经全国中小学教材审定委员会
2007年初审通过

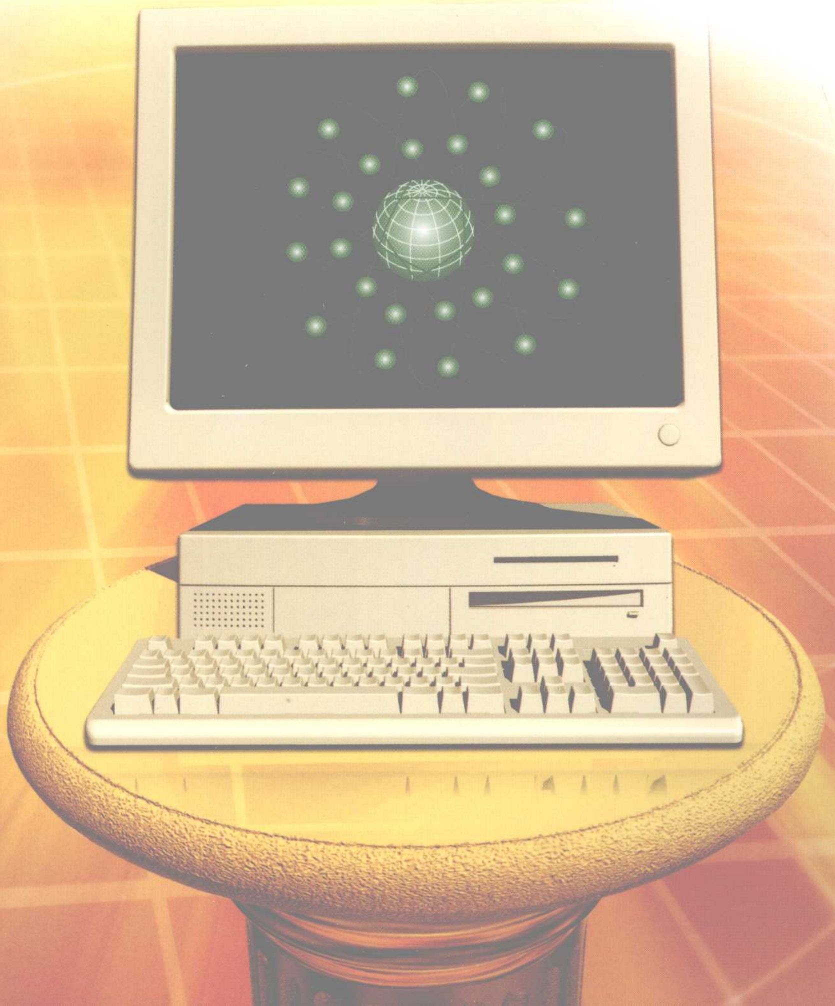
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–3

球面上的几何

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

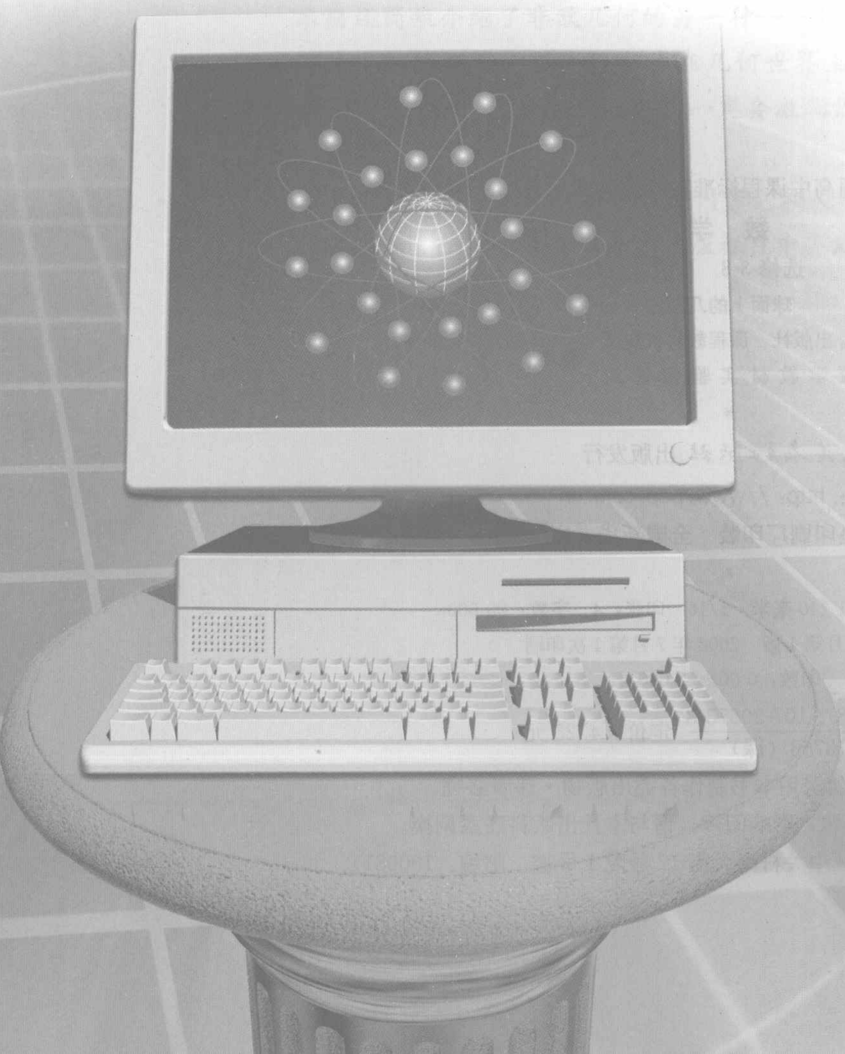
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–3

球面上的几何

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

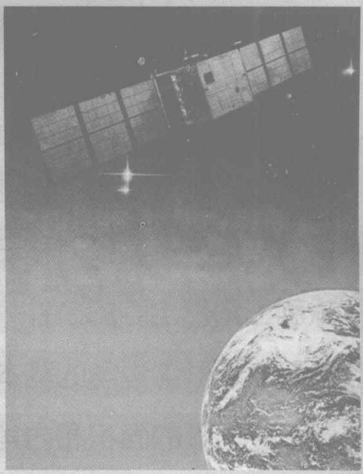
主　　编　高存明

编　　者　张爱和　高存明　龙正武
责任编辑　龙正武
美术编辑　张　蓓　王　喆
封面设计　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书
数　学
选修 3-3　B版
球面上的几何
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著
*
人民教育出版社 出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销
*
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：4　字数：90 000
2008 年 3 月第 1 版　2008 年 7 月第 1 次印刷
印数：0 001～2 000
ISBN 978-7-107-20673-3
G・13763（课）　定价：4.25 元

本册导引

由于人们的视野很小，在很长的历史时期，人们总认为地球的表面是一个平面．随着人们活动范围的扩大和科学研究的进展，才逐渐发现我们生活在一个球面上．当人们进行大地（天体）测量、航海、飞机飞行、卫星定位时，如果再把地球表面看成平面，就不会得到正确的结果．这就需要研究球面上几何图形的性质．



球面几何的学习将使同学们扩大几何知识的视野．许多平面图形的几何性质，都可推广到球面上来．表面上看球面和平面是完全不同的两个几何图形，但换个角度去看，它们竟然有许多的相似之处．例如，大圆弧和直线段、平面三角形和球面三等形等．而且有许多球面图形的性质，会使你感到惊奇！例如，球面三角形的三内角和就不等于180度，球面角的两边会相交等．学习球面几何会促使我们对一些平面几何概念进行更深入的思考，例如“距离”“线段”等．

本册还简短介绍了非欧几何的另一种——双曲几何的庞加莱模型．当你进一步在几何世界里漫游时，你会感到惊奇、兴奋，学习球面几何，了解双曲几何，一定会激励你勇往直前地去探索几何世界里的奥秘．

本书还设置了计算机辅助学习的内容，相关的课件可从人教网（http：//www. pep. com. cn）中的高中数学B版栏目中下载．

目　录

第一章　球面的基本性质 …… 1
1.1　球面的基本性质 …… 1
1.2　平面、直线与球面的位置关系 …… 3
1.3　球面上两点间的距离和球面直线 …… 9
1.4　球面上圆的极、赤道与球面角 …… 12
附录　多面角 …… 16

第二章　球面三角形的全等与内角和 …… 18
2.1　球面三角形及其极对称三角形 …… 18
2.2　球面三角形全等的条件 …… 21
2.3　球面三角形中边角的基本性质 …… 25
2.4　球面三角形的面积和内角和 …… 27
2.5　球面多边形的内角和与欧拉公式 …… 28

第三章　球面三角形的余弦定理和正弦定理 …… 32
3.1　向量的叉积及其性质 …… 32
3.2　球面上的余弦定理 …… 37
3.3　球面上的正弦定理 …… 39
3.4　平面三角公式与球面三角公式的比较 …… 43
3.5　球面几何知识的应用 …… 46
阅读与欣赏　距离差作图法确定舰船位置 …… 51

第四章　双曲几何的庞加莱模型 …… 53
4.1　基础知识 …… 53
4.2　双曲几何的庞加莱单位圆盘模型 …… 55
阅读与欣赏　欧氏几何与非欧几何 …… 57
本册小结 …… 59

第一章　球面的基本性质

球面是大家非常熟悉的一个曲面，日常生活中几乎处处都有它的影子．例如，地球表面可近似地看成是一个球面，篮球、足球和乒乓球等的表面都是球面．

粗略地看来，球面好像是一个比较简单的几何对象．然而，事实真的如此吗？

如图 1-1 所示，假设位于篮球表面 A 处的小蚂蚁，发现篮球表面的 B 处有一小块食物．那么，这只小蚂蚁应该沿着怎样的路线爬行，才能使自己所走的路程最短呢？最短路程应该怎样计算呢？值得注意的是，这只蚂蚁是只能在篮球的表面爬行的．

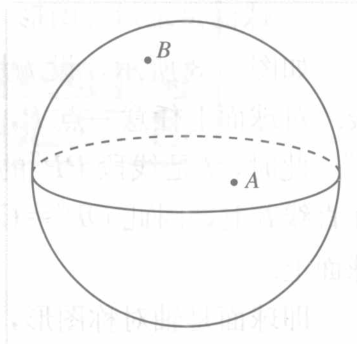


图 1-1

另外，从地球仪上可以看出，我国的北京（东经 116°，北纬 40°）和美国的纽约（西经 74°，北纬 40°）都在地球的北半球上，而且这两个城市在同一纬度圈上．那么，从北京飞往纽约的飞机，是沿着纬度圈飞行时的路程最短吗？如果不是，应该沿着什么样的路线飞行才能使经过的路程最短呢？最短路程的长约为多少呢？（飞行高度忽略不计）

这里我们所要回答的是，球面上两点之间的连线中，什么样的线最短，以及怎样计算最短的线的长度．

在学完本章的内容以后，我们将能给出类似问题的圆满答案．

1.1　球面的基本性质

如图 1-2 所示，一个半圆以通过直径的直线为旋转轴，旋转一周所形成的曲面，叫做**球面**．球面所围成的几何体叫做**球**．此时，半圆的圆心叫做**球心**，连接球心与球面上任意一点的线段叫做**半径**．

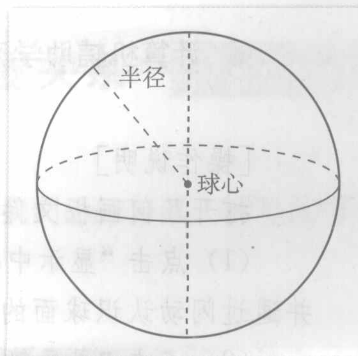


图 1-2

从解析几何中我们知道，圆可以看成是平面上到定点（圆心）的距离等于定长（半径）的点的集合．通过类比可知，球面可以看成是空间中到定点（球心）的距离等于定长（半径）的点的集合．

我们还知道，平面中的圆是中心对称图形，也是轴对称图形．同样地，作为空间中最完美的图形之一的球面也具有很强的对称性．

1. 球面是中心对称图形

事实上，对球面上任意一点 P，假设它关于球心的对称点为 P'（如图 1-3）．则由 P 和 P' 到球心的距离相等可知，点 P' 到球心的距离等于半径，即点 P' 一定在这个球面上．

因此，球面是中心对称图形，球心是对称中心．

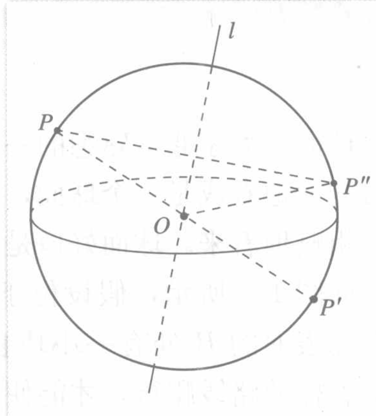


图 1-3

2. 球面是轴对称图形

如图 1-3 所示，设 l 是通过球心 O 的任意一条直线．对球面上任意一点 P，设它关于直线 l 的对称点为 P''．此时，l 是线段 PP'' 的垂直平分线．又因为球心 O 在直线 l 上，因此 $OP''=OP$．从而，点 P'' 一定在这个球面上．

即球面是轴对称图形，任意一条通过球心的直线都是对称轴．

3. 球面是镜面对称图形

如果一个图形关于某个平面对称，我们就称它是镜面对称图形，这个平面称为它的对称面．

利用类似的方法，我们能够证明球面是镜面对称图形，而且通过球心 O 的任意一个平面都是球面的对称面．

4. 球面是旋转对称图形

事实上，我们可以证明，如果 l 是通过球心 O 的任意一条直线，则球面绕 l 旋转任意角度后都会与自身重合．

球面的镜面对称性和旋转对称性的详细证明，留给同学们作为练习．

● 计算机辅助学习

探索球的对称性

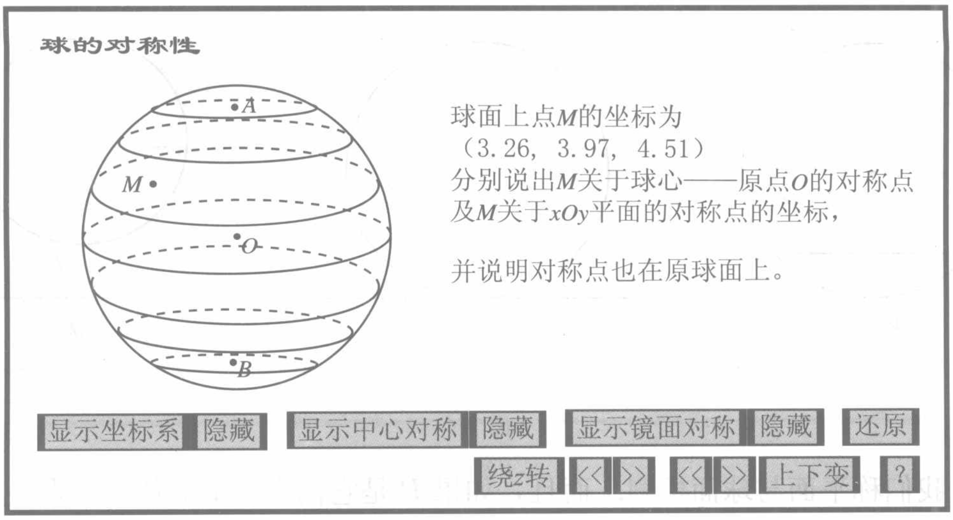
[操作说明]

打开几何画板文件 ZX—17，可进入第一页点 P 在球外的界面：

(1) 点击“显示中心对称”按钮，显示球面上的点 M 关于球心的对称点 M'，并通过闪动认识球面的中心对称性．

(2) 点击“显示镜面对称”按钮，显示球面上的点 M 关于球的一个大圆所在平面的对称点 M''，并通过闪动认识球面的镜面对称性，同时显示这两点的对称轴来说明球的轴对称性．

(3) 点击“绕 z 转”按钮，使点 M 绕竖直轴转动，观察球的旋转对称性．后面是两个慢动按钮．要上下改变点 M 的位置，用“上下变”和另两个慢动按钮．



(4) 点击“显示坐标系”按钮，根据给出的点 M 的坐标练习求 M 的对称点的坐标并回答所提出的问题.

(5) 各个“隐藏”按钮可以隐去相关的图形.

(6)“还原”按钮可使界面还原到初始状态.

练习

1. 证明球面既是镜面对称图形，又是旋转对称图形.

2. 已知某平面通过连接球面上任意两点的线段的中点，并且与这条线段垂直，证明这个平面一定通过球心.

1.2 平面、直线与球面的位置关系

在平面几何中，通过对圆心与直线的距离和半径的比较，我们已经知道，圆与直线的位置关系有 3 种，即相割、相切和相离（如图 1-4 所示）.

下面我们通过类比来探讨球面与平面的位置关系.

不难知道，球面与平面之间的位置关系，取决于球心到平面的距离和球面半径的大小.

已知平面 α 和球面 O，设球面的半径为 R，球心 O 到平面 α 的距离 $OO'=d$. 容易看出：

(1) 如果 $d<R$，则平面与球面有一条交线（如图 1-5(1)).

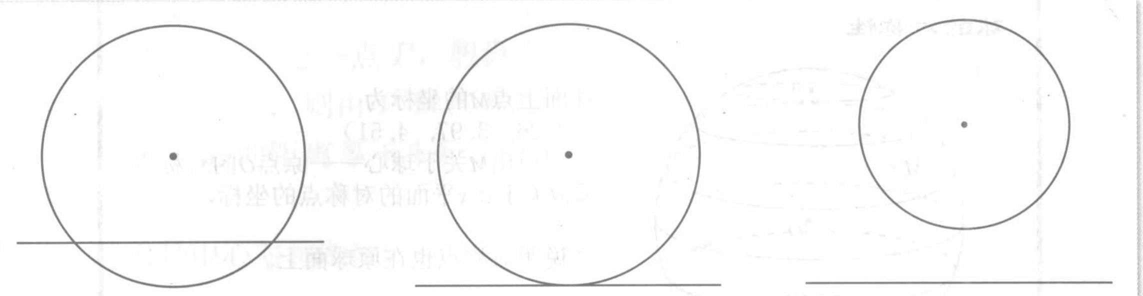


图 1-4

此时，我们称平面与球面相割．而且，如果 P 是它们交线上的任意一点，那么

$$r=\sqrt{OP^2-d^2}=\sqrt{R^2-d^2},$$

即 r 是一个定值．

这说明交线是平面 α 内到定点 O' 的距离等于定长 r 的点的集合，所以一个平面截一个球面所得的交线，是以球心在截面上的射影 O' 为圆心，r 为半径的一个圆．

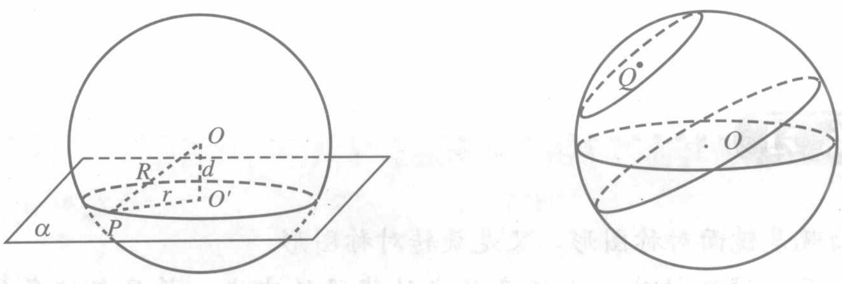


图 1-5

特别地，当 $d=0$ 时，平面 α 通过球心，$r=R$．显然，此时所截得的圆的半径最大．

球面被经过球心的平面所截得的圆，叫做这个球面的大圆；被不经过球心的平面所截得的圆，叫做这个球面的小圆（图 1-5(2)）．由定义可知，小圆的半径总是小于球面的半径．

(2) 如果 $d=R$，则平面与球面有且只有一个交点，并且平面垂直于过交点的半径．

此时称平面与球面相切（如图 1-6(1)），交点称为切点，平面称为球面在切点处的切平面．

(3) 如果 $d>R$，则平面与球面没有公共点．

此时称平面与球面相离（如图 1-6(2)）．

下面探讨球面与直线的位置关系．

如图 1-7 所示，已知球面 O 和直线 AB，则通过 AB 和球心 O 的平面与球面相交于一个大圆．因此，由大圆和直线 AB 的位置关系，可以探讨球面 O 与直线 AB 的位置关系．

如果球心到直线的距离大于球面的半径，则直线和球面没有公共点，此时称直线与球

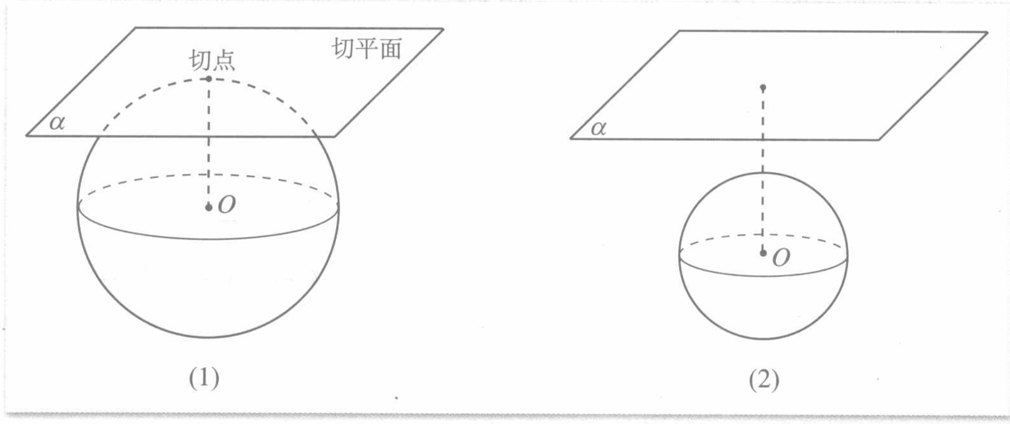


图 1-6

面相离.

如果球心到直线的距离等于球面的半径，则容易证明直线与球面有且只有一个公共点，此时称直线与球面相切，直线为球面的**切线**，公共点为**切点**.

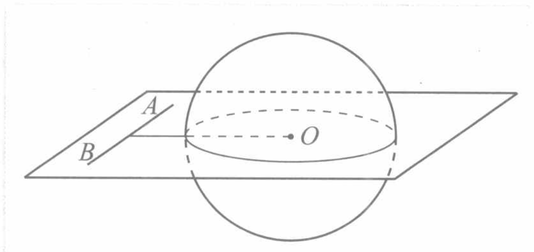


图 1-7

如果球心到直线的距离小于球面的半径，则直线和球面有两个公共点，此时称直线与球面相割.

请同学们自己证明下述有关球面切线的结论：

如果直线与球面相切，那么这条直线垂直于过切点的半径；如果直线垂直于球面的半径，而且垂足在球面上，那么该直线与球面相切.

思考与讨论

过球面上的一个定点的所有球面的切线的集合，构成什么样的图形？

［**探索与研究**］从以上可以看出，有关圆的许多性质，都可通过类比，推广到球面上来. 请同学们自行探索与研究，看看有哪些圆的性质可推广到球面上来.

下面我们以圆幂定理为例，说明怎样把它推广为球幂定理.

圆幂定理 已知圆 O 的半径为 r，通过一定点 P 作圆 O 的任意一条割线交圆于 A，B 两点，则：

(1) 当点 P 在圆外时，$PA \cdot PB = PO^2 - r^2 > 0$；

(2) 当点 P 在圆内时，$PA \cdot PB = r^2 - PO^2 > 0$；

(3) 当点 P 在圆上时，$PA \cdot PB = 0$.

如图 1-8 即为 P 在圆外和 P 在圆内的情形.

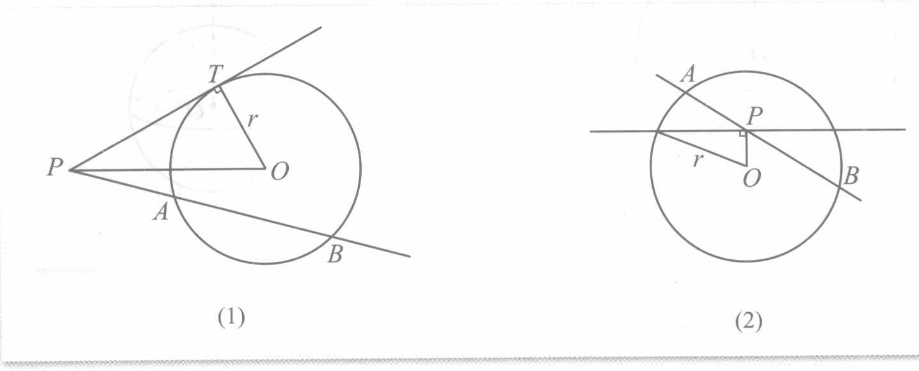


图 1-8

在图 1-8 (1) (2) 中，以 OP 所在的直线为旋转轴，将圆 O 旋转一周，则圆 O 可形成球面 O. 注意到此时 PT 是球面 O 的切线，直线 PAB 与球面 O 相割，而且各线段的长度保持不变. 因此我们可得到如下球幂定理.

球幂定理　已知球面 O 的半径为 R，通过一定点 P 作球面 O 的任意一条割线交球面于 A，B 两点，则：

(1) 当点 P 在球 O 外时，$PA \cdot PB = PO^2 - R^2 > 0$；

(2) 当点 P 在球 O 内时，$PA \cdot PB = R^2 - PO^2 > 0$；

(3) 当点 P 在球面上时，$PA \cdot PB = 0$.

作为练习，请同学们查阅有关资料，先证明圆幂定理，然后用类似的方法证明球幂定理.

下面，我们用向量的有关知识来证明球幂定理，以帮助大家提高用向量研究几何问题的能力.

证明：如图 1-9 所示，设 P 点在球外，PT 为是球面的切线，T 为切点，PAB 与球面相交于 A，B 两点. 假设 $\boldsymbol{u}$ 是与向量 $\overrightarrow{PB}$ 同方向的单位向量.

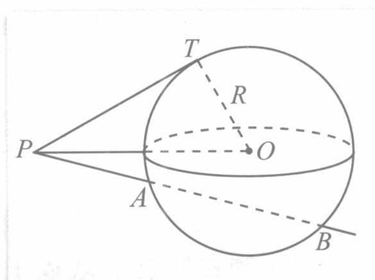


图 1-9

由向量 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{PB}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 平行可知，存在有唯一的实数 x_1，x_2，使得

$$\overrightarrow{PA} = x_1\boldsymbol{u}, \quad \overrightarrow{PB} = x_2\boldsymbol{u}.$$

注意到 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + x_1\boldsymbol{u}$，而且 $|\overrightarrow{OA}| = R$，因此有 $(\overrightarrow{OP} + x_1\boldsymbol{u}) \cdot (\overrightarrow{OP} + x_1\boldsymbol{u}) = R^2$. 整理，得

$$x_1^2 + 2(\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{u})x_1 + |\overrightarrow{OP}|^2 - R^2 = 0.$$

同理可知

$$x_2^2 + 2(\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{u})x_2 + |\overrightarrow{OP}|^2 - R^2 = 0.$$

因此，x_1，x_2 都是方程

$$x^2 + 2(\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{u})x + |\overrightarrow{OP}|^2 - R^2 = 0$$

的根．由一元二次方程的根与系数的关系可知

$$x_1x_2=|\overrightarrow{OP}|^2-R^2=|\overrightarrow{PT}|^2.$$

又因为$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2$，所以此时有$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PT}|^2>0$.

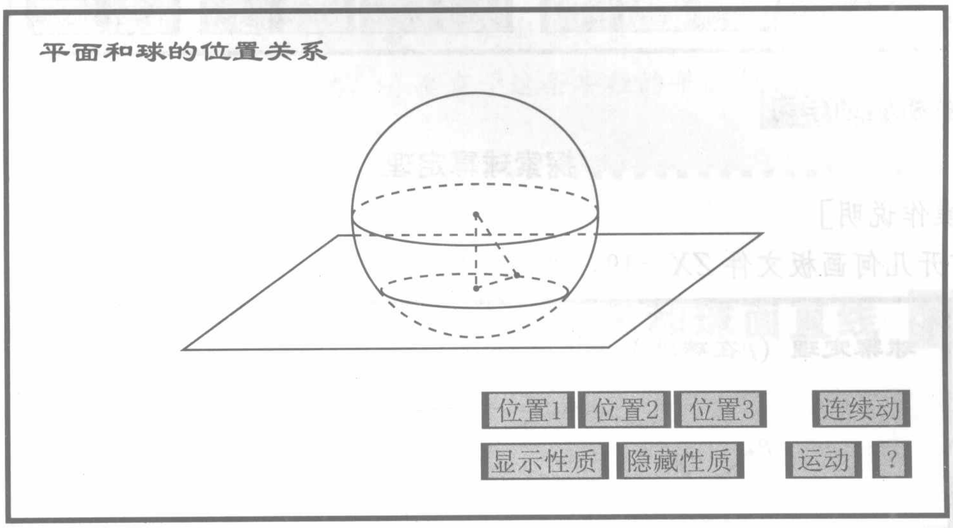
当 P 在球 O 内和球面上时的情形，请同学们自己证明.

● **计算机辅助学习**

探索平面和球面的位置关系

[操作说明]

打开几何画板文件 ZX—18，可进入界面：



(1) 点击“连续动”按钮，观察平面运动时与球面的不同位置关系，“位置 1”“位置 2”“位置 3”三个按钮可以分别观察三个不同的特殊位置.

(2) 点击“显示性质”按钮可以在平面截球面时显示截面的性质，必要时可以用“运动”按钮使图形运动.

● **计算机辅助学习**

探索球面的基本性质

[操作说明]

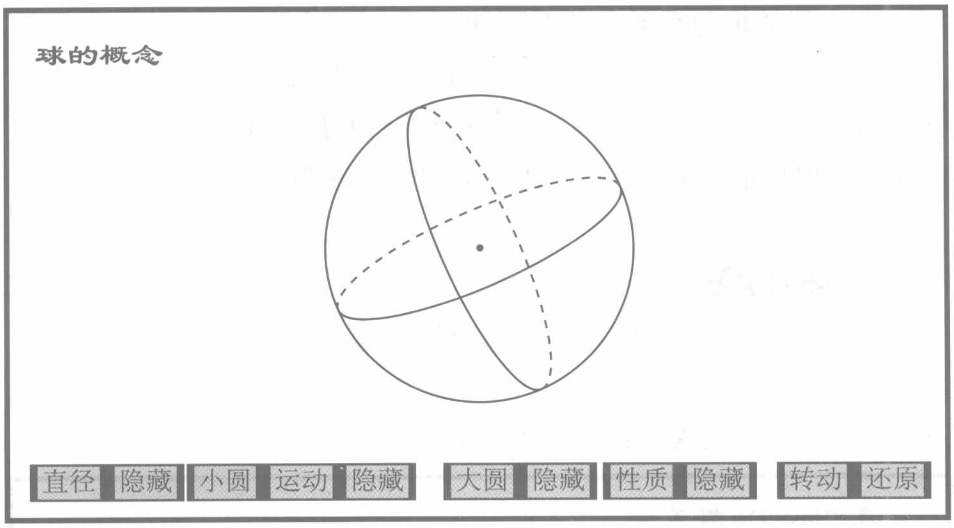
打开几何画板文件 ZX—16，可进入界面：

(1) 点击“大圆”和“直径”按钮，观察和复习球的定义.

(2) 点击“性质”按钮，复习以前学过的球的性质.

(3) 点击“直径”和“小圆”按钮，分别显示球的直径和小圆，并可以使用“运动”按钮观察不同位置的小圆.

(4) 点击“转动”按钮，观察运动中的球体，点击“还原”按钮可使界面还原到初始状态.

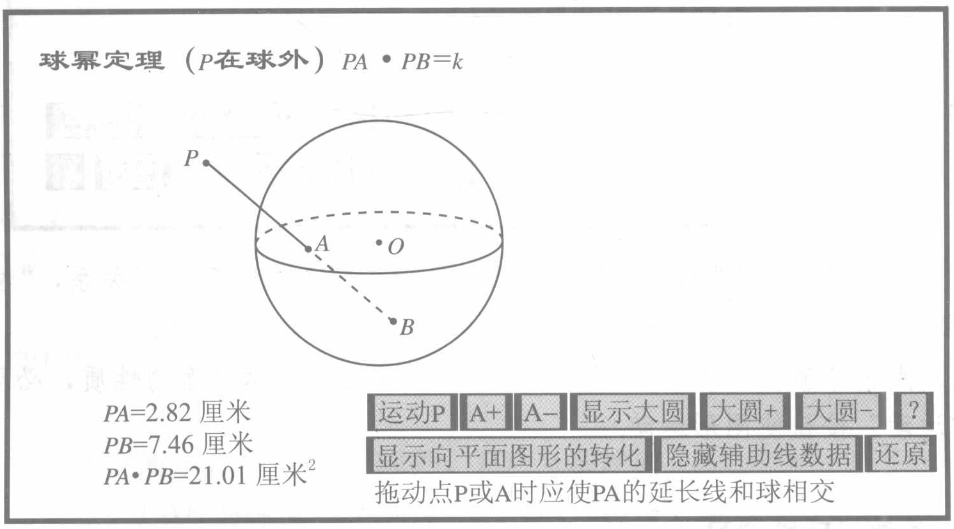


计算机辅助学习

探索球幂定理

[操作说明]

打开几何画板文件 ZX—19，可进入第一页界面：



(1) 点击“显示大圆”和后面的两个慢动按钮，分别显示经过或运动过 A，B 的大圆，使我们直观认识球的割线，为向平面问题转化打下基础.

(2) 点击“隐藏向平面图形的转化”和“隐藏辅助线数据”按钮，显示平面图形和辅助线，研讨证明定理的方法.

(3) 在点击“隐藏向平面图形的转化”后，点击“运动 P”、“$A+$”、“$A-$”按钮，改变点 P，A 的位置，还可以直接拖动这两点，使点 A 在线段 PB 上，拖动时图形将同步变化.

(4) 观察界面上的数据，思考为什么 PA，PB 变化时它们的乘积不变. 设这个乘积为 k 时，k 与图形中线段有什么关系. 由此，得出球幂定理的结论，再进一步思考点 P 在球面上或球内时的情况.

(5)“还原”按钮可使界面还原到初始状态.

(6) 第二页是点 P 在球面上或球内时的情况. 图形（略）及按钮的应用和第一页类似，只是要注意：拖动点 P 时不能拖到球面外，按钮“$P \to A$”是点 P 在球面上的情况，可以看到这时的 k 值为 0.

两种情况的结论可以统一为

$$k=|PO^2-R^2|.$$

练习

1. 证明一个球的球心在它的小圆截面内的射影是这个小圆的圆心.
2. 证明过一个球面的半径外端，并垂直于这条半径的平面与球面只有一个交点.
3. 用其他方法证明球幂定理.

1.3 球面上两点间的距离和球面直线

1. 球面上两点间的距离

首先，让我们回到本章一开始提出的问题上来. 如图 1-10 所示，处在 A 处的蚂蚁可以沿着路径 ACB，ADB，AEB 以及 AFB 等到达 B 处. 但是，直观上我们可以看出，大圆的劣弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 应该是这些线中最短的.

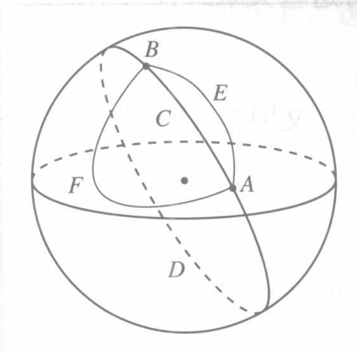


图 1-10

事实上，我们有以下结论：

球面上连接两点的所有曲线中，经过这两点的大圆在这两点间的那段劣弧的长度最短.

我们以后称这段劣弧的长度为这两点间的**球面距离**.

特别需要提醒的是，上述结论中所提到的曲线，其每一点都必须全部在球面上，这就好像蚂蚁如果在篮球表面上时，它只能沿着篮球表面爬行一样.

下面简要地说明一下上述结论的证明方法.

如图 1-11，设 $\overset{\frown}{ACB}$ 是连接球面上 A，B 两点的大圆的劣弧，$ADE\cdots GB$ 是球面上不同于 $\overset{\frown}{ACB}$ 的曲线，并且假设 D，E，…，G 各点把这条曲线分为 $\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{DE}$，…，$\overset{\frown}{GB}$（只要分点足够多的话，这些曲线弧都可近似地看作是圆弧）.

把 A，D，E，…，G，B 各点与球心 O 连接起来，则有（详细的证明请参见本章的附

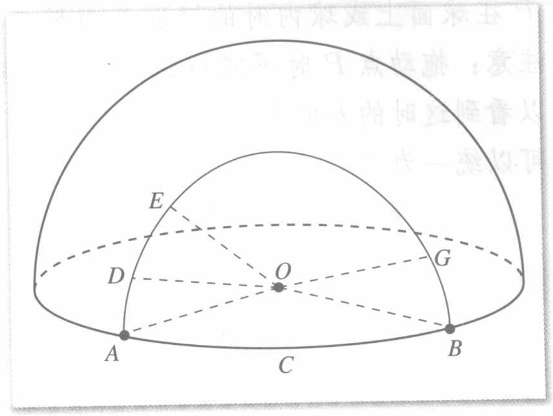


图 1-11

录）

$$\angle AOB<\angle AOD+\angle DOE+\cdots+\angle GOB.$$

假设球面的半径为 R，各个角的大小都以弧度为单位，则

$$\frac{\overset{\frown}{ACB}}{R}=\angle AOB,$$

且

$$\frac{\overset{\frown}{AD}}{R}=\angle AOD,\ \frac{\overset{\frown}{DE}}{R}=\angle DOE,\ \cdots,\ \frac{\overset{\frown}{GB}}{R}=\angle GOB,$$

将这些关系式代入上面的不等式并整理，可得

$$\overset{\frown}{ACB}<\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DE}+\cdots+\overset{\frown}{GB}.$$

又因为 $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DE}+\cdots+\overset{\frown}{GB}=ADE\cdots GB$，所以

$$\overset{\frown}{ACB}<ADE\cdots GB.$$

这就说明了，连接球面上两点的所有曲线中，经过这两点的大圆在这两点间的劣弧的长度最短.

2. 球面直线

我们知道，平面上两点之间的连线中，连接这两点的线段最短. 因此，从“最短连线”这个意义上看来，“球面上过两点的大圆在这两点间的劣弧”和“平面上连接两点的线段”具有相同的性质. 正因为如此，以后我们称球面上过两点的大圆在这两点间的劣弧为球面线段，这两点称为球面线段的端点.

我们不难证明，跟平面中的情形一样，球面上任意给定两点，都存在线段以这两点为端点（请同学们证明这个结论）. 但是，与平面中不一样的是，在球面上给定两点之后，连接这两点的线段有可能不止一条.

实际上，当给定的两点关于球心对称时（此时，其中一点叫做另外一点的对径点），连接这两点的球面线段有两条. 如图 1-12 所示，球面 O 上点 A 和点 B 关于球心 O 对称，

此时，$\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{ADB}$ 都是球面上以 A 和 B 为端点的线段.

其次，我们来探讨，平面内的线，到底应该具有什么特征才能是直线的问题.

显然，如果 l 是平面中的一条直线，那么连接 l 上任意两点的线段一定在 l 上. 而且，直观上我们可以看出，对于平面中的一条线 l，如果连接 l 上任意两点的线段都在 l 上，那么 l 是直线.

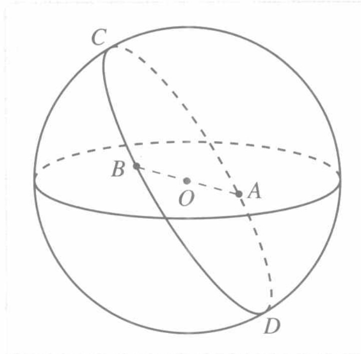


图 1-12

由前面关于球面线段的讨论我们知道，如果 s 是球面上的一个大圆，那么连接 s 上任意两点的球面线段一定在 s 上. 反之，我们还可以看出，如果 s 是球面上的一条线，而且连接 s 上任意两点的球面线段都在 s 上，那么 s 是一个大圆.

由此我们知道，球面上的大圆相当于平面上的直线. 正因为这样，我们称球面上的大圆为**球面直线**. 类似地，我们可以定义球面射线.

与平面上的直线不同的是，球面直线具有以下性质：

(1) 球面直线的长度是有限的.

事实上，这是因为球面上大圆的周长是有限的. 同理我们还可以知道，任意两条球面直线的长度都相等.

(2) 任意两条球面直线都相交，而且有两个交点.

这个性质的证明留给同学们作为练习. 有意思的是，如果我们称没有公共点的两条球面直线互相平行的话. 那么根据这条性质可知，任意两条球面直线都不平行. 实际上，这个性质是球面几何与平面几何的本质区别之一.

例 将地球的表面看成一个球面，假设某电视塔的高度是 h (信号发射器在塔的顶端)，求地面上能直接接收到该电视塔发出的信号的地方离塔底的球面距离的最大值. (设地球半径为 R)

解 如图 1-13 所示，设 A 为塔底，B 为塔顶，O 为地心.

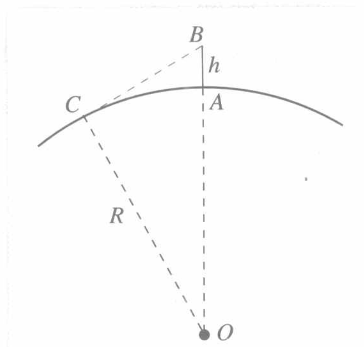


图 1-13

过 B 作球面 O 的切线交球面于 C. 显然，所求球面距离的最大值等于 $\overset{\frown}{AC}$ 的弧长.

显然，$\cos\angle COA=\dfrac{R}{R+h}$，因此 $\overset{\frown}{AC}$ 的弧长为

$$R\angle COA=R\arccos\frac{R}{R+h}\text{❶}.$$

即所求球面距离的最大值为 $R\arccos\dfrac{R}{R+h}$.

❶ 如果 $\alpha=\cos\theta$ 且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则记 $\theta=\arccos\alpha$. 例如，$\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\pi$.

例如，上海的东方明珠电视塔的高度为 468 m．如果地球半径取为 6 378 100 m 的话，那么地面上能直接接收到东方明珠电视塔发出的信号的地方中，离塔底的球面距离的最大值为

$$R\arccos\frac{R}{R+h}=6\ 378\ 100\arccos\frac{6\ 378\ 100}{6\ 378\ 100+468}$$
$$=77\ 262.776\ 2\ \mathrm{m}.$$

练习

1. 什么是球面上两点的球面距离？与平面上两点的距离有什么不同？
2. 证明给定球面上任意两点，都存在球面线段以这两点为端点．
3. 证明任意两条球面直线都相交，而且有两个交点．

1.4　球面上圆的极、赤道与球面角

1. 球面上圆的极

给定球面上的一个圆（大圆或小圆），如果球的一条直径垂直于这个圆所在的平面，则这条直径与球面的两个交点叫做球面上这个圆的极，这条直径称为这个圆的轴．

如图 1-14 所示，P 和 P' 是球面 O 上小圆 M 的极，直径 PP' 是小圆 M 的轴；同时，P 和 P' 也是球面 O 上大圆 O 的极，直径 PP' 也是大圆 O 的轴．

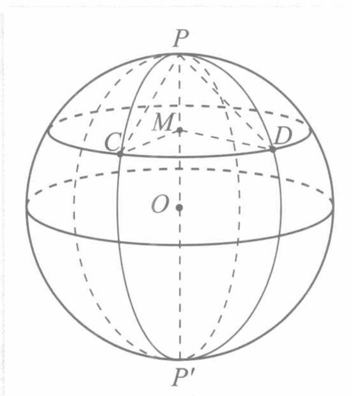


图 1-14

如果一个球的直径垂直于这个球面上的一个大圆所在的平面，这个大圆叫做以这条直径端点为极的赤道圆（简称赤道）．

这些定义是根据地球的北极、南极和赤道而得来的．因此不难看出，球面上一个圆的极有两个．而且，我们有以下结论：

球面上圆的一个极到圆上各点的球面距离相等．

证明　如图 1-14 所示，设 P 为球面上圆 M 的一个极，C 和 D 都是圆 M 上的点．则只需证明 P 和 C 的球面距离等于 P 和 D 的球面距离即可．

假设圆 PCP' 是经过 P 和 C 的大圆，圆 PDP' 是经过 P 和 D 的大圆．