湖南省高等职业教育规划教材

HUNANSHENG GAODENG ZHIYE JIAOYU

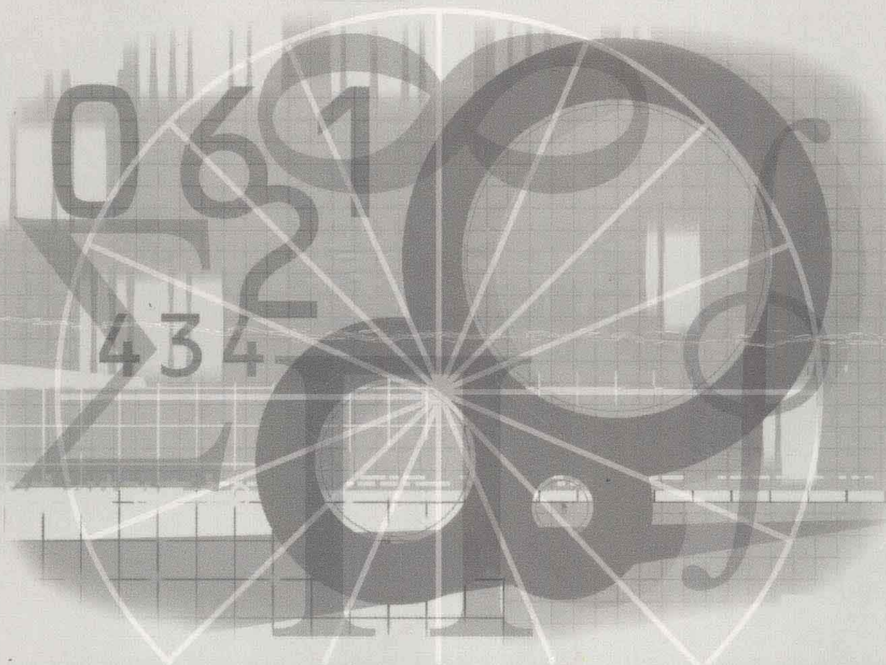
GUIHUA JIAOCAI

高等数学

（上 册）

GAODENG SHUXUE

湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会 编审



湖南大學出版社

湖南省高等职业教育规划教材

HUNANSHENG GAODENG ZHIYE JIAOYU
GUIHUA JIAOCAI

高等数学

（上册）

GAODENG SHUXUE

湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会 编审

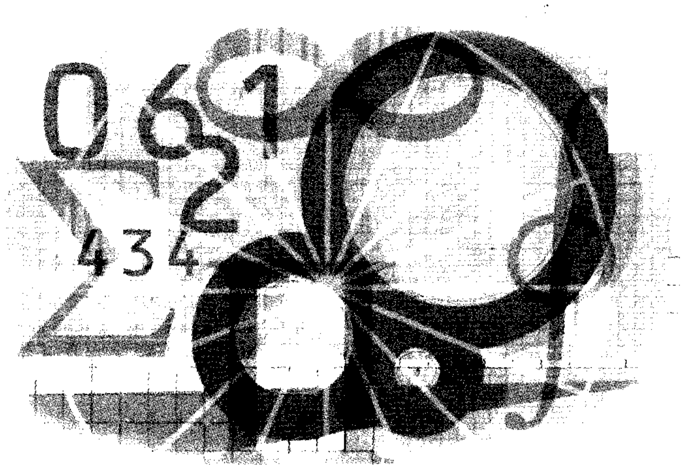
总　编：杨向群

主　编：曾庆柏

编写成员：曾庆柏 陈力萍 陈晓霞 谢再新

审定组组长：高纯一

审定组成员：沈　竹　徐玉林



湖南大学出版社

内容简介

本套教材分《高等数学(上册)》、《高等数学(下册)》及《线性代数与概率统计》三册。

《高等数学(上册)》内容为函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用；《高等数学(下册)》内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换；《线性代数与概率统计》内容为行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计初步和数学建模。

本套教村供高等职业院校各专业使用,也可作为专科学校、职业和成人大学的选用教材或教学参书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)/曾庆柏主编. —长沙:湖南大学出版社,2004.7

ISBN 7-81053-817-9

Ⅰ.高... Ⅱ.曾... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材

Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063357 号

高等数学(上册)

Gaodeng Shuxue(Shangce)

总　　编:杨向群

主　　编:曾庆柏

责任编辑:罗素蓉　　**特约编辑**:袁作兴

封面设计:花景勇　　**责任校对**:张建平

出版发行:湖南大学出版社

社　　址:湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编**:410082

电　　话:0731-8821691(发行部),8823113(编辑部),8821006(出版部)

传　　真:0731-8649312(发行部),8822264(总编室)

电子邮箱:pressluosr@hnu.cn

网　　址:http://press.hnu.cn

印　　装:湖南航天长宇印刷有限责任公司

开本:787×1092　16 开　**印张**:14.25　**字数**:330 千

版次:2004 年 7 月第 1 版　**印次**:2006 年 9 月第 2 次印刷　**印数**:5 001~8 000 册

书号:ISBN 7-81053-817-9/O·51

定价:20.00 元

湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会

前　言

这套教材是湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的高等职业教育规划教材，是高等职业院校各专业的通用教材.

全套书分《高等数学(上册)》、《高等数学(下册)》及《线性代数与概率统计》三册，《高等数学(上册)》内容为函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用；《高等数学(下册)》内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换；《线性代数与概率统计》内容为行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计初步和数学建模.

本套教材具有以下特点：

(1) 对高等职业教育数学课程体系采用“模块化”编排，选择各专业必需的、共同的数学内容作为基础模块，要求所有专业必修，在基础模块上再设置若干模块，供不同专业教学选用.

(2) 教学内容的选择充分体现学生学习的自主性，不同专业的学生可根据需要选用教材中用 * 号标注的内容；学有余力的学生可自学教材中用小号字体排版的内容.

(3) 教材增设了“想一想”、“做一做”、“练一练”、“思考”等栏目，提出了一些启发性问题，以培养学生的创新意识和思维能力. 主要章节后都编有数学实验，介绍了用 MATLAB 求解本章数学问题的方法，以培养学生应用现代计算机技术求解数学问题的能力.

(4) 利用“阅读材料”和“拓展性知识”栏目，介绍有关数学史、数学思想方法、数学应用等方面的内容，拓展学生的知识视野，提高学生的数学文化素养.

(5) 注意了初等数学与高等数学的紧密衔接. 普通高中和中等职业学校新数学教材体系中，幂函数、反三角函数、数学归纳法、极坐标等内容已弱化或删去，但向量等内容得到了充实，为了使学生从初等数学到高等数学顺利过渡，对传统高等数学中需要的初等数学内容进行了适当回顾、增补和删减，如在第 1 章函数中增补了幂函数、反三角函数，在第 8 章二重积分中增补了极坐

标，在第 7 章向量与空间解析几何中删减了部分向量内容等，使初等数学与高等数学衔接得更加紧密.

本教材的基本教学时数约 64 学时，标有 * 号的内容需另行安排学时.

本套教材是在湖南省教育厅领导下，由湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会组织普通高等院校专家和高等职业技术学院专家和教师编写的，由湖南师范大学杨向群教授担任总编，湖南省教科院职业与成人教育研究所王江清同志任组编，彭文胜同志任责任编审，本册教材的主编是曾庆柏同志.参编人员是：曾庆柏同志(第 1 章、第 2 章)、湖南省生物机电职业技术学院陈力萍同志(第 3 章、第 4 章)、长沙商贸旅游职业学院陈晓霞同志(第 5 章)、邵阳职业技术学院谢再新同志(第 6 章). 本教材编写完毕后. 湖南省教育厅特聘请以长沙理工大学数学与计算科学学院高纯一教授为组长，湖南师范大学数学与计算机科学学院沈竹副教授、湖南生物机电职业技术学院徐玉林副教授为成员的审定组. 对书稿进行了认真的审定，对本教材给予了较高评价，并提出许多宝贵的意见，谨在此表示衷心感谢.

由于成书仓促，不足之处在所难免，欢迎专家和广大师生批评指正.

湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会

2004 年 6 月

目　次

第1章　函　数

微积分是研究变量以及变量间函数关系的一门学科. 函数关系是变量之间的最基本的一种依赖关系.本章将在我们已学习过的函数的基础上进行系统复习和必要补充,先通过实例引入函数的概念,再讨论函数的特性、反函数与复合函数、基本初等函数与初等函数,最后介绍函数在实际中的应用.

第1节　函　数

一　函　数

1. 常量与变量

在研究实际问题时,我们会遇到各种各样的量.其中有些量在过程中保持不变,这种量称为**常量**(constant);有些量可以取不同的值,这种量称为**变量**(variable).例如,在货物的调运过程中,火车运行的时间、速度、距离等是变量,而运载的货物的质量是常量.

注意　一个量是常量还是变量,要根据情况做出具体分析.例如,在自由落体运动中,在一定高度之内重力加速度可以看作常量,但当超过一定高度时,重力加速度则应看作变量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量,用字母 x、y、z 等表示变量.

对于某个问题来说,一个变量只能在一定的范围内取值.为了简单起见,变量的取值范围常用区间(interval)表示.

设 a 与 b 是两个实数,且 $a<b$,则满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的一切实数 x 组成的集合称为**闭区间**,记作$[a,b]$,即$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;满足不等式

$$a<x<b$$

的一切实数 x 组成的集合称为**开区间**,记作(a,b),即$(a,b)=\{x|a<x<b\}$;满足不等式

$$a<x\leqslant b \text{ 或 } a\leqslant x<b$$

的一切实数 x 组成的集合称为**半开半闭区间**,分别记作$(a,b]$或$[a,b)$,即

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\} \text{ 或 } [a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

在上述各区间中,a 和 b 称为**区间的端点**,而 $b-a$ 称为**区间的长度**.它们的几何表示如图 1-1 所示.

当区间的长度为无限时,称为**无限区间**.有以下几种:

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},$$

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\},$$

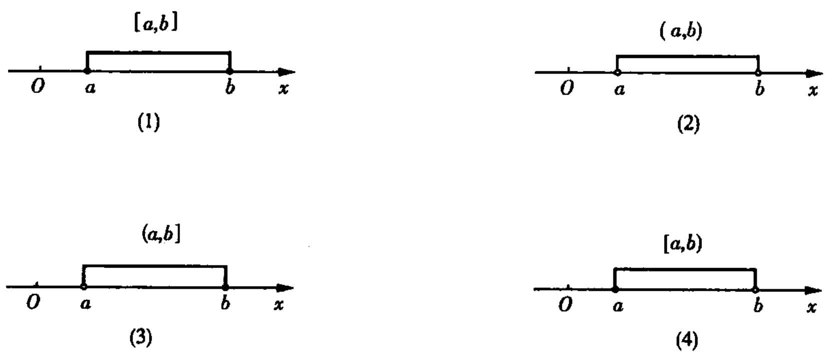


图 1-1

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\},$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

它们的几何表示如图 1-2 所示.

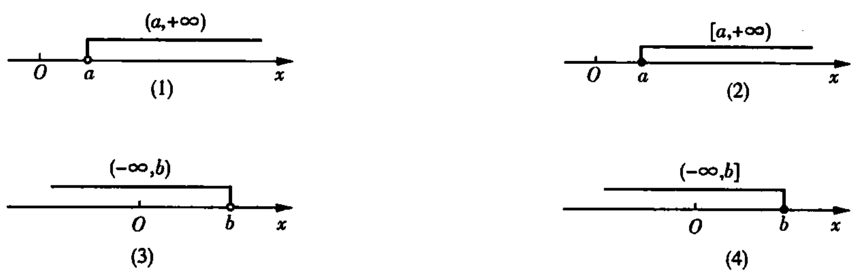


图 1-2

以后,当不需要指明是哪一类区间时,我们就简单地称它为“区间”,且常用字母 I 表示.

特别,我们把开区间 $(a-\delta, a+\delta)(\delta>0)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**(neighborhood),a **称为邻域的中心**,δ **称为邻域的半径**(图 1-3).

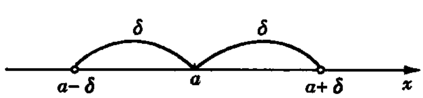


图 1-3

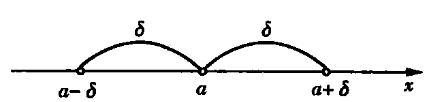


图 1-4

点 a 的 δ 邻域可用不等式表示为 $a-\delta<x<a+\delta$. 对该不等式中各式同时加上 $-a$,得 $-\delta<x-a<\delta$,它等价于绝对值不等式 $|x-a|<\delta$. 例如,$|x-2|<0.002$ 表示以 2 为中心,以 0.002 为半径的邻域,它就是开区间 $(1.998, 2.002)$.

如果在点 a 的 δ 邻域中去掉 a,所得集合为 $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$,则称它为**点 a 的去心 δ 邻域**(图 1-4).

2. 函数的概念

一般来说,在一个问题中往往同时有几个变量在变化着,这几个变量并不是孤立地在变,而是直接或间接地相互联系又相互制约的. 它们之间这种相互依赖的关系刻画了客观世界中事物变化的内在规律,这种规律用数学进行描述,就是函数关系.

例 1　对圆的面积 A 与它的半径 r 进行考察，我们得到这两个变量间的相依关系由公式

$$A = \pi r^2$$

确定. 当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，根据上述公式，变量 A 都有唯一确定的值和它对应.

例 2　某工厂每天生产某种产品的件数为 x，设备和管理等固定成本为 2 300 元，生产每件产品所花费的人工费用和使用原材料费用等单位产品变动成本为 10 元，则日产量 x 与每天的生产成本 C 之间的对应关系由下式

$$C = 2\,300 + 10x$$

确定. 如果该厂日产量最多为 750 件，则当日产量 x 在集合 $\{0,1,2,\cdots,750\}$ 上任意取一个数值时，根据上式，变量 C 都有唯一确定的值和它对应.

由以上两例，我们抽象出函数的概念.

定义 1　设 x、y 是两个变量，D 是一个实数集. 如果对于 D 内的每一个数 x，按照某个对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**(function)，记作 $y=f(x)$.

x 称为**自变量**(argument)，y 称为**因变量**，实数集 D 称为这个函数的**定义域**(domain of definition).

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 相对应的 y 值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 函数 $y=f(x)$ 所有函数值的集合 $M=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为**函数的值域**(range of function).

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可以改用别的字母，如"g"，"φ"，"F"等，这时函数就记作 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等. 当同时考察几个不同的函数时，就需要用不同的函数记号以示区别.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如，例 1 中，定义域 $D=(0,+\infty)$；例 2 中，定义域 $D=\{0,1,2,\cdots,750\}$.

但在数学上作一般性研究时，对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数，我们规定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

例 3　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$.

(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+3}$.

(3) $y=\dfrac{1}{x+2}+\ln(1-x)$.

解　(1) $4-x^2\geqslant 0 \Leftrightarrow x^2\leqslant 4 \Leftrightarrow |x|\leqslant 2 \Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 2 \Rightarrow D=[-2,2]$.

(2) $\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+3\geqslant 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \pm 1,\\ x\geqslant -3,\end{cases} \Rightarrow D=(-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $\begin{cases}x+2\neq 0,\\ 1-x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -2,\\ x<1,\end{cases} \Rightarrow D=(-\infty,-2)\cup(-2,1)$.

想一想　函数的定义域一定是区间吗？考察 $y=\sqrt{\cos x-1}$.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的 $x\in D$,对应的函数值为 $y=f(x)$,则以 x 为横坐标、y 为纵坐标就确定了平面上的一点(x,y). 当 x 遍取 D 上的数值时,就得到点 (x,y)的一个集合

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

这个点的集合 G 称为函数 $y=f(x)$ 的图像(graph)(图 1-5).

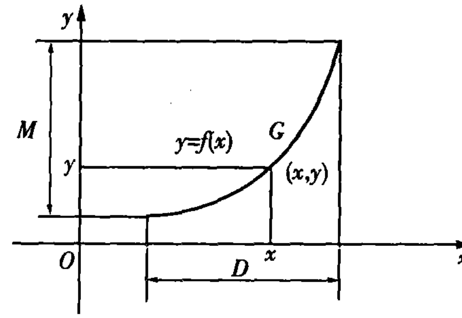


图 1-5

例 4　求下列函数的定义域、值域,并作出其图像.

(1) $y=f(x)=3$.

(2) $y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

解　(1) 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,变量 y 都有唯一确定的值 3 和它相对应,即函数都有定义,所以这个函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\{3\}$. 它的图像是一条平行于 x 轴的直线(图 1-6).

(2) 函数的定义域 $D=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=[0,+\infty)$. 它的图像如图 1-7 所示.

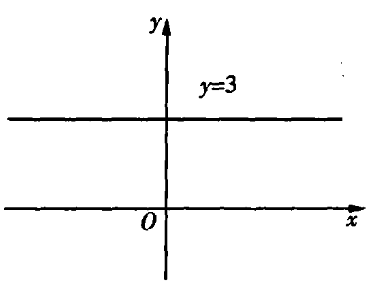


图 1-6

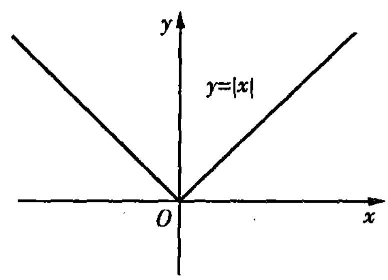


图 1-7

由函数的定义知,一个函数由它的定义域 D 和对应法则 f 唯一确定. 因此,如果两个函数的定义域与对应法则相同,则这两个函数就是相同的(或相等的),否则就是不同的. 如果两个函数相同,则它们的自变量和因变量用什么字母表示,是无关紧要的. 例如,$y=f(x),x\in D$ 与 $u=f(v),v\in D$ 表示同一个函数.

例 5　下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=1,g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

(2) $f(x)=x-1,g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

(3) $f(x)=\sin x,g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

解　(1) 相同. 因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,且对同一个 x,有 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$,即对应法则相同,所以 $f(x)$与 $g(x)$是同一个函数.

(2) 不相同. 因为 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$g(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,所以它们的定义域不同.

(3) 不相同. 虽然两个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,但对应法则不同,例如当 $x=-\frac{3\pi}{2}$时,$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-1$,$g\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=1$,不相等.

下面讨论两个常用的函数.

例 6 设 x 为任一实数,$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如,$[0.61]=0$,$[\sqrt{3}]=1$,$[-2]=-2$,$[\pi]=3$,$[-3.5]=-4$. 我们把函数

$$y=[x]$$

称为取整函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\mathbf{Z}$. 它的图像如图 1-8 所示.

例 7 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

称为符号函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\{-1,0,1\}$,它的图像如图 1-9 所示.

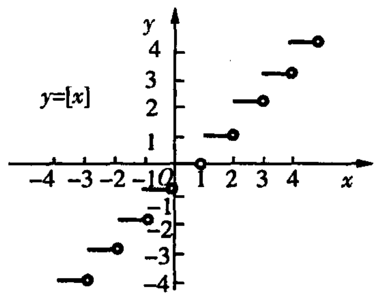


图 1-8

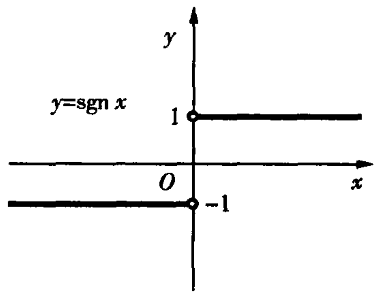


图 1-9

我们看到,有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**.

例如,函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1.\end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=(-\infty,1)\cup[1,+\infty)=(-\infty,+\infty)$. 当 $x\in(-\infty,1)$时,对应的函数值表达式为 $f(x)=1-x$;当 $x\in[1,+\infty)$时,对应的函数值表达式为 $f(x)=x-1$. 函数的图像如图 1-10 所示.

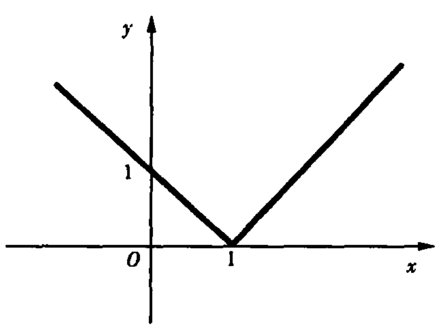


图 1-10

拓展性知识　　映射与函数

映射是一种特殊的对应．先观察下面图 1－11 中的几个对应：

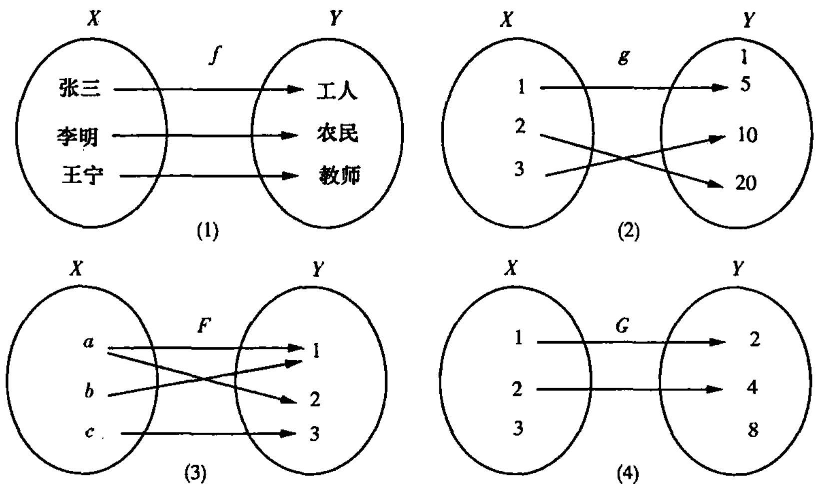


图 1－11

我们看到，(1)、(2)两个图中，对集合 X 的每一个元素，都可在集合 Y 中找到唯一一个元素与它对应，但(3)、(4)两个图中，X 与 Y 之间的对应则不满足这一特点．

一般地，设 X 和 Y 是两个集合，如果集合 X 中每个元素 x，按照某种对应法则 f，在集合 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则 f 叫作集合 X 到集合 Y 的**映射**，记作

$$f:X\to Y.$$

并称 y 是 x 在映射 f 下的**像**，x 是 y 在 f 下的一个**原像**．

这样，图中(1)、(2)两个对应 f,g 都是从集合 X 到集合 Y 的映射，但(3)、(4)两个对应 F,G 都不是映射．

如果 X,Y 是两个非空数集，f 是 X 到 Y 的映射，则称 f 是定义在 X 上的一个**函数**．

由上述定义可知，函数是一种特殊的映射，而映射是函数概念的推广．

二　函数的几种特性

1．函数的单调性

定义 2　设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$．如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加的**(图 1－12)；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少的**(图 1－13)．单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**．区间 I 称为**单调区间**．