根据教育部颁布的最新考试大纲编写

QUAN GUO CHENG REN GAO KAO FU XI JING YAO YU XI TI JING CUI CONG SHU

喻明智

文史财经类

全国成人高考

复习精要与习题精粹丛书

数学

• 华中理工大学出版社 •

全国成人高考复习精要与习题精粹丛书

数 学

（文史财经类）

喻明智

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国成人高考复习精要与习题精粹丛书　数学(文)/喻明智

武汉:华中理工大学出版社，1998年8月

ISBN 7-5609-1784-4

Ⅰ.全…

Ⅱ.喻…

Ⅲ.数学课-成人教育-升学参考资料

Ⅳ.G723.2

全国成人高考复习精要与习题精粹丛书　数学

(文史财经类)

喻明智

责任编辑：　周芬娜

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山　邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社照排室排版

武汉市新华印刷厂印刷

*

开本:787×1092　1/16　印张:14　字数:346 000

1998年8月第1版　1998年8月第1次印刷

印数:1—3 000

ISBN 7-5609-1784-4/G·186

定价:15.00元

前　言

如何在最短的时间取得复习的最佳效果，这是每一个参加全国成人高考的考生都十分关心的问题。为了帮助成人高考考生迎考复习，掌握行之有效的学习方法和各门课程的复习规律，《全国成人高考复习精要与习题精粹丛书》编写组组织了一批在成人高考领域长期进行教学和科研、教学经验丰富、教研成就突出的教师，根据最新全国成人高考复习大纲，编写了《全国成人高考复习精要与习题精粹丛书》。

本套丛书包括政治、语文、数学（文史财经类）、数学（理工农医类）、历史、地理、物理、化学共八种书。每种书包含两部分：第一部分为复习精要，主要讲解各门课程的基本知识要点和复习线索，并对其进行分类、归纳和整理，着重探讨各门课程的复习规律；第二部分为习题精粹，主要精选一些有代表性、典型性的习题，进行解答和分析，以加深学生对各科知识的消化和理解。

本套丛书具有全面性、系统性、典型性、新颖性等四大特色，主要优点是：（一）紧扣大纲，自成体系，归纳整理，前后贯通；（二）突出重点，突破难点，以点带面，点面结合；（三）简明扼要，通俗易懂，便于理解，方便记忆。

为了帮助考生了解近年来全国成人高考的最新动态和信息，在每种书后附有1997年、1998年全国成人高考考试试题和两套模拟试卷。

《全国成人高考复习精要与习题精粹丛书》

编写组

1998年6月

目　录

代　数

第一章　数、式、方程和方程组 …… (1)
　内容精要 …… (1)
　例题精讲 …… (7)
　习题精粹 …… (14)
　习题解答 …… (15)
第二章　集合 …… (19)
　内容精要 …… (19)
　例题精讲 …… (21)
　习题精粹 …… (25)
　习题解答 …… (25)
第三章　不等式和不等式组 …… (28)
　内容精要 …… (28)
　例题精讲 …… (32)
　习题精粹 …… (37)
　习题解答 …… (38)
第四章　指数与对数 …… (44)
　内容精要 …… (44)
　例题精讲 …… (45)
　习题精粹 …… (49)
　习题解答 …… (50)
第五章　函数 …… (54)
　内容精要 …… (54)
　例题精讲 …… (59)
　习题精粹 …… (65)
　习题解答 …… (66)
第六章　数列 …… (71)
　内容精要 …… (71)
　例题精讲 …… (72)
　习题精粹 …… (76)
　习题解答 …… (78)
第七章　排列与组合 …… (83)
　内容精要 …… (83)
　例题精讲 …… (84)

习题精粹 …… (88)
习题解答 …… (89)

三角函数

第八章 三角函数及其有关概念 …… (93)
内容精要 …… (93)
例题精讲 …… (95)
习题精粹 …… (99)
习题解答 …… (100)
第九章 三角函数的图象和性质 …… (103)
内容精要 …… (103)
例题精讲 …… (105)
习题精粹 …… (110)
习题解答 …… (112)
第十章 三角函数式的变换 …… (118)
内容精要 …… (118)
例题精讲 …… (120)
习题精粹 …… (126)
习题解答 …… (128)
第十一章 解三角形 …… (133)
内容精要 …… (133)
例题精讲 …… (134)
习题精粹 …… (140)
习题解答 …… (142)

平面解析几何

第十二章 直线 …… (149)
内容精要 …… (149)
例题精讲 …… (152)
习题精粹 …… (158)
习题解答 …… (160)
第十三章 圆锥曲线 …… (166)
内容精要 …… (166)
例题精讲 …… (170)
习题精粹 …… (184)
习题解答 …… (188)
全国成人高考模拟试卷(A 卷) …… (201)
全国成人高考模拟试卷(B 卷) …… (205)
1997 年成人高等学校招生全国统一考试试卷 …… (209)
1998 年成人高等学校招生全国统一考试试卷 …… (213)

代　　数

第一章　数、式、方程和方程组

内容精要

(一) 实数

1. 实数的概念

有理数和无理数统称为实数. 整数和分数统称为有理数. 正整数(自然数)、零、负整数统称为整数,正分数、负分数统称为分数. 整数也可以看作是分母为 1 的分数,因此,分数包括整数.

任何一个有理数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式,整数也可以看作是小数点后面是零的小数.

既不是有限小数,也不是无限循环小数,即无限不循环小数就叫做无理数. 无理数可以分为正无理数和负无理数.

2. 实数的分类

实数可作如下分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或者无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

3. 数轴

规定了原点、方向和长度单位的直线,叫做数轴,如图 1-1 所示.

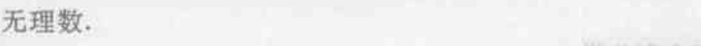

图 1-1

每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点来表示,反过来,数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数. 这就是说,实数和数轴上的点之间具有一一对应的关系,或者说,实数集和数轴上的点集之间具有一一对应的关系.

4. 相反数与倒数

只有符号不同的两个数 a 与 $-a$，称其中一个是另一个的相反数. 零的相反数是零.

1 除以某数的商称作这个数的倒数. 零无倒数.

5. 实数的绝对值

在数轴上表示一个数的点离开原点的长度，叫做这个数的绝对值，用符号 $|a|$ 表示.

规定 一个正实数的绝对值是它的本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 即

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$$

注意 $|a| \geqslant 0$，即 $|a|$ 是一个非负数.

6. 平方根

如果 $x^2 = a (a > 0)$，则 x 就叫做 a 的平方根或二次方根. 正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数，记作 $\pm\sqrt{a}$. 其中正的平方根记作 $\sqrt{a}$，也叫算术平方根（简称算术根），另一个负的平方根，记作 $-\sqrt{a}$.

注意 (1) $\sqrt{a} \geqslant 0$，即 $\sqrt{a}$ 是一个非负数；

(2) 在实数范围内，负数没有平方根；

(3) $(\sqrt{a})^2 = a$，$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$

（二）式

1. 代数式的概念和分类

用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式. 代数式包括有理式和无理式. 整式和分式统称为有理式，含有字母的开方运算的代数式叫做无理式.

代数式可作如下分类：

$$代数式\begin{cases} 有理式\begin{cases} 整式\begin{cases} 单项式 \\ 多项式 \end{cases} \\ 分式 \end{cases} \\ 无理式 \end{cases}$$

2. 整式

(1) 整式的概念

单项式和多项式统称为整式. 由字母与数字相乘而成的代数式叫做单项式，几个单项式的代数和叫做多项式.

(2) 整式的加减

整式的加减主要是去括号、合并同类项. 在多项式的各项中，如果一些项所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同，这些项就叫做同类项. 把多项式的同类项合并成一项，即把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变，叫做合并同类项.

例
$$\begin{aligned} & 8x^3 + 2x^2 + 5 - (4x^3 - 8x^2 + 2x) \\ = & 8x^3 + 2x^2 + 5 - 4x^3 + 8x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$= (8-4)x^3 + (2+8)x^2 - 2x + 5$$
$$= 4x^3 + 10x^2 - 2x + 5.$$

(3) 整式的乘除

① 正整指数幂的运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (a^m)^n = a^{mn};$$
$$(ab)^n = a^n b^n; \quad a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n).$$

② 常用的乘法公式

完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

立方和与立方差公式 $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$;

完全立方和公式 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

③ 单项式乘以单项式

以它们系数的积作为积的系数，以它们相同字母的指数的和作为积里同一字母的指数，只在一个单项式里含有的字母，连同它的指数写在积里.

例
$$-7a^3b^4x^2 \cdot 8a^5x^3y^2$$
$$= (-7 \times 8) \cdot (a^3 \cdot a^5) \cdot b^4 \cdot (x^2 \cdot x^3) \cdot y^2$$
$$= -56a^8b^4x^5y^2.$$

④ 单项式乘以多项式

先将单项式乘以多项式的各项，再把所得结果相加.

例
$$6x^3(7x^2 - 4x + 8)$$
$$= 6x^3 \cdot 7x^2 + 6x^3 \cdot (-4x) + 6x^3 \cdot 8$$
$$= 42x^5 - 24x^4 + 48x^3.$$

⑤ 多项式乘以多项式

先分别将一个多项式的每一项乘以另一个多项式，再把所得结果相加.

例
$$(4x^2 + 5x)(6x^3 - 7x^2)$$
$$= 4x^2 \cdot 6x^3 + 4x^2 \cdot (-7x^2) + 5x \cdot 6x^3 + 5x \cdot (-7x^2)$$
$$= 24x^5 - 28x^4 + 30x^4 - 35x^3$$
$$= 24x^5 + 2x^4 - 35x^3.$$

⑥ 单项式除以单项式

把被除式的系数、幂分别除以除式的系数、同底数幂，被除式单独有的字母连同它的指数也作为商的一个因式.

例
$$-36a^5b^4x^6y^3 \div 9a^2by^2$$
$$= (-36 \div 9) \cdot (a^5 \div a^2) \cdot (b^4 \div b) \cdot x^6 \cdot (y^3 \div y^2)$$
$$= -4a^3b^3x^6y.$$

⑦ 多项式除以单项式

先把多项式的每一项除以单项式，再把所得的商相加.

例
$$(4x^7 - 24x^5 - 20x^3 + 8x^2) \div 4x^2$$
$$= 4x^7 \div 4x^2 - 24x^5 \div 4x^2 - 20x^3 \div 4x^2 + 8x^2 \div 4x^2$$
$$= x^5 - 6x^3 - 5x + 2.$$

⑧ 多项式除以多项式

先把两个多项式都按同一字母降幂排列，若被除式有缺项，留出空位，再用竖式演算.

例 $(-8x+x^3-3)\div(3-x)$

$$
\begin{array}{r}
-x^2-3x-1 \\
-x+3\,\overline{\big)\,x^3-8x-3} \\
\underline{x^3-3x^2} \\
3x^2-8x \\
\underline{3x^2-9x} \\
x-3 \\
\underline{x-3} \\
0
\end{array}
$$

所以 $$(-8x+x^3-3)\div(3-x)=-x^2-3x-1.$$

3. 分式

(1) 分式的概念

形如$\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$的式子叫做分式，其中 A,B 均为整式，且 B 含有字母.

(2) 分式的约分

把一个分式的分子和分母的公因式约去，叫做分式的约分. 其法则是：把一个分式约分，如果分子和分母都是单项式，就约去分子和分母的系数的最大公约数及相同因式的同次幂；如果其中有多项式，就先把多项式分解因式，再约分.

例 1 $$\frac{6ab^2(x-6)(x+5)}{3a^2b(x+5)^2}=\frac{2b(x-6)}{a(x+5)}.$$

例 2 $$\frac{a^{2n+1}-6a^{2n}+9a^{2n-1}}{a^{n+1}-4a^n+3a^{n-1}}=\frac{a^{2n-1}(a^2-6a+9)}{a^{n-1}(a^2-4a+3)}=\frac{a^{2n-1}(a-3)^2}{a^{n-1}(a-3)(a-1)}=\frac{a^n(a-3)}{a-1}.$$

(3) 分式的通分

把异分母的分式化成和原来分式分别恒等的同分母的分式，叫做通分. 其法则是：把两个或几个分式通分，先求出各个分式的分母的最低公倍式，作为公分母，再用这个公分母除以原来的各分母所得的商分别去乘原来的分子，作为各分式的分子.

例 把$\dfrac{5z}{3x^2y},\dfrac{7x}{4y^2z},-\dfrac{5y}{6z^2x}$化为同分母的分式.

因为 $3x^2y,4y^2z,6z^2x$ 的最低公倍式是 $12x^2y^2z^2$，所以

$$\frac{5z}{3x^2y}=\frac{5z\cdot 4yz^2}{12x^2y^2z^2}=\frac{20yz^3}{12x^2y^2z^2},$$

$$\frac{7x}{4y^2z}=\frac{7x\cdot 3x^2z}{12x^2y^2z^2}=\frac{21x^3z}{12x^2y^2z^2},$$

$$-\frac{5y}{6z^2x}=-\frac{5y\cdot 2xy^2}{12x^2y^2z^2}=-\frac{10xy^3}{12x^2y^2z^2}.$$

(4) 分式的加减

同分母的分式相加减，把分子相加减，分母不变. 即

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式，再加减. 即

$$\frac{b}{a}\pm\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}\pm\frac{ad}{ac}=\frac{bc\pm ad}{ac}.$$

(5) 分式的乘除

分式乘以分式，用分子的积做积的分子，用分母的积做积的分母. 即

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

分式除以分式，把除式的分子和分母调换，再和被除式相乘. 即

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

(6) 分式的乘方

分式乘方，把分子、分母各自乘方. 即

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(n\text{ 为正整数}).$$

4. 根式和二次根式

(1) 根式

一般地，如果一个数 x 的 n 次方(n 是大于 1 的整数)等于 a，即 $x^n=a$，那么这个数 x 就叫做 a 的 n 次方根.

当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数；负数的 n 次方根是一个负数. 这时 a 的 n 次方根用符号"$\sqrt[n]{a}$"表示.

当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数，可以合并写为"$\pm\sqrt[n]{a}\ (a>0)$"；负数没有偶次方根.

零的任何次方根都是零.

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，这里 n 叫做根指数，a 叫做被开方数. 根指数相同的根式，叫做同次根式；根指数和被开方数都相同的最简根式，叫做同类根式.

根式的性质主要有：

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$；

② 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

③ 当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$

(2) 二次根式

根指数为 2 的根式 $\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$ 叫做二次根式；满足下列两个条件的二次根式叫做最简二次根式：

① 被开方数的每一个因式的指数小于根指数 2；

② 被开方数不含分母.

二次根式运算的最后结果都要化为最简二次根式.

二次根式的性质主要有：

① $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}$；

② $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

二次根式的运算主要有：

① 加减法：先把各个根式化成最简二次根式，再分别合并同类根式.

② 乘除法：运用二次根式的性质，把被开方数相乘除，根指数不变.

③ 分母有理化：如果两个无理式的乘积是一个有理式，则称其中一个无理式为另一个无理式的有理化因式. 在二次根式中，常见的互为有理化的因式有：$\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$；$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$；$a\pm\sqrt{b}$ 与 $a\mp\sqrt{b}$ 等.

如果代数式的分母是无理式，用分母的有理化因式同乘分子与分母，将分母化为有理式. 此变形过程，叫做分母有理化.

5. 因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解或分解因式.

因式分解的常用方法是：提公因式法、分组分解法、十字相乘法、应用乘法公式法等.

(三) 方程和方程组

1. 方程的基本概念

含有未知数的等式，叫做方程. 使方程左右两边的值相等的未知数，叫做方程的解. 求方程的全部解或确定方程无解的过程，叫做解方程. 如果第一个方程的每一个解都是第二个方程的解，反过来，第二个方程的每一个解都是第一个方程的解，则称这两个方程为同解方程.

① 方程的两边都加上或都减去同一个数或同一个整式，所得方程与原方程是同解方程.

② 方程的两边都乘以或都除以不等于零的同一个数，所得方程与原方程是同解方程.

2. 一元一次方程及其解法

(1) 概念

只含有一个未知数，并且未知数的次数是一次的方程，叫做一元一次方程，其一般形式是

$$ax+b=0\ (a\neq 0).$$

(2) 解法

一元一次方程经过同解变形，如去分母、去括号、移项、合并同类项、方程两边同除以未知数的系数，可求出方程的解.

3. 一元二次方程及其解法

(1) 概念

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的方程，叫做一元二次方程，其一般形式是

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0).$$

(2) 求根公式

一元二次方程的求根公式是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(3) 根的性质

一元二次方程的根的性质，可以由判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 来确定.

① 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；

② 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根；

③ 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根.

(4) 根与系数的关系(韦达定理)

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$的两个根是 x_1, x_2，那么

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

也就是说,一元二次方程的两个根之和等于一次项系数除以二次项系数所得的商的相反数,两个根之积等于常数项除以二次项系数所得的商.

4. 方程组的基本概念

由几个方程组成的一组方程,叫做方程组.方程组各个方程的公共解,叫做这个方程组的解.求方程组的全部解或确定方程组无解的过程,叫做解方程组.

5. 二元、三元一次方程组及其解法

(1) 概念

含有相同的两个未知数的两个一次方程组成的方程组,叫做二元一次方程组,它的一般形式是

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$

含有相同的三个未知数的三个一次方程组成的方程组,叫做三元一次方程组,它的一般形式是

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}$$

(2) 解法

二元、三元一次方程组的基本解法是

① 代入消元法;

② 加减消元法.

通过消元将二元、三元一次方程组,转化成一元一次方程组.

6. 二元二次方程组及其解法

(1) 概念

含有两个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的方程,叫做二元二次方程.

由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的二元二次方程组的一般形式是

$$\begin{cases}ax+by+c=0 \quad (a,b\text{ 不全为零}),\\ dx^2+exy+fy^2+mx+ny+p=0 \quad (d,e,f\text{ 不全为零}).\end{cases}$$

(2) 解法

二元二次方程组的解法通常是代入消元法,由第一个方程解出 x 或解出 y 代入第二个方程,化为一个一元二次方程来解.

由两个二元二次方程组成的方程组的解法比较复杂,只要求考生掌握那些可以通过消元、降次化为一元二次或一元一次方程来求解的二元二次简单方程组.

例题精讲

例 1 选择题

(1) $|\sqrt[3]{(-3)^3}|$是 ( )

(A) 无理数 (B) 自然数 (C) 循环小数 (D) 不循环小数

(2) 当 $a\leqslant -1$ 时，$|a+1|+a$ 的值是 ( )

(A) -1 (B) 1 (C) 0 (D) 2

(3) 若 $|5x-2|+|5x+1|=3$，则 ( )

(A) $x\geqslant \frac{2}{5}$ (B) $-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant \frac{2}{5}$ (C) $x\leqslant -\frac{1}{5}$ (D) $x\leqslant -\frac{1}{5}$ 或 $x\geqslant \frac{2}{5}$

(4) 若 x,y 均为实数，$(2x-y+1)^2+\sqrt{x+3y-3}=0$，则 ( )

(A) $\begin{cases}x=0,\\y=1\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x=1,\\y=0\end{cases}$ (C) $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$

答案

题号	(1)	(2)	(3)	(4)
答案	(B)	(A)	(B)	(A)

解析

(1) 因为 $|\sqrt[3]{(-3)^3}|=|-3|=3$，所以 $|\sqrt[3]{(-3)^3}|$是自然数，故选(B)。

(2) 当 $a\leqslant -1$ 时，$a+1\leqslant 0$，所以 $|a+1|+a=-(a+1)+a=-1$，故选(A)。

(3) 因为 $|5x-2|+|5x+1|=3$，所以 $\begin{cases}5x-2\leqslant 0,\\5x+1\geqslant 0,\end{cases}$ 故 $-\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant \frac{2}{5}$，故选(B)。

(4) 因为 $(2x-y+1)^2+\sqrt{x+3y-3}=0$，则 $\begin{cases}2x-y+1=0,\\x+3y-3=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$，故选(A)。

例 2 选择题

(1) $\frac{a}{a-b}\cdot\frac{b^2}{a+b}-\frac{a^3b}{a^4-b^4}\div\frac{a}{a^2+b^2}=$ ( )

(A) $-\frac{ab}{a+b}$ (B) $\frac{ab}{a+b}$ (C) $-\frac{a+b}{ab}$ (D) $\frac{a+b}{ab}$

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{8}=$ ( )

(A) $2\sqrt[13]{2^{12}}$ (B) $2\sqrt[12]{2^{11}}$ (C) $\sqrt[12]{2^{11}}$ (D) $\sqrt[14]{2^{13}}$

(3) 已知方程 $-3x^2+bx+c=0$ 两根的和等于 m，两根的积等于 n，则 ( )

(A) $\begin{cases}b=\frac{m}{3},\\c=\frac{n}{3}.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}b=-\frac{m}{3},\\c=-\frac{n}{3}.\end{cases}$ (C) $\begin{cases}b=-3m,\\c=3n.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}b=3m,\\c=-3n.\end{cases}$

(4) 已知方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根为 x_1 和 x_2，则 $x_1^3+x_2^3=$ ( )

(A) 9 (B) -9 (C) 8 (D) -18

答案

题号	(1)	(2)	(3)	(4)
答案	(A)	(B)	(D)	(D)

解析

(1) $$\frac{a}{a-b}\cdot\frac{b^2}{a+b}-\frac{a^3b}{a^4-b^4}\div\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{ab^2}{a^2-b^2}-\frac{a^3b}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}\times\frac{a^2+b^2}{a}$$
$$=\frac{ab^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b}{a^2-b^2}=\frac{ab(b-a)}{a^2-b^2}$$
$$=-\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{ab}{a+b}.$$

故选(A).

(2) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{8}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}=2^{\frac{23}{12}}=2\sqrt[12]{2^{11}}$.

故选(B).

(3) 根据韦达定理，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$，则

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{-3}=m,\\ \dfrac{c}{-3}=n.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}b=3m,\\ c=-3n.\end{cases}$$

故选(D).

(4) 根据立方和公式 $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)$，所以

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-3x_1x_2)$$
$$=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2].$$

又根据韦达定理 $x_1+x_2=-\frac{3}{1}=-3$, $x_1x_2=\frac{1}{1}=1$,

因此 $x_1^3+x_2^3=(-3)[(-3)^2-3]=-18$.

故选(D).

例3 填空题

(1) $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=$________.

(2) $(2x^4-2x^2-5x-6)$除以$(x-3)$的商是________，余数是________.

(3) 在实数范围内分解因式：$m^3-m^2n+5n-5m=$________.

(4) 两数之和是2，两数之差的绝对值是8，则以这两个数为根的方程是________.

答案

(1) $-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$　　(2) $2x^3+6x^2+16x+43$；123

(3) $(m-n)(m+\sqrt{5})(m-\sqrt{5})$　　(4) $x^2-2x-15=0$

解析

(1)
$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$
$$=[(a+b)^2-c^2][c+(a-b)][c-(a-b)]$$
$$=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$$
$$=(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b^2+2ab)$$
$$=[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)]$$
$$=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$
$$=4a^2b^2-[(a^2+b^2)^2+c^4-2(a^2+b^2)c^2]$$
$$=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2.$$

(2) 用竖式演算如下：

$$
\begin{array}{r}
2x^3+6x^2+16x+43 \\
x-3\overline{)2x^4 \qquad -2x^2-5x-6} \\
\underline{2x^4-6x^3 \qquad\qquad\qquad} \\
6x^3-2x^2 \qquad\qquad \\
\underline{6x^3-18x^2 \qquad\qquad} \\
16x^2-5x \qquad \\
\underline{16x^2-48x \qquad} \\
43x-6 \\
\underline{43x-129} \\
123
\end{array}
$$

故$(2x^4-2x^2-5x-6)$除以$(x-3)$的商是 $2x^3+6x^2+16x+43$,余数是 123.

(3)
$$
\begin{aligned}
&m^3-m^2n+5n-5m \\
=&m^2(m-n)-5(m-n) \\
=&(m-n)(m^2-5) \\
=&(m-n)(m+\sqrt{5})(m-\sqrt{5}).
\end{aligned}
$$

(4) 设此二数为 x_1,x_2,因为

$$(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4x_1x_2,$$

所以
$$x_1x_2=\frac{(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2}{4}=\frac{2^2-8^2}{4}=-15,$$

故以此二数为根的方程是 $x^2-2x-15=0$.

例 4 若$|x+8|+\sqrt{y-1}+(z+7)^2=0$,求 x,y,z 的值.

解 由于三个非负数之和为零,则各个数必为零,即

$$\begin{cases} x+8=0, \\ y-1=0, \\ z+7=0. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x=-8, \\ y=1, \\ z=-7. \end{cases}$$

例 5 已知 $x^2+x+1=0$,求 $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$的值.

解 由 $x^2+x+1=0$,两边同乘以 $x-1$,得

$$x^3-1=0, \quad x^3=1.$$

又由已知式,两边同除以 x,得

$$x+\frac{1}{x}=-1.$$

所以
$$x^{14}+\frac{1}{x^{14}}=\frac{x^{15}}{x}+\frac{x}{x^{15}}=\frac{(x^3)^5}{x}+\frac{x}{(x^3)^5}=\frac{1}{x}+x=-1.$$

例 6 计算:$\frac{a-b}{a+b}\div\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{ab}\div\frac{a^2+b^2}{a^2b+ab^2}$.

解 原式$=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}-\frac{a+b}{ab}\cdot\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$

$$=\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}-\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{a^2-2ab+b^2-(a^2+b^2+2ab)}{a^2+b^2}$$
$$=-\frac{4ab}{a^2+b^2}.$$

例 7 计算：$\sqrt{\frac{1}{12}}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

解 原式 $=\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}+\sqrt{2^2\times 2}+\sqrt{3^2\times 2}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}+\left(2+3-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$$
$$=-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{9}{2}\sqrt{2}.$$

例 8 分解因式：$x^2-2mx-n^2+2mn$.

解 原式 $=x^2-2mx+m^2-m^2-n^2+2mn=(x-m)^2-(m-n)^2$

$$=[(x-m)+(m-n)][(x-m)-(m-n)]$$
$$=(x-n)(x-2m+n).$$

例 9 分解因式：$3a^2+3b^2-6ab+4a-4b-15$.

解 原式 $=3(a-b)^2+4(a-b)-15$

$$=[3(a-b)-5][(a-b)+3]$$
$$=(3a-3b-5)(a-b+3).$$

例 10 解方程组：$\begin{cases}4x-3y+2z=9, & ①\\ 2x+5y-3z=4, & ②\\ 5x+6y-2z=18. & ③\end{cases}$

解法一 由①+③，得 $9x+3y=27$，

即 $3x+y=9$. ④

由①×3+②×2，得 $16x+y=35$. ⑤

解由④，⑤组成的二元一次方程组，得 $\begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$

将 $x=2,y=3$ 代入①式，得 $z=5$.

故原方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\ y=3,\\ z=5.\end{cases}$

解法二 由②得 $x=\frac{4-5y+3z}{2}$， ⑥

将⑥代入①，得 $2(4-5y+3z)-3y+2z=9$，

整理得 $13y-8z=-1$. ⑦

将⑥代入③，得 $5\left(\frac{4-5y+3z}{2}\right)+6y-2z=18$，

整理得 $-13y+11z=16$. ⑧