有(特别是在第 4 章中)一些证明,

① 比较 2.19 节.

它们使用了导数的一些标准性质，比如说，依靠了 Rolle 定理. 所有这些证明都属于初等单实变函数论的范围.

最后，当在第 6 章中处理积分时，自然要利用测度论和 Lebesgue 的积分论. 我们把这认为是读者已知的. 但在 6.1 节至 6.3 节中，我们总结了所要用到的相关理论.

有时我们也求助于实变函数论中比较深奥的部分，但只是在另外一种证法中，或是在那些本质上就相当困难的定理的证明中才这样做. 例如 4.6 节利用了多元函数的极大理论和极小理论，第 7 章利用了变分法中的方法，第 9 章利用了重积分的理论. 我们没有用到复变函数论，虽然在最后几章中，为了说明问题，我们也稍微引用到它，但引用到它的那些章节并不真正属于本书的主体.

下面补充说明一些更多细节.

(i) 按照 1.5 节中的定义，Cauchy 不等式(1.1.2)是有限代数中的一个命题. 依照一般公认的原则，这样的一个定理应当只用它所从属的理论中的方法来证明.

(ii) 我们将不断遇到像 Hölder 不等式

$$\sum ab \leqslant \left(\sum a^k\right)^{1/k}\left(\sum b^{k'}\right)^{1/k'} \tag{1.7.1}$$

(定理 13)这一类的定理，它的性质与一个参数 k 的值有关. 若 k 为有理数，则此定理为代数的，因而适用于(i)中的说明. 若 k 为无理数，a^k 就不是一个代数函数，因此就很明显，不可能有一个严格代数上的证明.

在处理一个像 Hölder 不等式这样重要的不等式时，我们希望把超出代数范畴的措施降到问题的性质所必需的最低限度，这样的要求无论如何是合理的. 显而易见，这种措施将取决于我们对 a^k 所下的定义. 可以把 a^k 定义为 $\exp(k\ln a)$，在这种情形下，自然是要用到指数函数和对数函数的理论. 假若我们像通常那样，把 a^k 定义作 a^{k_n} 的极限，其中 k_n 为趋近于 k 的适当的有理数，则此极限手续就应当是我们所求助的唯一手续.

(iii) 假如说，在采用最后一种观点时，我们已经对于有理的 k 证明了形如(1.7.1)的 Hölder 不等式，则经过取极限，就可推出它对于无理的 k 也成立.

但这样的一个证明常常不能满足要求. 我们总是希望证明一类比(1.7.1)更为精确的定理，在这些定理中(正如在定理 13 中一样)，我们要建立严格的不等式(除了某些已指明的特定情形之外). 在取极限时，“$<$”变成了“$\leqslant$”，这样，我们就失去了讨论等号何时成立的机会(虽然事实上这和有理的情形是一样的)，因而这样的证明就有欠缺. 因此，有必要安排我们的证明，以尽可能避免此种取极限的过程. 当我们希望从有限不等式过渡到相应的无限不等式或积分不等式时，同样的困难也会出现. 这种情况在本书内将处处碰到，它常常决定我们如何去选择一种特殊的证明途径.

(iv) 选择证明方法的一般指导原则如下. 当一个定理既简单又基本时，比如定