OLYMPIC

TEACHING EXERCISING

裘宗沪／主编

奥林匹克数学教程练习册

中国数学会普及工作委员会 编

初二分册

开明出版社

奥林匹克数学教程练习册

初二年级

奥林匹克数学教程练习册

（初二分册）

主编　裘宗沪　刘玉翘
编者　王连笑　余风岗
刘诗雄　李果民
郭菊英　陈传理
罗增儒

开明出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克数学教程：初二分册/裘宗沪主编：中国数学会普及工作委员会编. -北京：开明出版社，1998.7
ISBN 7-80077-750-2

Ⅰ. 奥… Ⅱ. ①裘… ②中… Ⅲ. 数学课-初中-教材
Ⅳ. G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 20648 号

奥林匹克数学教程练习册
（初二分册）
裘宗沪 刘玉翘 主编

★

开明出版社出版发行
（北京海淀区西三环北路 19 号）
保定市印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
开本 850×1168 1/32 印张 5.5 字数 140 千字
1999 年 1 月北京修订版 2000 年 9 月第 5 次印刷
印数：28,001—31,000
ISBN 7-80077-750-2/G·520 定价：6.60 元

内容提要

《奥林匹克数学教程》是中国数学会普及工作委员会根据其制定的“初高中数学竞赛大纲”组织一批中国数学奥林匹克高级教练员编写的。为了在教程学习的基础上有更多的练习机会，按照教程的章节顺序编写了这套《奥林匹克数学教程练习册》。

本书与《教程》初二分册配套。

前言

1981 年，中国数学会开始举办“高中数学联赛”，经过 1981、1982、1983 三年的实践，这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大中学师生的欢迎，也得到了教育行政部门、各级科学技术协会以及社会各阶层人士的肯定和支持；“试题所涉及的知识范围不超出现行教学大纲”这一命题原则，也得到了更多的理解和拥护，由此“高中数学联赛”已形成制度。同时，全国各地都提出了举行“初中数学联赛”的要求。1984 年，中国数学会普委会委托天津数学会举办一次初中数学邀请赛，有 14 个省、市、自治区参加。这次活动的成功，为后来举办“初中数学联赛”摸索了很多经验。当年 11 月，在宁波召开的中国数学会第三次普及工作会议一致通过了举办“初中数学联赛”的决定，并详细商定了一些具体办法，规定“初中数学联赛”在每年 4 月的第一个星期日举行。会上湖北省数学会、山西省数学会、黑龙江省数学会分别主动承担了 1985 年、1986 年、1987 年的具体工作，从此，“初中数学联赛”也形成了制度。

为了规范数学竞赛的命题，明确竞赛的要求，并使参加竞赛的同学有所遵循，应广大师生和教练员的要求，1992 年中国数学会普委会第七次全国工作会议上讨论并通过了“数学竞赛大纲（初审稿）”。后几经研讨和修改于 1994 年 3 月福州会议上通过了“初中数学竞赛大纲（修订稿）”。

本书是根据“初中数学竞赛大纲（修订稿）”并参考了“教学大纲”而编写的。按年级分三册，在内容安排上力争与课堂教学同步，

每册都比课堂教学内容加深加宽，并补充了教学中没有而竞赛中要求的内容、方法和思想。在编排体例上按教程的形式，分章节，每节后都有习题；为便于教和学，每个习题书后都附有解答或提示。为了给同学们提供练习的机会，每一本教程都另配有一本练习册，练习册与教程的章节顺序一致，其题目主要选自各级各类竞赛试题或预选题。

由于目前我国初中教学正向九年义务教育大纲过渡，本教程在安排上考虑了过渡时期的特点，在内容编排上兼收并蓄，使用者可按教学进程删减选用部分章节，有些课外内容可提前或错后讲解。

参加本书编写的都是中国数学奥林匹克高级教练员，他们在培训学生和教师上有丰富的经验，本书是他们经验的总结。我们出版这套书，渴望对参加竞赛的同学、辅导教师提供学习、辅导的资料和方法，以教材的形式编写就是希望能更加实用。

书中的缺点和错误欢迎读者指正。

裘宗沪

1994年5月

修订说明

由中国数学会普及工作委员会组织一批中国数学奥林匹克高级教练员编写的《奥林匹克数学教程》和《奥林匹克数学教程练习册》自 1994 年问世至今，历经五年。全国各地许多奥校以及各级各类学校的广大数学爱好者使用以后，无论在内容形式上和装祯设计上均给予好评。不少读者指名要购买此书。

为了提高这套书的质量，不辜负广大读者的厚爱，应广大读者要求，我们对《奥林匹克数学教程》及《奥林匹克数学教程练习册》中存在的不足进行了技术上的修订。本次修订我们除对书中存在的问题进行了纠正和调整，还对开本和版式做了更改和变动，以符合数学竞赛及数学爱好者的不同需要。

真诚地希望广大读者继续关心和使用本套教程。欢迎对书中的不足批评指正，使之不断完善。

编　者

1998 年 10 月

目 录

习题/解答

第一章 整式与分式 ……………………………… (1)(55)

练习题1.1 因式分解 ……………………………… (1)(55)

练习题1.2 综合除法与因式定理 ……………………… (2)(57)

练习题1.3 对称式与轮换对称式 ……………………… (2)(58)

练习题1.4 分式的变形与求值 ………………………… (3)(59)

练习题1.5 代数式的恒等证明 ………………………… (4)(60)

复习题一 ………………………………………… (4)(62)

第二章 根式与指数式的恒等变形 ……………………… (8)(68)

练习题2.1 实数与算术平方根 ………………………… (8)(68)

练习题2.2 根式的变形 ……………………………… (9)(69)

练习题2.3 指数式 …………………………………… (10)(71)

复习题二 ………………………………………… (10)(73)

第三章 一元二次方程 ……………………………… (15)(81)

练习题3.1 含字母系数的一元二次方程 ……………… (15)(81)

练习题3.2 判别式与韦达定理 ………………………… (16)(82)

练习题3.3 一元二次方程整数根 ……………………… (17)(84)

练习题3.4 可化为一元二次方程的代数方程 …… (17)(86)

练习题3.5 应用问题 ……………………………… (18)(88)

复习题三 ………………………………………… (19)(90)

第四章　三角形 …………………………………… (23) (100)
练习题 4.1　全等三角形 ……………………………… (23) (100)
练习题 4.2　等腰三角形 ……………………………… (24) (102)
练习题 4.3　直角三角形 ……………………………… (25) (104)
练习题 4.4　三角形中的不等关系 …………………… (26) (107)
复习题四 ……………………………………………… (27) (109)

第五章　四边形 …………………………………… (32) (119)
练习题 5.1　多边形 …………………………………… (32) (119)
练习题 5.2　平行四边形 ……………………………… (33) (121)
练习题 5.3　梯形 ……………………………………… (35) (122)
练习题 5.4　平移、对称和旋转 ……………………… (36) (124)
复习题五 ……………………………………………… (37) (126)

第六章　质因数分解定理 ………………………… (42) (139)
练习题 6.1　质数与合数 ……………………………… (42) (139)
练习题 6.2　因数分解的表示法和约数个数的
计算 …………………………………………………… (42) (140)
练习题 6.3　最大公约数和最小公倍数 ……………… (43) (141)
复习题六 ……………………………………………… (44) (142)

第七章　抽屉原则 ………………………………… (47) (151)
练习题 7.1　抽屉原则 ………………………………… (47) (151)
练习题 7.2　按同余类造抽屉 ………………………… (48) (152)
练习题 7.3　分割几何图形造抽屉 …………………… (48) (153)
练习题 7.4　利用染色造抽屉 ………………………… (50) (155)
复习题七 ……………………………………………… (51) (156)

第一章 整式与分式

练习题1.1 因式分解

一、选择题

1. $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z$ 正确的结论是(　　)

(A)不能分解因式.

(B)有$(x-y+z+1)$的因式.

(C)有$(x+y-z+1)$的因式.

(D)有$(x-y-z+1)$的因式.

2. 对 a^4-3a^2+9 的正确的结论是(　　)

(A)若 a 为任何自然数,上式均为合数.

(B)只有一个自然数 a,使上式为质数对其余的自然数 a,上式均为合数.

(C)只有两个自然数 a,使上式为质数,对其余的自然数 a,上式均为合数.

(D)有多于两个的自然数 a,使上式为质数.

二、填空题

1. 若多项式 $6x^2+mxy-3y^2+3x+10y-3$ 能分解成关于 x、y 的一次整系数多项式的乘积,则 m 的值为__________.

2. 若 $x^4+x^3+x^2+2=(x^2+px+q)(x^2+mx+n)$,则 $p+q+m+n=$__________.

三、分解因式$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

四、分解因式 $x^4+y^4+(x+y)^4$.

练习题1.2　综合除法与因式定理

一、选择题

1. 若多项式 $2x^4+3x^3-5x^2+7x+m$ 被 $x+3$ 除得的余数为 -1，则 m 的值为(　　)

(A)66.　　(B)16.　　(C)-14.　　(D)-16.

2. 若多项式 x^5+x^4+1 有因式 x^2+x+a，则 a 的值为(　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)-1.　　(D)-2.

二、填空题

1. 若多项式 $3x^3-9x^2+kx-12$ 可被 $x-3$ 整除，则 k 的值为________.

2. 若 $f(x)=x^4-3x^3-6x^2+10x+9$，则 $f(x)$ 除以 $x+2$ 的余数为________.

三、设 $f(x)=x^2+bx+c$(b,c 为整数)，若 $f(x)$ 既是 x^4+6x^2+25 也是 $3x^4+4x^2+28x+5$ 的一个因式，求 $f(1)$.

四、已知多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数，若 $bd+cd$ 是奇数，证明这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

练习题1.3　对称式与轮换对称式

一、选择题

1. 多项式 $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$ 必有因式(　　)

(A)$a+b$.　　(B)$a+b+c$.

(C)$(a+b)^2$　　(D)$a-b$.

2. 多项式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 必有因式(　　)

(A)$a+b$.　　(B)$a+b+c$.

(C)$(a+b)^2$.　　(D)$a-b$.

二、填空题

1. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$被$(b-c)(c-a)(a-b)$整除的商为__________.

2. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$被$(b-c)(c-a)(a-b)$整除的商为__________.

三、分解因式$(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$.

四、分解因式 $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$.

练习题1.4 分式的变形与求值

一、选择题

1. 若$\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+c}=n$,则 n 的值一定为(　　)

(A)$\frac{1}{2}$.　　(B)$\frac{1}{3}$.　　(C)$\frac{1}{4}$.　　(D)非上述答案.

2. 计算$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\cdots+\frac{1}{94\times97}+\frac{1}{97\times100}$的值为(　　)

(A)$\frac{99}{100}$.　　(B)$\frac{33}{100}$.　　(C)$\frac{297}{100}$.　　(D)非上述答案.

二、填空题

1. 已知 $y_1=2x,y_2=\frac{2}{y_1},y_3=\frac{2}{y_2},\cdots,y_{1993}=\frac{2}{y_{1992}},y_{1994}=\frac{2}{y_{1993}}$,则 $y_1\cdot y_{1994}$的值为__________.

2. 若 $a+b+c=1,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$,则 $a^2+b^2+c^2$ 的值为__________.

三、已知 $a^2+b^2=(a+b-c)^2$,

求证:$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$.

四、已知$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$,

求证：其中两个分式等于1，另一个等于-1.

练习题1.5　代数式的恒等证明

一、选择题

1. 已知$a+b+c=0$，$\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=0$，则$\frac{bc+b-c}{b^2c^2}+\frac{ca+c-a}{c^2a^2}+\frac{ab+a-b}{a^2b^2}$的值一定为(　　)

(A)1.　　(B)0.　　(C)-1.　　(D)非上述答案.

2. 若$x+y+z=3a$，则

$$\frac{(x-a)(y-a)+(y-a)(z-a)+(z-a)(x-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}$$

的值为(　　)

(A)1.　　(B)$\frac{1}{2}$.　　(C)$-\frac{1}{2}$.　　(D)非上述答案.

二、填空题

1. 若$a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=1$，则$a^4+b^4+c^4$的值为__________.

2. 若$(x-3)^5=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$，则$b+c+d+e$的值为__________.

三、求证：$xy(3x+2)(5y+2)$可化为具有整系数的两个多项式的平方差.

四、把$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$表示为两个多项式的平方和.

复习题一

一、选择题

1. 如果$1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0$，那么$\frac{2}{x}$等于(　　)

(A)-2.　　(B)-1.　　(C)1.　　(D)2.

2. 已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0,abc=8$，那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值是（　　）

(A)正数.　　　　　(B)零.

(C)负数.　　　　　(D)正、负不能确定.

3. 若 a,b,c 均为实数，且使 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，那么（　　）

(A)a,b,c 必定同号.

(B)a,b,c 中必有两个相等.

(C)a,b,c 中必有两个互为相反数.

(D)以上结论都不对.

4. x,y 为两个正数，$x:y=a:b$，其中 $0<a<b$. 如果 $x+y=c$，则 x 与 y 中较小的一个为（　　）

(A)$\frac{ac}{b}$.　　(B)$\frac{bc-ac}{b}$.　　(C)$\frac{ac}{a+b}$.　　(D)$\frac{bc}{a+b}$.

5. 把 $x^5, x+\frac{1}{x}, 1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$ 相乘，其积是一个多项式，该多项式的次数是（　　）

(A)2.　　(B)3.　　(C)6.　　(D)7.

二、填空题

1. 已知 $x^2-3y^2=2xy, x>0, y>0$，则 $\frac{x+2y}{x-y}$ 的值为________.

2. 已知 $x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$，则 $x=$________.

3. 化简 $\dfrac{a^2(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+b^2(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})+c^2(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}{a(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}=$________.

4. 若 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则 $\frac{2x+3xy-2y}{x-y-2xy}$ 的值为________.

5. 如果 $x+\frac{1}{x}=3$，则 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=$________.

三、解答题

1. 已知 $y_1=2x, y_2=\frac{2}{y_1}, y_3=\frac{2}{y_2}, \cdots, y_{1986}=\frac{2}{y_{1985}}$，求 $y_1 \cdot y_{1986}$ 的值．

2. 解方程 $\frac{1}{(x-5)(x-4)}+\frac{1}{(x-4)(x-3)}+\cdots+\frac{1}{(x-1)x}+\frac{1}{x(x+1)}+\cdots+\frac{1}{(x+4)(x+5)}=\frac{10}{11(x-5)}$.

3. 已知 $x(x\neq 0,\pm 1)$ 和 1 两个数，如果只许用加法、减法和作被除数的除法三种运算（可用括号），经过六步算出 x^2，求此运算的表达式.

4. 已知 $x=3.3$，求 $\frac{3x^2+2x-1}{x^2+6x+5}$ 的值.

5. 已知 $x+3y+5z=0, 2x+4y+7z=0$，求 $\frac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+7z^2}$ 的值.

6. 若 $x^2-8x+13=0$，求 $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$.

7. 化简 $\dfrac{\frac{b^2-c^2}{a}+\frac{c^2-a^2}{b}+\frac{a^2-b^2}{c}}{\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}}$.

8. 把分式 $\frac{x^3+5x^2-2x+2}{x^3-1}$ 化成 $A+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$ 的形式.

9. 设 $x+y+z=3$，求下式的值

$$p=\frac{3(x-1)(y-1)(z-1)}{(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3}.$$

10. 若 x,y,z 是实数，$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$.

求 $\frac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$ 的值.

11. 已知 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$，求证：

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}+\frac{c^3}{z^2}=\frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2}.$$

12. 已知 a,b,c,d 为实数，且 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$，求证：

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1.$$

13. 设 $a+b+c=0$，求证：

$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

14. 已知 $a+b=3,ab=1,c+d=4,cd=2$，且

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}=B.$$

求证：

(1) $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}=7B-7.$

(2) $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}=49B-68.$

15. 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，求证：

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

16. 证明：

$$\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+4}{x+3}+\frac{x+5}{x+4}$$
$$=\frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}.$$

17. 有一列自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，其中等于 i 的有 K_i 个 $(i=1,2,\cdots,m)$，设 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$S_j=k_1+k_2+\cdots+k_j$，求证：

$$S_1+S_2+\cdots+S_m=(m+1)n-S.$$

18. 已知 $\frac{a}{bc-a^2}+\frac{b}{ac-b^2}+\frac{c}{ab-c^2}=0$，求证：

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ac-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0.$$

19. 求证：

$$2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$$
$$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

20. 已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，

求证：$\frac{1}{a^{1995}}+\frac{1}{b^{1995}}+\frac{1}{c^{1995}}=\frac{1}{a^{1995}+b^{1995}+c^{1995}}$.