IQ丛书

IQ推理训练

葛登能 著

IQ推理训练

葛登能 著

陕西旅游出版社

(陕)新登字 12 号
责任编辑:高　云
封面设计:康晓萍

IQ 推理训练

著　　者：葛登能
出版发行：陕西旅游出版社
邮政编码：710061
印　　刷：西安市新华印刷厂
开　　本：850×960mm　1/32
印　　张：9.75　插图：450 幅
版　　次：2000 年 8 月第 1 版
　　　　　2000 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1－5000
ISBN7－5418－1476－3/C.17
定　　价：16.80 元

1

排列组合

排列组合是研究物体如何排列的问题。简单来说就是元素如何根据一些规则和特性来分成不同的集合。

举例来说，本书第一部的第一个问题是关于不同颜色的球，如何根据某些特性聚成一组，要聪明的你找出最小的集合。第二个问题是关于球员如何分组参加淘汰赛的方式，这个问题在电脑分类资料的运用上很重要。

排列组合还可应用在找出某些物体、根据某些规则、可以组合在一起的不同方式的最大数目。这种所谓的“数的问题”(enumeration problem)，在本书中，我们以苏安能用几种方式走路上学的问题来说明(见本部“曲折的路途”)。在这个问题中，包含的元素包括路线和矩阵，因为牵涉到几何图形，我们称之为“排列组合几何”。

每个数学大树的分枝中都有其排列组合的一面，在本书各部中的问题，您都会找到排列组合的问题，有排列组合数学、排列组合拓朴学、排列组合逻辑、排列组合集合理论、甚至排列组合语言，这可在(文字)一部中看到这类的文字游戏。排列组合在机率理论中特别重要，有排列组合才能在找出机率公式前算出所有可能的组合。有本著名的书《选择和机会》(Choice and Chance)，收集所有的机率问题。书名中的“选择”一词指的就是排列组合。

本部中的第一个问题就是有关机率，要找出不同颜色球的排列。从这个简单的问题中可以衍生出无尽的机率问题，找出把物体放在一起的不同方式。而算出苏安上学有几种路线的问题，可由其中了解巴斯卡(Pascal，法国数学家)的三角形，及其在解答基本机率问题的运用。

一个排列组合问题的解答也许是 0、1、一个有限数或是个无限数。把两个奇数加起来是奇数的方式是 0 种；只有一种方式可以让两个质数(Prime Numbers)加起来是 21(19＋2＝21)；有

三种方式让两个正整数加起来是 7(正是掷骰子时正反面的数目)；而让两个偶数加起来是偶数的方式则有无限种。

在排列组合理论中，很难找出“不可能的证明”(impossibility proof)，即证明所希望出现的组合方式是不可能的。举例来说，直到最近才找到证明，证明真的不可能在一张地图上把平面区域组合在一起，好让该地图需要五个颜色来着色。长久以来，这个问题在排列组合拓扑学上是个著名的无解问题。要证明其无解，需要一个很复杂的电脑程式。

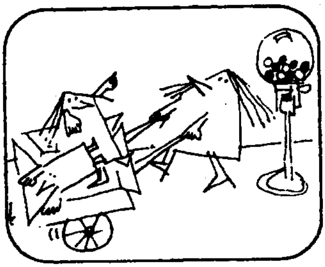
但由另一方面来说，许多看似困难的排列组合问题，只要能找到窍门，解起来就很容易。在本部“麻烦的砖块”问题中，我们可以看到以简单的“奇偶核对”(parity check)，可以很快地证明出该题的排列组合无解。但若改用其他方式来证明就很困难。

至于在“装错药瓶”的第二个问题中，说明了排列组合的思考和各个算术基础间的关系。我们可以看出数字及其所在位置，全视排列组合的规则而定。所有的归纳推理，不论是在数学或纯逻辑上，都在处理一“串”符号的排列组合。这就是为什么 17 世纪的排列组合之父——莱布尼兹(Gottfried Leibniz)称推理的艺术为“排列组合的艺术”(art combinatoria)。

你有兴趣吗?迷人的 IQ 推理正等着你来破解呢!好，现在让我们一起开始吧。

请注意：啊哈就是有趣的 IQ 推理。

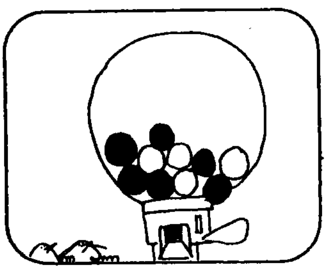
1. 头痛的泡泡糖问题



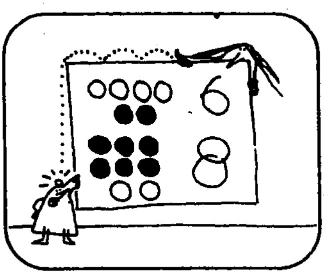
1. 可怜的张太太想在双胞胎儿到卖泡泡糖机器之前，赶快走过。但是，来不及了。

老大:妈妈,我要买口香糖。

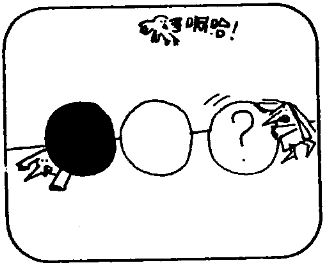
老二:我也要,妈妈,而且我要和哥哥一样的颜色。



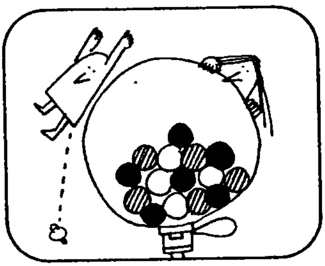
2. 泡泡糖机器快卖光了，没有办法知道下一个掉出来的糖是什么颜色。如果张太太要两个颜色一样的泡泡糖,她最多要准备几块钱?(机器里有 6 颗红色的,4 颗白色的糖。)



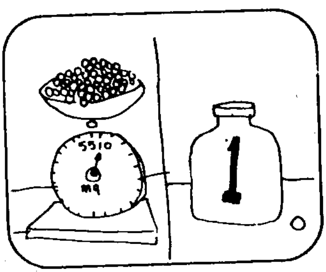
3. 张太太可以花 6 块钱拿到两个红泡泡糖;花 4 块钱拿到所有的白泡泡糖，再花 2 块钱拿到 2 颗红色的糖;或是她可以花 8 块钱拿到 2 个白色的糖。所以她最多要准备 8 块钱,对吗?



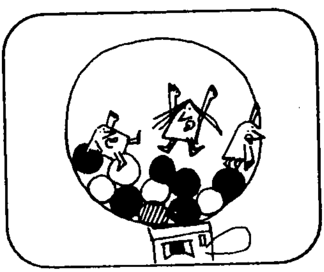
4. 不对，如果前2颗糖的颜色不同，第三颗糖的颜色一定会和前两者之一相同，所以她最多只要准备3块钱。



5. 现在假设机器内有6颗红糖、4颗白糖和5颗蓝糖，那么想想看张太太要花几块钱才能买到两颗颜色一样的糖?



6. 你说4块钱吗?答对了。现在你可以帮史太太伤脑筋了，她正带着三胞胎经过同一部泡泡糖机。



7. 这次机器内有6颗红的，4颗白的，只有一颗蓝的，史太太最多要花多少钱才能买到三颗颜色一样的糖?

注：

▨蓝

■红

□白

要几块钱?

其实，图中的第二个问题只是第一题略作改变，可用同样的窍门解答，前三颗糖可能颜色都不一样——红、白、蓝各一。这是最糟的情形，要经过最长的程序才会得到想要的结果。第四颗糖一定会和前三颗其中之一的颜色一样，因此张太太最多要准备4块钱。

我们把这个问题概化成有 n 个颜色不同的糖，如果有 n 色，就要准备买 n+1 个糖。

第三个问题比较难，史太太不是有双胞胎，而是有三胞胎，泡泡糖机器内有 6 颗红糖、4 颗白糖和一颗蓝糖。她最多要花几块钱才能买到颜色一样的三颗糖。

和先前一样，我们考虑最坏的情形。史太太可能买到两颗红的、两颗白的和惟一的一颗蓝糖，总共是 5 颗糖。第六颗糖一定是非红即白，就会有三颗颜色一样的糖，因此答案是 6 块钱。假如蓝色的糖不只一颗，她就需要再把同色的糖配对，这时就需要第七颗糖。

这种“啊哈!有了”(aha! insight)的能力就是在最坏的情形中，找出答案。有人也许以比较难的方式来解这个问题：把每个球从 1 到 11 编号，然后看各种可能的结果，何时可得到三颗同色糖。不过这个方法要排出 11!=39,916,800 种顺序。即使这个问题不考虑球的颜色，用同样的方法仍需排出 2,310 种排列。

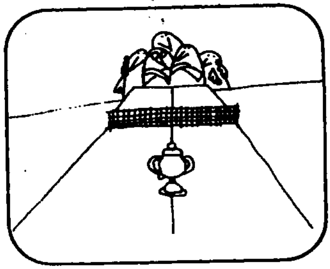
要拿到 k 个同色糖的解法如下：假设有 n 色的糖，每种颜色至少有 k 个，那么要拿到相同颜色 k 颗糖，至少需买 n(k-1)+1 颗糖。你可以想想看，如果有些颜色的糖不到 k 颗，情形又会是如何?

这类的问题可用多种方式来呈现。例如：从 52 张扑克牌中，你要拿多少张牌才可以拿到 7 张同花色的牌?这时候 $n=4$，$k=7$，依前面的公式得到的答案：$4(7-1)+1=25$。

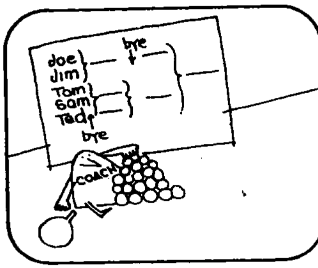
虽然这些是简单的排列组合问题，却可以衍生成有趣而复杂的机率问题。例如，从 N 张牌中(N 可从 7 到 24)，你得到 7 张同花色牌的机率是多少?牌抽出后就不能放回去(很明显的，如果 N 小于 7，机率是 0；如果 N 大于 25，机率是 1)。如果每抽出一张牌后，牌可以放回去并且重新洗牌的话，又会如何改变机率?再问一个更难的问题：在牌抽出后可以放回去的情形下，你要抽到 k 张同花色牌的平均期望值是多少?牌抽出后不能放回去的情形下，平均期望值又会是多少?

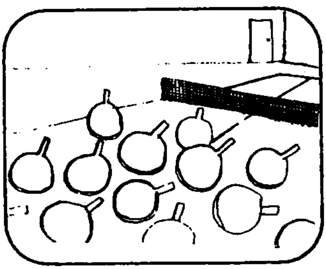
2. 乒乓球赛

1. 动脑筋高中乒乓球队的五位球员，决定举办一场淘汰赛。

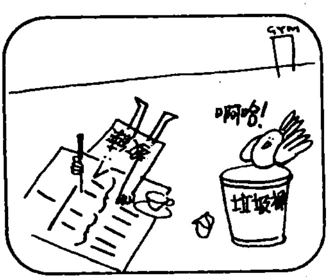


2. 教练画个图表来解释淘汰赛的方式。教练：五人是个奇数，所以有位球员在第一回合中是种子球员，不用出赛；在下一回合中会再出现一位种子球员，不用出赛，所以总共要打四场。





3. 乒乓球变得很流行，球队增加到37位球员。教练又想举办一场淘汰赛，你能算出一共要赛几场吗?



4. 还没算出来吗?还在画出比赛的赛程表?你没想到个窍门：每场球赛都刷下一个球员，一共有36位球员会被刷下来，所以一共是36场球赛，想通了没有?

多少种子球员?

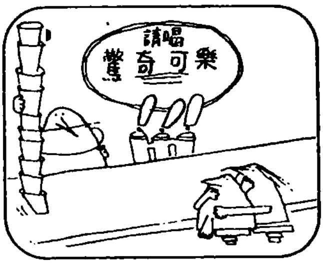
如果你把 37 位球员实际要出赛的赛程表都画出来，解这个问题就很难。你会发现不论你怎么画出赛表，都只会有四个种子球员。必要种子球员的人数是 N 的函数，N 是全部球员人数。种子球员人数怎么算出来的呢?

假设 N 是全部球员的人数，把大于或等于 N 的最少二的次方值，减去 N 后，得到的数目以二进位表示，把二进位中的 1 加起来，就是种子球员的人数。以我们的例子来说，大于或等于 37 的最少二的次方值是 $2^6=64$，$64-37=27$，以二进位表示 $27=11011$，共有 4 个 1，因此有四位种子球员。想想看，为什么这个问题是这样解的?

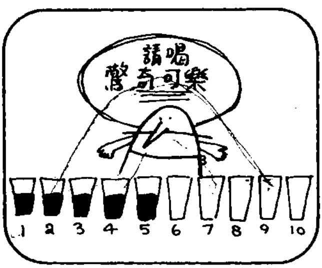
这个问题中的比赛方式，通常称为“淘汰赛”。其过程和电脑学家以一次两个数字相比，来决定 n 个元素的集合中最大元素是哪一数的运算过程一样。我们已经知道，以 $n-1$ 对的两两相比才能决定最大的数字为何。电脑运算也可以三个一群、四个、五个……一群来比较。

在电脑科学中，分类(sorting)是非常重要的一环，有些书，整本都在谈论其运用。你可以很容易地想到很多实际的问题中，分类的程序很重要。据估计，电脑在科学、商业和工业上的运用，有四分之一的运算时间是花在分类问题上。

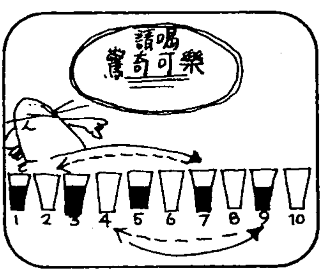
3. IQ 博士的杯子



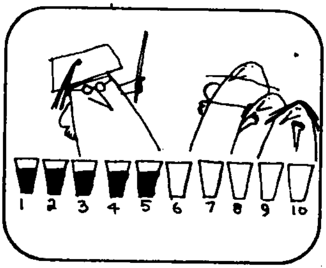
1. 小白在卖可乐，正在和他的顾客说明用十个杯子解个谜题。



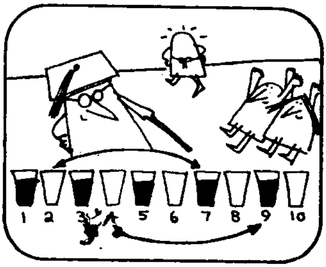
2. 小白问：把十个杯子放一排，前五杯装满了可乐，后面五杯是空的。你可不可以只移动四个杯子，就出现一杯有可乐、一杯没有的顺序？



3. 对了，只要把第二和第七杯对换，再把第四和第九杯对换。



4．最喜欢想些怪点子的 IQ 博士，正好在旁边听到。IQ 博士说：为什么要动四个杯子，我只消动两个杯子就可以办到，你能吗？



5.IQ 博士：很简单，只要把第二个杯子中的可乐倒到第七杯，再把第四杯中的可乐倒入第九杯就行了。啊哈！排行原来这么有趣又有刺激！

难题并不难

IQ 博士三两下就可以解开这个谜题，但其实原本的问题并非这么平淡无奇。举例来说，如果用相同的问题，但是有 100 个空杯子和 100 个充满可乐的杯子，要交换多少对杯子才能变成一空一满列一排？

由于真的排出 200 个杯子不太实际，所以第一步是分析杯子较少时的情形，假设 N 是空杯子(或有可乐的杯子)的数目，然后想办法找出个公式。你可以用铜板的正反面或有两个颜色的扑克牌来实际演练这个问题。如果 N＝1 时，不用动任何杯子；N＝2 时，要动一次；N＝3 时，仍只要动一次；再花点心思，你会找出个简单的公式：N 是偶数时，需要动 N/2 次；N 是奇数时，需要动(N－1)/2。因此，如果有 100 个空杯和 100 个满杯时，要动 50 回，总共要动到 100 个杯子。

用 IQ 博士的解法，则只要动到一半的杯子。

有个古典的谜题类似上面的问题，但是要难解的多。同样的，在一排中有一类的 N 个物体，接着是另一类的 N 个物体，(你可用杯子、铜板、扑克牌等等)。你要把这一排物体变成一正一反轮流排列，但是现在我们把“动”的定义做不同的解释，现在你一定要把任何相连的一对，移动到空着的位置，移动的那一对顺序不能动。

例如在 N＝3 时，是这样动的：

××××○○○

　　×○○○××

　　×○○　　×○×

　　　○×○×○×

解这个问题的公式是什么?在 N＝1 时很简单；在 N＝2 时，无解；在 N 大于 2 时，则答案是至少要动 N 次。

在 N＝4 时，要找到正确的移动程序不太容易，请动动脑筋，也许你可以找到一个通解，决定 N 等于或大于 3 时，该怎么动。

同样的问题稍作变化后，就更具挑战性，例如：

一、规则都一样，只是在你移动相连的一对时，如果两个颜色不同时，要对换其顺序，例如是红—黑的 1 对，动完后变成黑—红。在 N＝4 时，解答是动五次；N＝5 时，也是动五次。对这个问题，我们还找不出通解，也许你可以想出来。

二、规则和原来的问题一样，只是有 N 个同色的物体，N＋1 个另一色的物体，只有颜色不同且相连的一对可被移动。结果是不论 N 等于多少，至少要动 N 的平方。

三、用三种不同颜色的物体来排。邻近的一对可以平常的方式来移动，好让所有的颜色在一起。如果 N＝3(共有九个物体)，解法是动五次。在这个和以前的问题中，我们都假设在最后一排中，物体都连续排列，没有中断。如果物体可以不连续的排列，解法就会变成动四次。

另外有些类似的问题，稍加变化后，至今仍无解。例如，你可以一次动连续的三个或三个以上的物体，把这个规则应用到前述的问题上，看解法会变成如何?

如果第一次动一个物体，第二次动二个，第三次动三个……一直下去，又会是何情景?如果有 N 个同色物体，N 个另一色物体，还是只动 N 次就能解出来吗?