新编高等院校公共基础课规划教材

·数学

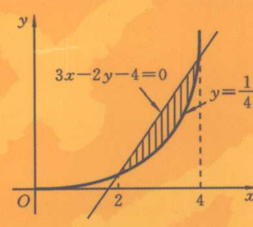
俞礼钧 王 力 主编

应用高等数学

题解与学习指导同步训练

YINGYONG GAODENG SHUXUE

TIJIE YU XUEXI ZHIDAO TONGBU XUNLIAN



華中科技大學出版社

http://www.hustp.com

新编高等院校公共基础课规划教材

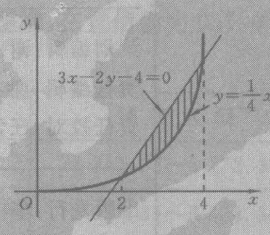
·数学

主　编　俞礼钧　王　力

副主编　赵丽君　彭祥光　王叔宝

应用高等数学

题解与学习指导同步训练



YINGYONG GAODENG SHUXUE

TIJIE YU XUEXI ZHIDAO TONGBU XUNLIAN

華中科技大學出版社

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学题解与学习指导同步训练/俞礼钧　王　力　主编.-2版.
—武汉:华中科技大学出版社,2008年8月
ISBN 978-7-5609-4566-8

Ⅰ.应…　Ⅱ.①俞…　②王…　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第074181号

应用高等数学题解与学习指导同步训练　　俞礼钧　王　力　主编

策划编辑:谢　荣
责任编辑:谢　荣　　　　封面设计:刘　卉
责任校对:汪世红　　　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:荆州市翔羚印刷有限公司

开本:787mm×960mm　1/16　　印张:19.25　　字数:382 000
版次:2008年8月第2版　　印次:2008年8月第2次印刷　　定价:32.00元
ISBN 978-7-5609-4566-8/O·444

第二版前言

《应用高等数学》上、下册及其配套书《应用高等数学题解与学习指导同步训练》自出版发行以来，为许多大专院校采用。实践证明，该套教材取材精简恰当，文字流畅易读，在当前高等数学教学改革中得到好评。尤其是习题与教学内容较为配合，难易适度，有利于帮助学习应用高等数学的学生更好地掌握教材。

在使用过程中，也发现存在若干不足之处，主要是部分章节内容，如中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学等虽然能满足基本教学要求，但在更加强化计算工具的使用、帮助学生更快地学会应用方面，还是有工作可做的。

本次改版修订我们增加了以上内容相关的应用举例。我们在增扩内容时，仍然考虑不失原教材的特点：提供丰富的素材，贯彻深入浅出的原则。做到简明扼要，避免烦琐，使学生的学习负担有所减轻。

本套书主编为俞礼钧、王力、王裕民。负责修订者为俞礼钧、赵丽君和王叔宝。全套书由俞礼钧统稿。

本套书在定稿、改版过程中得到学校领导梅世炎教授、教务负责人董荣城教授、袁产喜教授的帮助和指正，对此我们深表谢忱。

我们还要感谢使用初版的老师和读者，正是他们的支持和帮助，使修订工作有了改进方向。

编者于光谷腹地

2008 年 8 月武汉

前　言

本书是《应用高等数学》(俞礼钧主编)的配套用书,是为了培养地方区域经济高素质、能力强的应用型人才而编写的.本书旨在帮助读者学习、掌握、运用必备的基础知识,提高分析问题和解决问题的能力,加强训练,以更好地掌握教材所讲内容.

本书共分十三章,按照教材的章节顺序编写,内容编写时分为“知识要点提示”、“典型例题分析”、“同步训练”三个模块.“知识要点提示”是教材内容的概括,帮助读者梳理所学的知识,把握学习的重点;“典型例题分析”是结合教材选择一些具有典型意义的例题进行解读,帮助读者理解和巩固基本概念,提高解决问题的能力;“同步训练”分填空题、选择题、计算题等类型,并附有参考答案供读者查阅,训练题紧扣各章的重要内容和能力达标要求,以便读者自我测试学习效果,有利于复习和巩固所学知识.书的最后是“应用高等数学习题解答”部分,也与教材的章节顺序对应.该部分内容是为辅导读者掌握好教材的知识点,学会解答应用高等数学习题,使学生对解题技巧和规律有所把握.

本书由俞礼钧、王力担任主编,赵丽君、彭祥光、王叔宝担任副主编.其中第2章和第5章由俞礼钧负责编写,第1章和第9章由王力负责编写,第3章、第4章和第6章由赵丽君负责编写,第11章、第12章和第13章由彭祥光负责编写,第7章、第8章和第10章由王叔宝负责编写.全书由俞礼钧策划、统稿和定稿.

本书可作为第三类本科经济类高等数学和高职高专数学课程的学习辅导用书、专科升本科考试的复习用书,也可作为自学经济类高等数学的参考资料.

由于成书时间仓促,编者能力有限,对有些解题方法的引导有可能不是最合理的.对于书中的缺点和错误,恳请读者批评指正.

编　者

2006年6月

目　　录

第 1 章　极限与连续

知识要点提示

1. 函数

1）函数概念的五个要素

自变量 x，定义域 D_f，因变量 y，因变量 y 关于自变量 x 的依存关系 f 和值域 R_f 是函数概念的五个要素.

在这五个要素中，确定一个函数的关键要素是依存关系 f 和定义域 D_f. 如果两个函数的依存关系 f 和定义域 D_f 都相同，则称这两个函数是相同的，而自变量和因变量用什么记号来表示，则是无关紧要的.

2）函数定义域的求法

3）函数的基本特性有单调性、有界性、奇偶性、周期性

通常可以用上述特性来揭示函数的性态.

4）复合函数与反函数

(1) 两个函数的复合，实际上就是中间变量介入自变量的变化过程.

设有两个函数

$$y=f(u),u\in D_f;\quad u=\varphi(x),x\in D_\varphi.$$

若 $R_\varphi\subseteq D_f$，这样就可以得到复合函数

$$y=f[\varphi(x)],x\in D_\varphi.$$

(2) 对于函数 $y=f(x)$，其反函数是否存在，取决于其值域 R_f 中的任一值 y，都可以通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 D_f 中确定唯一的一个 x 与之对应.

5）基本初等函数

基本初等函数是指常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

6）简单的经济函数

《应用高等数学》教材[①]中只介绍了总成本函数、总收入函数、总利润函数、需

---

① 俞礼钧，王裕民主编. 应用高等数学(上、下). 武汉：华中科技大学出版社，2008.

求函数和供给函数.

2. 极限

1) 数列极限

如果数列$\{x_n\}$的项数 n 无限增大(记为 $n\to\infty$)时,通项 x_n 无限地趋近于一个确定的常数 A,那么常数 A 就称为当 $n\to\infty$时数列$\{x_n\}$的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

2) 函数的极限

如果当 $x\to x_0$(x 可以不等于 x_0)时,函数 $f(x)$无限地趋近于一个确定的常数 A,则常数 A 称为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的充要条件为 $f(x)$在点 x_0 处的左、右极限存在且相等,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

3) 无穷小与无穷大

(1) 无穷小.

若函数 $f(x)$在自变量 x 的某个变化过程中以零为极限,则称在该变化过程中 $f(x)$为无穷小量,简称无穷小.

(2) 无穷小的性质.

性质 1　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2　有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3　有界变量与无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 4　常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

(3) 无穷大.

若在自变量 x 的某个变化过程中,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,则称在自变量 x 的变化过程中,$f(x)$为无穷大量,简称无穷大,记为

$$\lim f(x)=\infty.$$

(4) 无穷小与无穷大的关系.

在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数是无穷小.恒不为零的无穷小的倒数是无穷大.

(5) 无穷小的比较.

设 α,β 是在同一变化过程中的无穷小,$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$是在这个变化过程中的极限.

① 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$.

② 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小.

③ 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c$（$c$是不等于零的常数），则称$\beta$是与$\alpha$同阶的无穷小.

④ 若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$是与$\alpha$等价的无穷小，记为$\beta\sim\alpha$.

4）极限的性质与运算法则

（1）极限的性质.

①（唯一性）　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则极限值唯一.

②（局部有界性）　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则存在点$x_0$的某一去心邻域，在该去心邻域内函数$f(x)$有界.

③（局部保号性）　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$且$A>0$（或$A<0$），则存在点$x_0$的某个去心邻域，在该去心邻域内函数$f(x)>0$（或$f(x)<0$）.

若在点x_0的某去心邻域内，$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$），且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）.

（2）极限的运算法则.

设$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$（假定x在同一变化过程中），则有下列运算法则：

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B;$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0).$$

5）极限存在的准则及两个重要极限

准则1（夹逼准则）　设函数$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$在点x_0的某个邻域内（x_0可以除外）满足条件

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且有极限$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

准则2　单调有界数列必有极限.

两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\ \left(\text{或}\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\right).$$

6）函数的连续性

（1）函数连续的概念.

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，如果当自变量的改变量无限地趋近于零时，相应函数的改变量也无限地趋近于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是连续的，或称 x_0 是 $f(x)$ 的连续点. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是连续的.

(2) 函数的间断点.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 满足下列三种情况之一：

① 在点 $x=x_0$ 没有定义；

② 虽然在点 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

③ 虽然在点 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，那么，通常称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

函数的间断点可用如下形式表示.

$$
\text{间断点}\begin{cases}
\text{第一类间断点 } x_0 \begin{cases}
\text{可去间断点}\begin{cases}
\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\text{存在，但 } f(x_0)\text{无定义} \\
\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\text{存在，} f(x_0)\text{有定义，但} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)
\end{cases} \\
\text{跳跃间断点}\quad \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\text{与} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\text{均存在，但} \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)
\end{cases} \\
\text{第二类间断点 } x_0\text{：} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\text{与} \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\text{中至少有一个不存在}
\end{cases}
$$

(3) 初等函数的连续性.

一切初等函数在它们的定义区间上都是连续的.

(4) 闭区间上连续函数的性质.

有界性定理 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

最值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上一定能取到最大值和最小值.

介值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上一定能取到最大值 M 和最小值 m 之间的任何一个中间值 C，即至少存在一点 $\xi(\xi\in[a,b])$，使 $f(\xi)=C$.

零点存在定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(\xi\in(a,b))$，使 $f(\xi)=0$.

典型例题分析

【例 1】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2)}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

【解】 (1) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geqslant 0\Rightarrow 0<x-2\leqslant 1\Rightarrow 2<x\leqslant 3$，故函数的定义域为

(2,3].

(2) 要使函数有意义，必须使 $\sin x-\cos x\neq 0$，即 $\sin x\neq\cos x$，$\tan x\neq 1$，从而

$$x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z}).$$

因此，函数的定义域为

$$\left(k\pi+\frac{\pi}{4},(k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)\ (k\in\mathbf{Z}).$$

(3) 要使函数有意义，必须使

$$\begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\ -7\leqslant 2x-1\leqslant 7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3,\\ -3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

$$\Rightarrow -3\leqslant x\leqslant -2 \text{ 或 } 3\leqslant x\leqslant 4,$$

所以函数的定义域为 $[-3,-2]\cup[3,4]$.

【例 2】 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=3^{x^2+1}$；　(2) $y=2\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

【解】 (1) 函数 $y=3^{x^2+1}$ 是由函数 $y=3^u$ 和 $u=x^2+1$ 复合而成.

(2) 函数 $y=2\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=2\arcsin u$，$u=\sqrt{v}$ 及 $v=1-x^2$ 复合而成.

【例 3】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

【注】 这里和式的项数随着 n 在变化，所以要先求和，然后求极限.

【例 4】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

【解】 (1) x 是 $x\to 0$ 时的无穷小，$\cos\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，无穷小与有界函数的积为无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0.$$

(2) $\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小，$\arctan x$ 是有界函数，无穷小与有界函数的积为无穷小，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

【例 5】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(8x^2+1)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}$.

【解】 当 $x\to\infty$时，对于两个多项式相除的极限，其极限仅与分子、分母的次数最高项有关，故原式可简化为

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{(8x^2)^3\cdot(3x)^4}{(6x^2)^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{8^3\cdot x^6\cdot 3^4x^4}{6^5x^{10}}=\frac{16}{3}.$$

【注】 当 $n\to\infty$时，对两个多项式相除的极限，一般地有($a_0\neq0$，$b_0\neq0$)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n.\end{cases}$$

【例 6】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$；　(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

【解】 (1) $原式=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{3-1}{3-2}=2.$

(2) $原式=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x.$

【注】 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，当 $A=0$，$B=0$ 时，求$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，即可考虑$f(x)$与 $g(x)$有无公因式 $x-x_0$，因 $x\to x_0$，$x\neq x_0$，同时约去公因式$(x-x_0)$即可求解.

【例 7】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

【解】 (1) $原式=\lim\limits_{x\to16}\dfrac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt[4]{x}+2)}{\sqrt{x}-4}=\lim\limits_{x\to16}(\sqrt[4]{x}+2)=4.$

(2) $原式=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

【注】 以上各题是利用有理化因式进行变形，化简后求解.

【例 8】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$.

【解】 (1) $原式=4\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{4x}=4\times1=4.$

(2) $原式=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=2.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}=x.$

【注】 以上各题是利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求解的.

【例 9】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)]^{-\frac{1}{x}\cdot(-2)}=\{\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)]^{-\frac{1}{x}}\}^{-2}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot2}=[\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2.$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{x+\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=e\cdot1=e.$$

【注】 以上是利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\left(\text{或}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e\right)$ 来求解的.

【例 10】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+1}{(x-3)^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3x+1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2+x-3)$.

【解】 (1) 因 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)^2}{x^2+1}=0$，则 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+1}{(x-3)^2}=\infty.$

(2) 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3x+1}=\infty.$

(3) 因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x^2+x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2+x-3)=\infty.$

【注】 以上是利用无穷小与无穷大的关系求解的.

【例 11】 若 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2-x-3}{x+1}=b$，求 a,b.

【解】 因 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$，而 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2-x-3}{x+1}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to-1}(ax^2-x-3)=0$，即

$$a+1-3=0,\quad a=2,$$

所以 $$b=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-3)=-5.$$

【例 12】 当 $x\to 0$ 时，x^2-3x 与 x^3-x^2 相比，哪一个是高阶无穷小？

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x-3}=0.$

则当 $x\to 0$ 时，x^3-x^2 是比 x^2-3x 高阶的无穷小，即

$$x^3-x^2=0(x^2-3x).$$

【例 13】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2-x & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的连续性.

【解】 显然，$f(x)$ 在 $[0,1)$ 和 $(1,2]$ 内连续，在 $x=1$ 处 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1$，$f(1)=1$. 则有 $f(1-0)=f(1+0)=f(1)$，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续.

【例 14】 证明三次代数方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

【证】 函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$. 根据零点定理，在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=0,$$

即 $$\xi^3-4\xi^2+1=0\ (0<\xi<1).$$

上式说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根 ξ.

同步训练题

1. 填空题.

(1) 函数 $y=\sqrt{\ln(\ln x)}$ 的定义域是______.

(2) 函数 $y=\dfrac{1}{\lg|x-3|}+\arcsin\dfrac{2x+1}{11}$ 的定义域是______.

(3) 函数 $y=\sqrt[3]{\sin x^2}$ 的复合过程是______.

(4) 函数 $y=\arctan(x^2-1)$ 的复合过程是______.

(5) 当数列的项数无限增加时，$1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{4}},\cdots$ 趋向于______.

(6) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，当 $x\to$______时，$f(x)$ 是无穷小量；当 $x\to$______时，$f(x)$ 是无穷大量.

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$______.

(8) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续区间为______.

(9) 若 $f(x)=\begin{cases}3e^x, & x<0,\\ 5x+a, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

2. 判断题.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.　　(　　)

(2) 若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.　　(　　)

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=0$.　　(　　)

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=+\infty$.　　(　　)

(5) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=-1$.　　(　　)

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.　　(　　)

3. 选择题.

(1) 当 $x\to 0$ 时，与无穷小量 $x\sin 6x$ 同阶的无穷小量是(　　).

(a) x　　(b) $3x^2$　　(c) x^3　　(d) x^4

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^n=$(　　).

(a) 1　　(b) e　　(c) $e^{-\frac{1}{2}}$　　(d) e^{-2}

(3) 函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 的连续区间为(　　).

(a) $[1,2)\cup(2,+\infty)$　　(b) $(1,2)\cup(2,+\infty)$

(c) $(1,+\infty)$　　(d) $[1,+\infty)$

(4) 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则必有(　　).

(a) $a=2,b=8$　　(b) $a=2,b=5$

(c) $a=0,b=-8$　　(d) $a=2,b=-8$

4. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2+x+6}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3-x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x-1}{3x^2+1}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x+1}{x^2+1}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$;　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2}{x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$.