金太阳系列丛书

丛书主编 陈东旭

学习的艺术

——同步辅导用书(B版)

数学 高二 下册

江西金太阳教育研究所 编

江西高校出版社

金太阳系列丛书

丛书主编 陈东旭

学习的艺术

——同步辅导用书(B版)

数学 高二下册

江西金太阳教育研究所 编

主　编:贺清和

副主编:李生茂

编　委:(按姓氏笔画排列)

王化义　王远强　孙连从　许廷超

张　宏　李生茂　李亚军　杨卫勇

范玉明　范海梅　金存会　姚大后

贺清和　游松林

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

学习的艺术.同步辅导用书.B版.高二数学.下册/江西金太阳教育研究所编.—南昌:江西高校出版社,2007.11

(金太阳系列丛书/陈东旭主编)

ISBN 978—7—81132—094—7

Ⅰ.学… Ⅱ.江… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第165534号

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道96号
邮政编码	330046
电　　话	(0791)8504319,8521923
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	南昌市李巷印刷厂
照　　排	江西金太阳教育研究有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	50.25
字　　数	1598千字
版　　次	2007年11月第1版第1次印刷
印　　数	1～60000
书　　号	ISBN 978—7—81132—094—7
定　　价	100.00元(全套共6册)

前言

数学是颇令人头疼的一门学科，许多学生为之投入了太多的时间，成绩却不佳，颇有“事倍而功半”的味道.于是乎，一片“数学难，难于上青天”的怨言.从根本上讲，这种现象是同学们没有掌握正确的学习方法造成的.我们说，学习是科学，但它更是一门艺术！如果真正掌握了学习方法，跨入了学习艺术的门槛，那么，许多难题也就迎刃而解了，也就起到了“事半而功倍”的效果，这正是我们所追求的.

本书强调的宗旨是什么？总体说来，主要是三个方面：

其一，对概念和定义进行严密的思考.只有全面深刻地理解概念的内涵与外延，构成完整的知识网络，才能在解题过程中有据可依，而不是乱套公式与定理.

其二，对例题与结论进行认真分析.书本上的例题是非常典型的，它们对理解概念、性质等都有着很好的帮助作用.而例题的解法更是经典的，既起到示范的作用，又揭示着某种规律性的东西.因此，那种对例题轻描淡写或者囫囵吞枣地看一下的做法是极端错误的.

其三，课外练习既要有针对性也要有一定的量.搞“题海战术”，毫无目标地乱做一气是错误的，然而“光说不练”同样也是不可取的.练习要有选择，要有针对性.在做题的过程中要思考“为什么这样做”，做完后要思考“有何规律，能否变形与拓展”.只有这样，才能起到做练习的作用，同时也会有做题的乐趣.

本书秉承“授人以鱼，不如授人以渔”的教育理念，带领大家跨入了学习艺术的门槛……

【课前导航】 用趣味性、知识性、规律性的数学知识引导学习，提高学习兴趣.

【要点索引】 在透彻分析教材知识体系的基础上，把各个知识点系统化、网络化，使其易懂、易记、易用.

【范例导学】 依据知识结构，精心挑选典型例题，展示经典解法；题后变式，展现“变中学”的乐趣.

【思维进阶】 深入研究，提高层次，通过综合型例题，进一步提升解题技巧与知识综合能力，突破知识难点，跨越学习障碍.

【错解剖析】 展现普遍性错误，探究根源所在，揭示规避方法与技巧.

【课时综述】 概括重点、难点，揭示命题规律，总结方法技巧，便于寻找解题突破口与切入点.

一位名师能引领你走进科学的殿堂，一本好书能改变你一生的命运.拥有她，你会领略到学习的艺术，她会成为你的良师益友，会照亮你前进的道路.愿本书为你的学习加油！

金太阳系列丛书

以下学校参与本丛书的编写，在此鸣谢：

北京市：	北京四中	北大附中	清华大学附中	北京二中
天津市：	南开中学	耀华中学	天津实验中学	静海一中
河北省：	衡水中学	唐山一中	邯郸市一中	正定中学
内蒙古：	内蒙古师大附中	呼和浩特二中	赤峰二中	海拉尔三中
山西省：	临汾一中	平遥中学	大同市一中	太原市尖草坪区第一中学
	山西省浑源县中学			
辽宁省：	沈阳二中	东北育才中学	鞍山一中	大连八中
吉林省：	东北师大附中	省实验中学	长春实验中学	吉林市一中
黑龙江：	哈尔滨九中	齐齐哈尔一中	鸡西一中	鹤岗一中
江苏省：	南京师大附中	启东中学	盐城中学	徐州一中
浙江省：	杭州高级中学	杭州外国语学校	浙江师大附中	温州中学
山东省：	省实验中学	烟台二中	济宁实验中学	牟平一中
安徽省：	马鞍山二中	安庆一中	桐城中学	濉溪中学
福建省：	福建师大附中	福州三中	厦门一中	龙岩一中
河南省：	河南大学附中	开封市高中	潢川一中	新乡一中
湖北省：	新洲一中	宜城一中	京山一中	宜昌夷陵中学
	天门中学	松滋一中		
湖南省：	长沙长郡中学	长沙雅礼中学	衡阳市八中	桑植一中
广东省：	华南师大附中	省实验中学	汕头金山中学	惠州一中
广　西：	柳州教科所	桂林教科所	南宁二中	柳州一中
四川省：	省外国语学校	成都石室中学	成都市七中	绵阳高中
重庆市：	西南师大附中	重庆一中	重庆三中	重庆十一中
贵州省：	贵州师大附中	毕节一中	兴义一中	瓮安县中学
云南省：	昆明一中	大理一中	曲靖一中	文山州一中
西　藏：	拉萨中学			
陕西省：	陕西师大附中	渭南市瑞泉中学	榆林市第一中学	
甘肃省：	西北师大附中	兰州一中	天水一中	
宁　夏：	宁夏大学附中	银川市一中	银川市唐徕回民中学	
新　疆：	新疆实验中学	乌鲁木齐一中	新疆师大附中	库尔勒华山中学
江西省：	江西师大附中	吉安市一中	吉安白鹭洲中学	新建二中
	上高二中	南康中学	贵溪一中	修水一中
	都昌一中	瑞昌一中		

目录

第九章　直线、平面、简单几何体

§9.1　平面的基本性质(第1课时) ………… (1)
§9.1　平面的基本性质(第2课时) ………… (3)
§9.2　空间的平行直线和异面直线 ………… (5)
§9.3　直线和平面平行与平面和平面平行(第1课时) ………… (9)
§9.3　直线和平面平行与平面和平面平行(第2课时) ………… (11)
§9.4　直线和平面垂直(第1课时) ………… (13)
§9.4　直线和平面垂直(第2课时) ………… (16)
§9.5　空间向量及其运算(第1课时) ………… (18)
§9.5　空间向量及其运算(第2课时) ………… (20)
§9.5　空间向量及其运算(第3课时) ………… (23)
§9.5　空间向量及其运算(第4课时) ………… (25)
§9.6　空间向量的坐标运算(第1课时) ………… (28)
§9.6　空间向量的坐标运算(第2课时) ………… (30)
§9.7　直线和平面所成的角与二面角(第1课时) ………… (33)
§9.7　直线和平面所成的角与二面角(第2课时) ………… (36)
§9.7　直线和平面所成的角与二面角(第3课时) ………… (40)
§9.8　距离(第1课时) ………… (43)
§9.8　距离(第2课时) ………… (46)
小结与复习(§9.1~§9.8) ………… (49)
§9.9　棱柱与棱锥(第1课时) ………… (53)
§9.9　棱柱与棱锥(第2课时) ………… (56)
§9.9　棱柱与棱锥(第3课时) ………… (59)
§9.9　棱柱与棱锥(第4课时) ………… (62)
§9.10　研究性课题：多面体欧拉定理的发现 ………… (64)
§9.11　球(第1课时) ………… (67)
§9.11　球(第2课时) ………… (69)

小结与复习(§9.9~§9.11) …………………………………… (72)

第十章　排列、组合和二项式定理

§10.1　分类计数原理与分步计数原理 ………………… (77)
§10.2　排列(第1课时) ………………………………… (79)
§10.2　排列(第2课时) ………………………………… (82)
§10.2　排列(第3课时) ………………………………… (84)
§10.3　组合(第1课时) ………………………………… (86)
§10.3　组合(第2课时) ………………………………… (88)
§10.3　组合(第3课时) ………………………………… (91)
§10.4　二项式定理(第1课时) ………………………… (94)
§10.4　二项式定理(第2课时) ………………………… (96)
小结与复习(§10.1~§10.4) …………………………… (99)

第十一章　概率

§11.1　随机事件的概率(第1课时) …………………… (102)
§11.1　随机事件的概率(第2课时) …………………… (105)
§11.2　互斥事件有一个发生的概率(第1课时) ……………………………………………………… (107)
§11.2　互斥事件有一个发生的概率(第2课时) ……………………………………………………… (109)
§11.3　相互独立事件同时发生的概率(第1课时) ……………………………………………………… (112)
§11.3　相互独立事件同时发生的概率(第2课时) ……………………………………………………… (115)
§11.3　相互独立事件同时发生的概率(第3课时) ……………………………………………………… (118)
小结与复习(§11.1~§11.3) …………………………… (120)
参考答案 …………………………………………………… (124)

第九章　直线、平面、简单几何体

§9.1　平面的基本性质(第1课时)

课前导航

数学巨著《几何原本》

中学几何学大部分来自欧几里得的巨著《几何原本》,因此,搞清《几何原本》的形成、内容及作用对学习中学几何史无疑是重要的.

几何学经过漫长的萌芽时期之后,进入了独立的几何学形成时期,这一时期的代表著作就是欧几里得的《几何原本》.

《几何原本》的内容除了几何以外还有初等数论及初等代数.这部书有13卷,共计465个命题,中学几何的大部分内容来自这里.

第11、12、13卷讲的是立体几何,其中大部分是现行中学课本上的内容.例如,关于空间中的直线和平面的定义、定理,关于平行六面体的定理,关于球体的论述及球的五种内接正多面体的作图法等.

《几何原本》集前人数学研究之精华,以当时无与伦比的优点取代了以前所有的几何课本.在希腊之前的漫长年代里,人们的几何知识还处在零散的、互不联系的状态中,而欧几里得在《几何原本》中,由定义、公理和公设出发,从简到繁、有条不紊地陈述了一系列定理,对前人证明不够严密的所有定理都给出了论证,它对数学能在严密的推理中不断发展有极其深远的影响.《几何原本》的表现形式被称为公理的形式,这种形式已成为现代数学的原型,这种公理化的方法在今天已渗透于数学的各个领域.

2000多年来,《几何原本》这本世界上古老的数学巨著,在没有印刷术的古代,人们辗转传抄它作为数学教材,并把它译成多种文字,直到五十多年前,欧洲和美洲各国的学校还在用翻译的《几何原本》作为教科书.就是今天,各国中学几何课的主要内容也是来自《几何原本》.1607年我国数学家徐光启在利玛窦的协助下,将《几何原本》的前六卷译成中文,这对中国数学的发展有很大影响.

要点索引

1.平面的概念:①平面和点、线一样,是构成空间图形的基本要素之一;②平面是点的集合,平面无大小、厚薄,且具有无限延展性.

平面的画法:可用平行四边形、三角形、矩形、圆、梯形等平面图形来表示平面.

平面的表示:常用小写希腊字母 α、β、γ 等表示,如平面 α;也可用平行四边形 $ABCD$ 的相对顶点的两个大写字母来表示,如平面 AC、平面 BD;或用表示多边形顶点的字母来表示,如平面 ABC.

2.平面图形是有大小、有面积可以度量的,故平面图形与平面是两个截然不同的概念.

3.立体几何作图规则:看得见的画实线,看不见或被遮住的一般画虚线(或不画).

4.用集合语言描述点、线、面之间的关系:如果 A 在直线 l 上,记作 $A\in l$;点 A 在平面 α 上,记作 $A\in\alpha$;直线 l 在平面 α 内,记作 $l\subsetneq\alpha$ 等.

5.平面的基本性质

①公理1:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.若用符号语言表述,即:$A\in l,B\in l,A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subsetneq\alpha$.

公理1是判断直线在平面内的依据.

②公理2:如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,这些公共点的集合是一条直线.若用符号语言表述,即:$P\in\alpha,P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$ 且 $P\in l$.

公理2是判断平面相交的依据.

③公理3:经过不在同一条直线上的三点有且只有一个平面.或:不共线的三点确定一个平面.若用符号语言表述,即:A、B、C 三点不共线⇒有且只有一个平面 α,使 $A\in\alpha,B\in\alpha,C\in\alpha$.

其中"有且只有一个"的含义是:"有"说明"存在","只有一个"说明"唯一",因此公理3强调的是"存在"和"唯一"两个方面,而"确定一个平面"中的"确定"和"有

且只有"是同义词.公理3是点确定平面的依据.

公理3的推论

推论1:经过一条直线和直线外一点有且只有一个平面.

推论2:经过两条相交直线有且只有一个平面.

推论3:经过两条平行直线有且只有一个平面.

公理3及其3个推论是确定平面及判断两个平面重合的依据,是证点、线共面的依据,是作截面和辅助平面的依据.

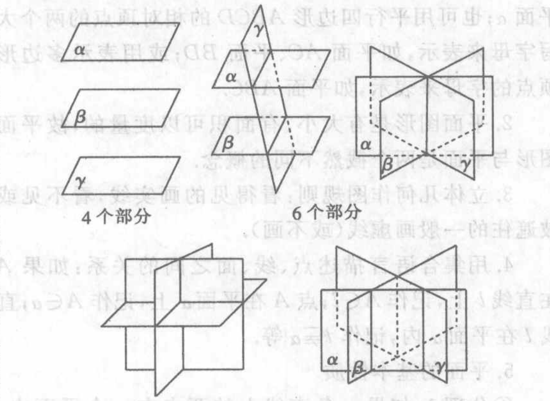
范例导学

1.平面划分空间

例1 三个平面将空间分成几部分?图示各种不同的情况.

分析:本题可用递进的方法,先考虑两个平面的情况,然后再对添加第三个平面后的各种情况加以讨论.

解析:共四种情况,各种情况的图形如下:



因此,三个平面可把空间分成4个、6个、7个或8个部分.

变式训练1

正方体各面所在的平面可将空间分成几部分?

2.平面的基本性质

例2 (1)不共面的四点可以确定几个平面?

(2)三条直线两两平行但不共面,它们可以确定几个平面?

(3)共点的三条直线可以确定几个平面?

分析:(1)可利用公理3判定.

(2)可利用公理3的推论3判定.

(3)需进行分类讨论进行判定.

解析:(1)不共面的四点可以确定四个平面.

(2)三条直线两两平行但不共面,它们可以确定3个平面.

(3)共点的三条直线可以确定1个或3个平面.

变式训练2

有下列命题:

①公理1可用集合符号叙述为:若 $A\in l$,$B\in l$,且 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,则必有 $l\in\alpha$.

②四边形的两条对角线必相交于一点.

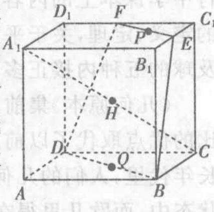
③用平行四边形表示的平面,以平行四边形的四条边作为平面边界线.

④梯形是平面图形.

其中正确的命题有________.

思维进阶

例 如右图,在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别是 B_1C_1 和 D_1C_1 的中点,P、Q 分别为 EF 和 BD 的中点,对角线 A_1C 与平面 $EFDB$ 交于 H 点,求证:P、H、Q 三点共线.



分析:要证若干点共线,只要证这些点在两个相交平面内.

解析:$EF\parallel DB$,确定平面 BF,

$$\left.\begin{array}{l}EF\subset 平面BF\\P\in EF\end{array}\right\}\Rightarrow P\in 平面BF,$$

同理,$Q\in$平面 BF,∴P、H、$Q\in$平面 BF.

$A_1C_1\parallel AC$,确定平面 A_1C,

$P\in A_1C_1$,$Q\in AC$,$H\in A_1C$,

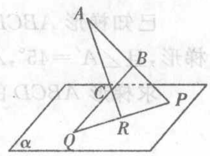
∴P、H、$Q\in$平面 A_1C.

根据公理2,P、H、Q三点一定在平面 BF 与平面 A_1C 的交线上,故 P、H、Q 三点共线.

练习

已知△ABC 在平面 α 外,$AB\cap\alpha=P$,$AC\cap\alpha=R$,$BC\cap\alpha=Q$,如图.

求证：P、Q、R 三点共线.



错解剖析

例 在$\triangle ABC$中，A、$B\in\alpha$，设O为$\triangle ABC$的外心，且$O\in\alpha$，则点C是否在平面α内？

错解：因为外心O在AB外，所以AB与点O确定一个平面，这个平面就是α，这平面也是$\triangle ABC$所在的平面，故点C在平面α内.

剖析：没有全面考虑$\triangle ABC$的外心位置，致使解题失误. 当$\triangle ABC$是直角三角形时，外心在斜边上，C点就不一定在α内了.

正解：点C不一定在α内. 当三角形的外心O不在AB边上时，这时O点一定是直线AB外一点，O与AB确定一个平面，这个平面就是α，也是$\triangle ABC$所在的平面，此时$C\in\alpha$；若O点在AB上，则AB为斜边，$\angle C$为直角，O必为AB中点. 这时过A、O、B有无穷多个平面，C点可以在这无穷多个平面中的任一平面内，所以C不一定在α内.

课时综述

1. 平面分空间问题可采用先退后进的辩证思维策略：由平面分空间退到直线分平面，同时要正确应用分类讨论思想. 而对于点、线确定平面个数的问题，常常是应用平面的基本性质及分类讨论思想.

2. 注意对平面基本性质的应用：公理1既可判断线在面内、点在面内，又可用直线检验平面；公理2既是判断两平面相交的依据，又可判断点共线和线共点；公理3既可确定平面，又可证明点、线共面问题. 在运用平面的基本性质时，应充分注意其成立的前提条件.

3. 要充分理解并学会运用集合的符号语言表示点、线、面的关系.

§9.1 平面的基本性质(第2课时)

课前导航

生活中的“平面”问题

我们知道，自行车用一只撑脚就能停放平稳；一扇门用两个合页和一把锁就可固定在墙面上；而用两根拉紧的细绳就能检验桌子的四条腿的底端是否齐平.

我们还知道，照相机支架、水准仪的腿只用三条而不用四条，课桌、凳子的腿却用四条而不用三条. 这些事实的存在，肯定是有道理的.

同学们能从数学的角度来阐述这些道理吗？

要点索引

1. 平面图形：如构成图形的所有点都在同一平面内，则这个图形称为平面图形.

直观图：把空间图形在平面内画得既富有立体感，又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的图形，就是直观图.

2. 空间图形直观图的斜二测画法：

①在已知图形中取水平平面，取两两互相垂直的Ox、Oy、Oz轴；

②画直观图时，把它们画成对应的轴$O'x'$、$O'y'$、$O'z'$，使$\angle x'O'y'=45^\circ$(或135°)，$\angle x'O'z'=90^\circ$，$x'O'y'$确定的平面是水平平面；

③已知图形中平行于x、y、z轴的线段，分别画成平行于x'、y'、z'轴的线段；

④平行于x、z轴的线段，在直观图中保持长度不变，平行于y轴的线段，长度为原来的一半.

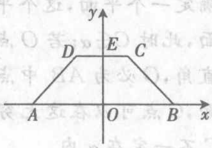
水平放置的平面图形的直观图斜二测画法与前者基本类似，只是少画一条与x、y轴都垂直的z轴.

范例导学

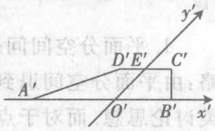
1. 空间图形的平面直观图 ★

例1 画等腰梯形$ABCD$的直观图.

分析:画水平放置的平面图形的直观图关键是确定多边形的顶点位置,借助于平面直角坐标系即可.一般说来,直线的平行性、点的共线性、线的共点性不变,但角的大小、线段的度量、形状等都发生变化,这种变化增强了图形的立体感.



画法:①以 AB 为 x 轴,AB 的中点 O 为坐标原点建立直角坐标系 xOy,并画出相应的坐标系 $x'O'y'$,使 $\angle x'O'y'=45°$.



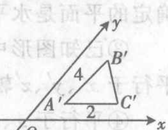
②以 O' 为中点,在 $O'x'$ 轴上取 $A'B'=AB$,在 $O'y'$ 轴上取 $O'E'=\frac{1}{2}OE$,以 E' 为中点,过 E' 作 $D'C'$ 平行于 x' 轴,并使 $D'C'=DC$,连结 $A'D'$、$B'C'$,则梯形 $A'B'C'D'$ 即为 $ABCD$ 水平放置的直观图.

变式训练 1

画正三角形的直观图.

2. 水平放置几何图形的面积

例 2　已知$\triangle ABC$ 的水平放置图形如图所示,根据图中所给条件,求$\triangle ABC$ 的面积并由此猜想原三角形与水平放置三角形面积的关系(不用证明).



分析:图中 $A'C'\parallel x$ 轴,$A'B'\parallel y$ 轴.

于是可知$\triangle ABC$ 为$\angle A$ 是直角的三角形,

又 $A'B'=4$,$A'C'=2$,得 $AB=8$,$AC=2$.

解析:由已知可得 $AB\perp AC$,且 $AB=8$,$AC=2$.

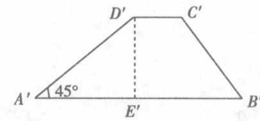
$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 8\times 2=8$.

猜想 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}S_{\triangle A'B'C'}$.

变式训练 2

已知梯形 $ABCD$ 的平面直观图为如图所示的等腰梯形,且$\angle A'=45°$,$A'B'=10$,$D'C'=2$.

求梯形 $ABCD$ 的面积.



思维进阶

例　一条直线和这条直线外不在同一直线上的三点,可以确定几个平面?

分析:分三种情况讨论:①三点中任何两点与直线都不共面;②三点中有两点与直线共面;③三点与直线共面,然后再利用公理 3 的推论进行求解.

解析:设直线 l,又设 l 外不共线的三点为 A、B、C.

①若 A、B、C 中任何两点与直线 l 都不共面,那么不共线的三点 A、B、C 确定一个平面,直线 l 分别与每一点可确定一个平面.因此,共有四个平面;

②若其中有两点与直线 l 共面,不妨设 A、B 两点与 l 共面,那么,A、B、C 三点确定一个平面,l 与 A、B 两点确定一个平面,l 与另一点 C 确定一个平面,共有三个平面;

③三点 A、B、C 与直线 l 同在一个平面内,则可以确定一个平面.

所以过一直线和直线外不在同一直线上的三点,可以确定四个、三个或一个平面.

练习

空间 4 个平面两两相交,以其交线条数为元素构成的集合是________.

错解剖析

例　已知 A、B、C、D、E 五点,A、B、C、D 共面,B、C、D、E 共面,则 A、B、C、D、E 五点一定共面吗?

错解:$\because$ 点 A、B、C、D 共面,

$\therefore$ 点 A 在点 B、C、D 所确定的平面内.

$\because$ 点 B、C、D、E 四点共面,

$\therefore$ 点 E 也在 B、C、D 所确定的平面内.

∴点 A、E 都在 B、C、D 所确定的平面内，即点 A、B、C、D、E 一定共面.

剖析：共面问题的证明，常分两步：(1)确定平面；(2)证明元素在确定的平面内.必须注意到平面是确定的.

上述错解中，由于没有注意到 B、C、D 三点不一定确定平面，即默认了 B、C、D 三点一定不共线，因而出错.也即题设条件中 B、C、D 三点不一定确定平面，因此就使得五点的共面失去了基础.

正解：A、B、C、D、E 五点不一定共面.

①当 B、C、D 三点不共线时，由公理 3 知 B、C、D 三点确定一个平面 α，由题设知：$A\in\alpha$，$E\in\alpha$，故 A、B、C、D、E 五点共面于 α.

②当 B、C、D 三点共线时，设共线于 l，若 $A\in l$，$E\in l$，则 A、B、C、D、E 五点共面；若 A、E 有且只有一点在 l 上，则 A、B、C、D、E 五点共面；若 A、E 都不在 l 上，则 A、B、C、D、E 五点可能不共面.因此，在题设条件下，A、B、C、D、E 五点不一定共面.

课时综述

1.证明“共面问题”有两种方法：先用部分元素（点、线）确定一个平面，再证明其他元素也在这个平面内；或者分别用给定的部分元素确定几个平面，然后证明这几个平面重合.

2.解决点、线确定平面的个数问题，常常使用确定平面的条件即公理 3 及其 3 个推论进行分类讨论.分类时要做到“不重不漏”.

3.画水平放置的多边形的直观图时，要根据给定图形，合理选取 x 轴和 y 轴.

§9.2　空间的平行直线和异面直线

课前导航

立交桥上的争论

小王、小李是两位爱动脑筋的初中生.一天，他们来到某城市的立交桥上，看到畅通无阻的滚滚车流，突然想到这样一个问题：把这两条公路抽象成直线，那么这两条直线是平行的，还是相交的？

小王说：应该是相交的.因为两条公路的走向不一样，一条是东西方向，而另一条是南北方向的.

小李说：应该是平行的.如果相交，那么应该有唯一交点，现在交点在哪里？如有交点，车流是无法畅通的.

小王说：肯定相交，可以用反证法证明：假设不相交，那么就平行，所以两条公路的走向一致.这显然是不对的，因此是相交的.

两人一直争论不清，谁也说服不了谁，都无法解释清楚.

你帮助一下如何？

要点索引

1.平行公理（公理 4）：平行于同一直线的两条直线平行.

它反映了平行的传递性，由此，可以把平行性质传递有限次.如：

$a_1\parallel a_2, a_2\parallel a_3, \cdots, a_{n-1}\parallel a_n \Rightarrow a_1\parallel a_2\parallel\cdots\parallel a_n$.

2.等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同，那么这两个角相等.

若将其中的“方向相同”改成“方向相反”，则这两个角也相等；若将“方向相同”改成“一边方向相同，另一边方向相反”，则这两个角互补.等角定理说明了在平移的变换下，角的大小不变，它是定义异面直线所成角的依据，但须注意角的边的方向.

3.平移：如果空间图形 F 的所有点都沿同一方向移动相同的距离到 F' 位置，则说图形 F 在空间作了一次平移.图形平移后与原图形全等.

4.异面直线：不同在任何一个平面内的两条直线叫异面直线.

“不同在任何一个平面”应该理解为“不可能找到一

个平面同时包含这两条直线”，也可理解为“这两条直线不能确定一个平面”，但不可误解为“分别在两个平面内的两条直线”.

异面直线的判定定理：连结平面内一点与平面外一点的直线和这个平面内不经过此点的直线是异面直线.

5. 异面直线所成的角：过空间任意一点作这两条异面直线的平行线，这两条平行线所成的锐角(或直角)称为这两条异面直线所成的角.

异面直线所成的角 θ 的范围：$0°<\theta\leqslant 90°$. 当 $\theta=90°$ 时，称两异直线互相垂直.

6. 空间两直线的位置关系：①平行；②相交；③异面.

范例导学

1. 空间的平行直线

例1 已知 E、E_1 是正方体 AC_1 的棱 AD 和 A_1D_1 的中点.

求证：$\angle C_1E_1B_1=\angle CEB$.

分析：本题是一道利用等角定理证明两个角相等的问题，寻找或创造符合定理的条件是关键.

解析：连结 EE_1.

$\because E_1$、E 分别是正方体 AC_1 的棱 AD 和 A_1D_1 的中点，$\therefore A_1E_1 \underline{\parallel} AE$.

$\therefore A_1E_1EA$ 是平行四边形，

$\therefore A_1A \underline{\parallel} EE_1$.

又 $\because A_1A \underline{\parallel} B_1B$，

$\therefore EE_1 \underline{\parallel} B_1B$.

$\therefore$ 四边形 EE_1B_1B 是一个平行四边形，

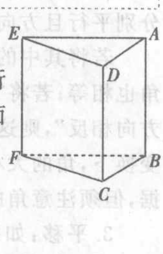
$\therefore B_1E_1 \underline{\parallel} BE$，

同理，$E_1C_1 \underline{\parallel} EC$，

而且由图形可知 $\angle C_1E_1B_1$ 和 $\angle CEB$ 方向相同，由等角定理可得 $\angle C_1E_1B_1=\angle CEB$.

变式训练1

将一张长方形的纸片 $ABCD$ 对折一次，EF 为折痕，再打开竖直放在桌面上，如图所示，连结 AD、BC.



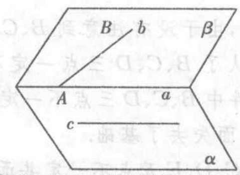
求证：$\angle ADE=\angle BCF$.

2. 异面直线的判定与证明

例2 如图，

已知：$\alpha\cap\beta=a$，$b\subsetneqq\beta$，$a\cap b=A$，且 $c\subsetneqq\alpha$，$c\parallel a$.

求证：b、c 为异面直线.



证明：(法一)(定理法)

$\because c\subsetneqq\alpha$，$a\cap b=A$，$a\cap\beta=a$，$\therefore A\in a\subsetneqq\alpha$.

而 $a\parallel c$，于是 $A\notin c$，在直线 b 上任取一点 B(不同于 A).

$\because b\subsetneqq\beta$，$B\notin\alpha$，$\therefore AB$ 与 c 为异面直线.

即 b、c 为异面直线.

(法二)(反证法)

假设 b、c 不是异面直线，即 b、c 为共面直线，则 b、c 为相交直线或平行直线.

(1) 若 $b\cap c=P$，已知 $b\subsetneqq\beta$，$c\subsetneqq\alpha$，又 $\alpha\cap\beta=a$，则 $P\in b\subsetneqq\beta$，且 $P\in c\subsetneqq\alpha$，从而，交点 P 一定在平面 α、β 的交线上(公理二).

即 $P\in a$，于是 $a\cap c=P$，这与已知条件 $a\parallel c$ 矛盾.

因此 b、c 相交不能成立.

(2) 若 $b\parallel c$，已知 $a\parallel c$，则 $a\parallel b$(公理四)，这与已知条件 $a\cap b=A$ 矛盾，因此 b、c 平行也不能成立.

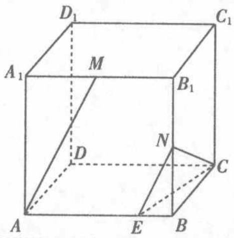
综合(1)、(2)可知 b、c 为异面直线.

变式训练2

已知空间四边形 $ABCD$，$AB\neq AC$，AE 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高，DF 是 $\triangle BCD$ 的边 BC 上的中线，求证：AE 和 DF 是异面直线.

3. 异面直线及其夹角 ★

例 3　如图所示，在正方体 AC_1 中，M、N 分别是 A_1B_1、BB_1 的中点，求异面直线 AM 和 CN 所成角的余弦值.



分析：只需过 N 作 AM 的平行线 NE，则可找到 $\angle CNE$. 连结 CE，解 $\triangle CNE$ 即可.

解析：在平面 ABB_1A_1 内作 $EN /\!/ AM$ 交 AB 于 E，则 EN 与 CN 所成的锐角(或直角)即为 AM 和 CN 所成的角.

设正方体棱长为 a.

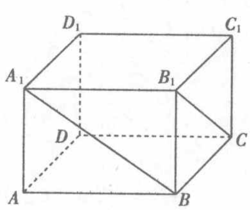
在 $\triangle CNE$ 中，可求得 $CN=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，$NE=\frac{\sqrt{5}}{4}a$，$CE=\frac{\sqrt{17}}{4}a$，由余弦定理，得

$$\cos\angle CNE=\frac{EN^2+CN^2-CE^2}{2EN\cdot CN}=\frac{2}{5}.$$

即异面直线 AM 与 CN 所成角的余弦值为 $\frac{2}{5}$.

变式训练 3

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DA=DC=4$，$DD_1=3$，求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小(结果用反三角函数值表示).



例 4　设 a、b 是一对异面直线，且 a、b 所成的角为 $30°$，P 为空间一点，则过点 P 的直线中与 a、b 所成的角均为 $60°$ 的直线有________条.

分析：过 P 分别作 $a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$，则过 P 的直线与 a'、b' 所成的角相等，那么与 a、b 所成的角也相等.

解析：过点 P 作 $a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$，则 a' 与 b' 确定一个平面 α，在平面 α 内过点 P 与 a'、b' 所成的角相等的直线有两条，分别是 a' 与 b' 交角的两条角平分线，且所成的角分别是 $15°$ 和 $75°$，但在平面 α 外且过点 P 的直线与 a'、b' 所成的角均为 $60°$ 的有 2 条，即把锐角平分线绕点 P 旋转过程中有 2 种情况.

答案：2

变式训练 4

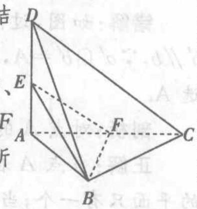
设 a、b 是一对异面直线，且 a 与 b 所成的角为 $70°$，过空间一点 P 的直线中与 a、b 所成的角均为 $60°$ 的直线有________条.

思维进阶

例　在空间四边形 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle A=90°$，$BC=\sqrt{2}$，$DA\perp AC$，$DA\perp AB$，若 $AD=1$ 且 E 是 AD 的中点，求异面直线 EB 和 DC 所成的角.

分析：求异面直线所成的角时，非常关键的一点是选择好平移的位置，也就是要寻找合适的点作 EB 或 DC 的平行线. 设想沿 DA 的方向平移 DC，使 D 移向 E，那么 C 将移向 AC 的中点 F，这样 EB 与 DC 所成的角就是 $\angle BEF$，解 $\triangle BEF$ 即可.

解析：取 AC 的中点 F，连结 EF、FB.



在 $\triangle ADC$ 中，E、F 分别是 AD、AC 的中点，那么 $EF /\!/ DC$，$\angle BEF$ 即为所求的异面直线 EB 和 DC 所成的角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EAB$ 中，$AB=AC=1$，$EA=\frac{1}{2}$，

$\therefore EB=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$AF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$，$\therefore EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中，$AB=1$，$AF=\frac{1}{2}$，$\therefore FB=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

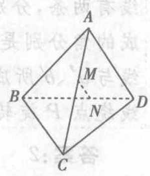
因此，在等腰三角形 BEF 中，

$$\cos\angle BEF=\frac{\frac{1}{2}EF}{BE}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

因此异面直线 EB 和 DC 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

练习

如图,已知在空间四边形 $ABCD$ 中,$AB\perp CD$,$AB=4$,$CD=4\sqrt{3}$,M、N 分别为对角线 AC、BD 的中点,求 MN 与 AB、CD 所成的角.



错解剖析

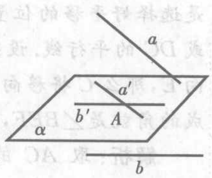
例 A 为两异面直线 a、b 外一点,过 A 与 a、b 都平行的平面 ( )

(A)有且只有一个.

(B)恰有两个.

(C)或者没有或者只有一个.

(D)有无数个.



错解:如图,过点 A 作 $a'\parallel a$,$b'\parallel b$,$\because a'\cap b'=A$,所以过 a'、b' 有且只有一个平面,故选 A.

剖析:对点 A 的位置没有作全面分析.

正解:当点 A 在上图位置时,由上面解法知,这样的平面只有一个;当过点 A 作 $a'\parallel a$ 且 a' 与 b 相交时,这样的平面不存在,故应选 C.

答案:C

课时综述

1. 证明角相等的问题,等角定理是较常用的方法,特别是在确定异面直线所成角时,经常利用平行线"寻找",一般过其中一条线段的端点作另一条线的平行线.(有时过中点)

2. 求异面直线所成的角,是高考的重点内容之一,通过平行线转化为相交直线所成的角.

异面直线所成的角的范围是 $(0,\frac{\pi}{2}]$,若在解这类问题中求出的角是钝角,应取它的补角为异面直线所成的角.

3. 证明异面直线的方法:①判断定理;②反证法.

§9.3 直线和平面平行与平面和平面平行(第1课时)

课前导航

门的启示

每个人每天都要开好几次门，同样也要关好几次门. 在这“开门”与“关门”的过程中，每次都在提醒我们应注意立体几何中一个定理的易漏条件. 你知道是什么吗？

我们把墙面当作一个平面，记为 α，固定在墙上的一边当作一条直线，记为 b，转动的一边记为直线 a，由于 a 始终与 b 平行，所以，开门时这条边始终与墙面平行. 即 $\left.\begin{matrix}a\parallel b\\ b\subsetneqq\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\parallel\alpha$. 可是当门关上时，$a\parallel b$ 与 $b\subsetneqq\alpha$ 同样存在，这时 $a\nparallel\alpha$，而是 $a\subsetneqq\alpha$ 了. 现在你知道这扇门在向我们启示着什么了吗？还不懂？往下看吧！

要点索引

1. 直线和平面平行：一条直线和一个平面无公共点，则称这条直线和这个平面平行.

2. 直线与平面的位置关系：

①直线 a 在平面 α 内，$a\subsetneqq\alpha$——有无数个公共点；

②直线 a 不在平面 α 内 $\begin{cases}\text{相交，}a\cap\alpha\text{——只有一个公共点，}\\ \text{平行，}a\parallel\alpha\text{——没有公共点.}\end{cases}$

直线 a 不在平面 α 内，即直线 a 在平面 α 外，记作 $a\not\subset\alpha$，$a\not\subset\alpha$ 包含 $a\parallel\alpha$，$a\cap\alpha=A$ 这两种情形.

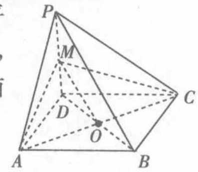
3. 直线与平面平行的判定定理：如果不在平面内的一条直线和平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行. 即 $a\not\subset\alpha$，$b\subsetneqq\alpha$，$a\parallel b\Rightarrow a\parallel\alpha$. 可简述为“线线平行，则线面平行”. 注意，上面所述的三个条件缺一不可.

4. 直线与平面平行的性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行. 即 $a\parallel\alpha$，$a\subsetneqq\beta$，$\alpha\cap\beta=b\Rightarrow a\parallel b$. 可简述为“线面平行，则线线平行”. 线面平行的性质定理也要满足三个条件.

范例导学

1. 直线和平面平行的判定

例 1 如图所示，已知 P 是平行四边形 $ABCD$ 所在平面外一点，M 为 PD 的中点，求证：$PB\parallel$ 平面 MAC.



分析：根据线面平行的判定定理，要使线面平行，只须证明线线平行，即在平面 MAC 内找一条直线平行于 PB.

证明：连结 AC、BD 相交于 O，连结 MO.

$\because O$ 是 BD 的中点，又 M 是 PD 的中点，

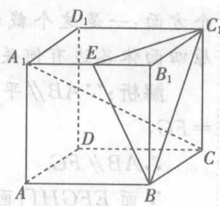
$\therefore MO\parallel PB$.

又 $\because MO\subsetneqq$ 平面 MAC，$PB\not\subset$ 平面 MAC，

$\therefore PB\parallel$ 平面 MAC.

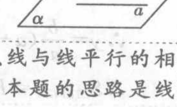
变式训练 1

如图，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 A_1B_1 的中点. 求证：$A_1C\parallel$ 平面 EBC_1.



2. 直线和平面平行的性质

例 2 平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，$a\subsetneqq\alpha$，$b\subsetneqq\beta$ 且 $a\parallel b$. 求证：$a\parallel l$，$b\parallel l$.



分析：根据面面平行、线面平行、线与线平行的相互转化规律来分析证题的思路可知，本题的思路是线线平行⇒线面平行⇒线线平行.

证明：
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a\parallel b\\ b\subsetneq\beta\\ a\not\subset\beta\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel\beta\\ a\subsetneq\alpha\\ \alpha\cap\beta=l\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel l.$$

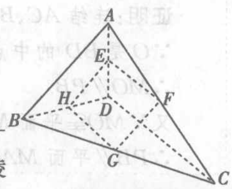
同理可证 $b\parallel l$.

变式训练 2

求证：如果一条直线和两个相交的平面都平行，那么这条直线和它们的交线平行.

思维进阶

例 如图，在四面体 AB-CD 中，截面 $EFGH$ 平行于对棱 AB 和 CD. 试问：截面在什么位置时，其截面的面积最大？



分析：要求截面在什么位置面积最大，须考虑两个方面：一是这个截面是什么图形；二是截面边长与原四面体各边有何关系.

解析：$\because AB\parallel$ 平面 $EFGH$，又面 $EFGH\cap$ 面 $ABC=FG$，

$\therefore AB\parallel FG$.

$\because$ 面 $EFGH\cap$ 面 $ABD=EH$，

$\therefore AB\parallel EH$，$\therefore EH\parallel FG$.

同理可证：$EF\parallel GH$.

$\therefore$ 截面 $EFGH$ 是平行四边形.

设 $AB=a$，$CD=b$，$\angle FGH=\alpha$，

令 $FG=x$，$GH=y$，

则有 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{CG}{CB}$，$\dfrac{y}{b}=\dfrac{BG}{BC}$，

两式相加得 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，

$\therefore y=\dfrac{b}{a}(a-x)$，

$\therefore S_{\square EFGH}=FG\cdot GH\cdot\sin\alpha$

$=x\cdot\dfrac{b}{a}(a-x)\sin\alpha$

$=\dfrac{b\sin\alpha}{a}x(a-x)$.

$\because x>0$，$a-x>0$，

$\therefore$ 当且仅当 $x=a-x$，

即 $x=\dfrac{a}{2}$ 时，$S_{\square EFGH}$ 最大，

最大面积为 $\dfrac{ab}{4}\sin\alpha$.

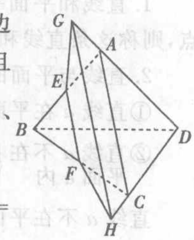
$\therefore$ 当截面 $EFGH$ 的顶点在各边中点时，截面面积最大.

练习

$ABCD$ 是平行四边形，点 P 是平面 $ABCD$ 外一点，M 是 PC 的中点，在 DM 上取一点 G，过 G 和 AP 作平面交平面 BDM 于 GH，求证：$AP\parallel GH$.

错解剖析

例 已知 E、F 是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC 上的点，且 $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{CF}{FB}$，设过 EF 的平面交 AD、CD 于 G、H，求证：$GH\parallel AC$.



错解：$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{CF}{FB}$，

$\therefore AC\parallel EF$.

又 $AC\not\subset$ 平面 $EFGH$，$EF\subsetneq$ 平面 $EFGH$，

$\therefore AC\parallel$ 平面 $EFGH$.

$\because GH\subsetneq$ 平面 $EFGH$，

$\therefore AC\parallel GH$.

剖析：在上面的证明中，由 $AC\parallel$ 面 $EFGH$ 推证 $AC\parallel GH$ 时，没有严格按照直线和平面平行的性质定理所具备的条件进行，犯了"一条直线平行于一个平面，就平行于这个平面内的一切直线"的错误.

正解：$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{CF}{FB}$，$\therefore AC\parallel EF$.

又 $AC\not\subset$ 平面 $EFGH$，$EF\subsetneq$ 平面 $EFGH$，

$\therefore AC\parallel$ 平面 $EFGH$.