# 运筹学概论

小林竜一 著
何文杰 译

河北省科学院应用数学研究所
1980.4

# 譯　　序

因为运筹学的书籍国内目前尚少，尤其是[illegible]合，泛而又偏重于应用的书就更少了。正因为如此，我们想譯出此书或许能起个抛砖引玉的作用，相信今后类似这样的书籍是会逐渐多起来的，因为它比只讨論深奥的理论而使实际工作者摸不着边际的专著更容易受到广泛的欢迎。同时，我们还相信本书所介绍的一些方法，如果应用于生产实践，将会直接获得一些经济效果的。因而，它对企业管理的科学化和現代化是不无裨益的。

本书译出原是供本室同志参考之用，在较短的时间仓促译出，原不想付印，后来由于各方面的迫切要求，以及同志们的热情鼓励只好付印了，錯误之处肯定很多，希望读者给以批评指正。

众所周知，运筹学的名词极不统一，我们也未来得及找专家给以校正，尽管我们从忠实原文出发，力求使用一些较通用的名词，但可能有很多还是不妥的。这也希望大家諒解。

最后，在此感谢我室的有关同志，特别是张景增、蒋桂华、路東森同志为本书的译稿提出了一些意見，並帮助校对。

译者

1980．3

# 序 言

要説什么叫运筹(OR—— Operations Research)呢?用一句通俗的话说就是开动脑筋。制定某计划去实行时,如果这个计划已经是为许多人实践过了的事情,并且留下了许多实践的记录数据。这样的事情是可以根据统计学的手法去分析从找出更好的方向或者逐步改进其方法。可是在刚开始接触一种完全新的事情或者还没有多少人作过的新事情时,过去的旧数据是完全没有的,这时就只有依赖于自己的头脑(智慧)。这就是所谓运筹(如果直译应为作战研究)的学问。

因此,在运筹学(以后简称OR)的分支中对应于各种各样的目的,有变化着的各种各样的手法。然而,因为我们不知道将来会出现什么样的目的和计划,对应于这些目的和计划用什么样的手法去研究。所以,现在还无法断定已有的手法就是OR的基本的理论。如果要勉强的说,这就是:

i)线性规划、非线性规划;

ii)统计方法或概率,

iii)决定理論、对策论,

iv)PERT·CPM

V)模拟(依赖于电子计算机的试验)

Vi)信息論

Vii）动态规划（简称DP）

Viii）排隊論

等等都是OR的重要手法（分支）。

在本书中作者仅想把初学者作为对象，把内容局限于一方面介绍现在已经被广泛实践而且效果明显的手法，譬如线性规划，排隊论、PERT・CPM等等。另一方面介绍虽然还没有进入实用阶段，然而如进一步研究，将来可能得到广泛应用的手法，譬如整数线性规划之类。

所以，书名就叫OR概论，但是事先声明这並不指OR的全部分支的概论，如果那样理解的话是非常离题的。

作者向看过本书原稿並且提出了许多宝贵意見的古屋茂教授，一松信教授，赤摄教授以及早稻田大学讲师佐膝總夫先生表示深切的谢意。並志谢共立出版社的饭野一寿先生，他对本书的校对作出了很大的努力。

1970 年春

作者

# 目 录

# 第一章、建立数学模型

如果说到运筹学（OR）也可说是指"建立数学模型，然后解之，最后联系实际将这个解给予解释。"这就是运筹学的三个阶段——建立数学模型。寻找数学的解法；作出解的解释。这三阶段都是不容易的事情，尤其第一阶段"建立数学模型"开始的时候特别难学会。因此，本章原则上打标详细地介绍一下涉及到广泛（包括社会科学和自然科学）领域的建立数学模型的方法，还要介绍一下作为第一阶段的结果所得到的微分方程或积分方程（根据情况也可能是差分方程或建立方程）的解法，最后作为结论对这个解予以明确的解释。

当然，上述运筹学的各个阶段之间不会是相互独立的。虽然说"建立数学模型"是其中最重要的，但是因为必须研究什么样的方程好解，什么样的方程不好解，这显然需要有较高的数学水平。另外就是在作"解的解释"时往往也必须研究"建立数学模型"是在什么样的过程中进行的，同时还要推称出解的数值。这是因为我们在建立数学模型时要想把自然现象的本质一点不漏地都建立成数学模型或者说是不可能的，或者说即使能建成这样的数学模型也一定是繁杂到不可能解的。归根到底，我们只能注意到现在本质中的特别重要的两、三个性质。"建立数学模型"无所谓方法步骤，只有多次反复地练习才行。假如勉强地说方法步骤

的话，那就是先取出现象的本质中认为是最重要的两、三个性质建立数学模型，刚开始时最好是不要搞得太细，这样做出的方程较容易解，然后根据这个大致的解和结论，再一次把问题从头修正，使之更加精确。由于考虑到事物的性质很多，所以最好是一步步来，打个比方说吧！"建立数学模型"必须具有"画家的眼睛，能够洞察大自然的美，并且把它在画布上描绘下来。"

按照数学的观点，有的人可能会说社会的结构复杂，建不起数学模型，说这种话的人往往是没有抓住隐藏在多数现象内部的共同的本质的东西，而只是根据几个特例提出反对的意见。的确，对于社会科学，譬如像语言学的文法就不可能有一个法则没有例外的情况，如果强调了这样的特例就没有办法寻出一般的法则或公式来了，我们认为应该先不管这些例外，建立起一般法则后再考虑怎样解释这些例外不是也可以吗？

有了数学模型就要转向研究"数学的解法"，这时，当然最好是广泛地学过数学的各个分支。在这一阶段，要努力地弄清定理的具体意思及其证明的本质所在，但是，数学书中往往为了理论的完美使用了一些极其费解的论理进行证明，这作为搞数学是必要的，但是对于非数学工作者的人来说就不太适宜。总之，因为有些定理的严格证明只有掌握了那些各种各样有高超技巧手法的数学家才能理解，这如果也要求所有其它的学科的科学家和工程师也完全懂得是没有道理的。

但是，为了能很好地理解定理所叙述的事情中在哪些地方有些什么本质的重要性质，有必要理解定理的证明要点，如果不熟悉这个也是不能灵活应用的。要理解定理或公式最好读一下它们的证明，而数学书中的证明又繁杂难懂，初学者最好先找个实际数值例子验算一下看看或先用图解画一下看看心中就清楚了。

至于"解的解释"关键在于研究在建立数学模型时忽略的条件再返回来，会有什么效果，这当然是非常重要的事情，也就是所谓"常识"。譬如在工程问题中，计算桥墩的粗细的时候，假如把小数点搞错了一位，造成的桥墩就要粗10倍或细10倍，这时能马上感到奇怪，而引起对数学模型、或解法的修正这就是"常识"。

总之，所谓常识就是凭过去的经验无意识中就能发现问题。因此，要有常识也就只有反复多次地练习，其它的捷径是没有的。

## 1.1 电锅的销售问题

众所周知，电锅已成为战后日本家庭电气制品中很受欢迎的东西之一了。因此，我们打算在这里提出一个所有电锅厂商的计划室里搞需要预测的人都很关心的问题——电锅的销售问题。

首先定义以下的符号

$t$：时刻

$x(t)$：开始销售以来售出电锅的总台数，它是时间$t$的函数。

$x_\infty$：日本全国需要买电锅的人数（大致上假设每户一台，

也就可以看作是全国的户数）。

k：比例常数（后面有说明）。

研究方法如下．

1°电锅是家庭主妇买的用具，即使没有作电视广播广告，其实物的广告力也很强。这就是说用开始售出10台电锅的时间和后来售出100台电锅的时间比较的话，后者並不是前者的10倍，换句话说，电锅的销售速度$\frac{dx}{dt}$是和$x(t)$成比例的，即

$$\frac{dx}{dt} \propto x \qquad (x = x(t))$$

这里，取k为比例常数的话，可以导出

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0 \qquad (1\cdot1)$$

此式是一个微分方程式，按下述．很容易解出，

$$\frac{dx}{dt} = kx \Longrightarrow \frac{dx}{x} = k\,dt \Longrightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \int k\,dt + c \quad (c\text{：积分常数})$$

$$\Longrightarrow \lg x = kt + c \Longrightarrow x = e^{kt+c} \Longrightarrow x = c'e^{kt} \quad (c' = e^{c})$$

因为这个解的曲线如图1·1，所以电锅的销售额往往是爆炸（几何级数）式地增长

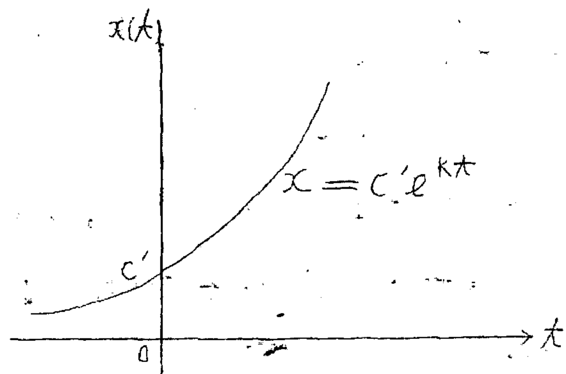


图1·1

$x(t) = c'e^{kt}$

下面，我们再研究一下$c'$和$k$在实际上取什么数值。

把$t=0$作为开始销售的时刻，这时$x(t)$也是0，把这些代入

$$x=c'e^{kt} \qquad (1\cdot2)$$

因为有

$$0=c'e^{0}=c'$$

所以得到$c'=0$，把这个值再代入（1·2）式，就得到$x=0$，推出了一个电锅也没有销售出去的结论，这显然是一个矛盾。这个矛盾是因为开始时是假定一台也没有卖出，那么就推出到最后也还是一台也没有卖出，这一个问题在将来进一步分析中就需要改进数学模型，譬如说是把利用报纸、电视等的广告方面考虑进去使方程更精确些。

然而，在这里我们为了避免这个矛盾就认为开始$t=0$时就销售了$a$台（不管是怎样销售的）。即当$t=0$时$x=a$（$a$也可以是小数）。把这些代入（1·2）式，得到

$$c'=a$$

于是，（1·2）式变成了

$$x=ae^{kt} \qquad (1\cdot2')$$

现在问题是怎样定$k$值了。这可以从开始销售以来的几个月内的销售记录求出$\frac{dx}{dt}$对于各个$t$的值，求出$\left(\frac{dx}{dt}\right)/x$然后平均一下就可以了。

## 1.2 电唱销售问题的精确化

上节研究的电唱销售问题的分析，对于刚开始销售的初期可以认为是适合的，但是这个产品相当普及，到了全国大部份的户都已经买上了的时候，上面1°中分析的事情就不成立了。为此，我们把$x_\infty$作为全部需要量，采用下面的研究。

2° 电唱产品相当普及时，它的销售速度$\frac{dx}{dt}$是和潜在的需要量（$x_\infty - x$）成比例的。把这个性质和1°的性质合起来，按此产品销售的全过程来考虑，我们认为采用电唱的销售速度$\frac{dx}{dt}$和$x$（$x_\infty - x$）成比例是比较好的。这是因为在$x$较小时$x$（$x_\infty - x$）是跟$x$成比例的，在$x$趋近于$x_\infty$（当然$x < x_\infty$）时，$x$（$x_\infty - x$）是跟（$x_\infty - x$）成比例的函数。根据这种设想，得到微分方程。

$$\frac{dx}{dt} = kx(x_\infty - x) \qquad (1\cdot3)$$

可以用以下的计算法来解（1·3）式。

$$\frac{dx}{dt} = kx(x_\infty - x) \Longrightarrow \frac{dx}{x(x_\infty - x)} = k\,dt \Longrightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x(x_\infty - x)} = \int k\,dt + c \Longrightarrow \int\frac{1}{x_\infty}\left(\frac{1}{x_\infty - x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int k\,dt + c$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x_\infty}\left(-\log(x_\infty - x) + \log x\right) = kt + c$$

$$\Longrightarrow \log\frac{x_\infty - x}{x} = -x_\infty kt - x_\infty c \Longrightarrow \frac{x_\infty - x}{x} = e^{-x_\infty kt - x_\infty c}$$

$$\Longrightarrow x_\infty - x = x e^{-x_\infty k t - x_\infty C} \Longrightarrow x_\infty = (1+e^{-x_\infty k t - x_\infty C})x$$

$$\Longrightarrow x = \frac{x_\infty}{1+e^{-x_\infty k t - x_\infty C}} \Longrightarrow x = \frac{x_\infty}{1+C'e^{-x_\infty k t}} \quad (C' = e^{-x_\infty C})$$

于是，得到

$$\frac{x(t)}{x_\infty} = \frac{1}{1+C'e^{-x_\infty k t}} \quad (C'\text{:积分常数}) \quad (1\cdot 4)$$

如果我们再详细复核上述的计算时，发现进行等式变形时曾把等式两边都同用 $x(x_\infty - x)$ 除过。当时我们是默认了 $x(x_\infty - x) \neq 0$，这样做是欠考虑的，因为当 $x=0$ 或 $x_\infty - x = 0$ 的时候都满足原来的（1.3）式，这些可以理解为是原方程的 奇异解。（singular.solution）（奇异解和特解不同，特解是含在通解中将某一定值代入待定常数得到的，而奇异解不含在通解中，但它满足原方程）

（1·4）式也叫做 增长曲线（logistic curve）. $C'=1$ 时对应于 $x_\infty k = 2, 1, \frac{1}{2}$ 的增长曲线用图1.2表示如下。

这时，把（1·4）式得到的解用于实际作需要预测时，还必须决定式中的待定常数 $C'$，$k$。（这里我们先认为 $x_\infty$ 的值是可以用某种方法或直观地推定的）。这就需要根据过去的数据来决定，在推导（1.4）式的过程中，

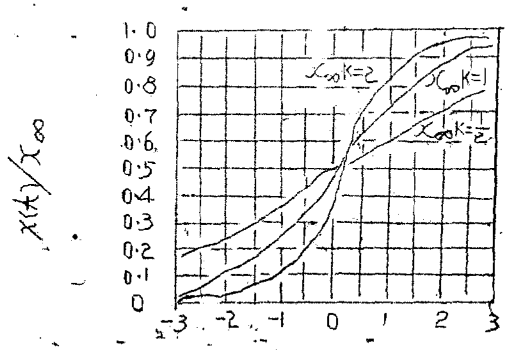


图 1.2

我们曾得到

$$\log \frac{x_\infty - x}{x} = -x_\infty kt - x_\infty C$$

在上式中取

$$y=\log\frac{x_\infty-x}{x},\quad X=-x_\infty t,\quad b=-x_\infty C$$

这样，就把问题变成了：根据过去的数据（$y_i$，$X_i$），按最小二乘法来求

$$y = kX + b$$

的回归直线的问题。另外，直到现在我们一直是把$x_\infty$认为是已知的。就是对于$x_\infty$是未知的情况，现在也有方法能够推定$x_\infty$，k，C。（請参阅：森田優三著“統計概论”（新版），日本评論社，1964。）

## 1.3 Lanchester 的2次法则

白军 m 人和红军 n 人进行战斗（如图1.3），在相互战斗的过程中，我们想通过牺牲人数的計算，計算出最后是哪一方失败。作如下的討论：

1° 用t表示时刻，认为战斗是连续的并且是同样的进行。实际战斗当然是时而激烈时而休止，我们却假定战斗休止时间就暂行，战斗激烈时钟

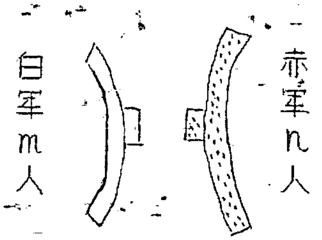


图 1.3

就跑得快些。这样假定从后就符合我们刚才的认为战斗是连续且同样的进行了。

$2^{\circ}$ 现在如果考虑白军，因为当红军是100人和1000人的时候，其射出的子弹数是100：1000也就是跳跃10倍，所以白军在这两种情况下的牺牲速度也可以是认为相差10倍。换句话说，白军的牺牲速度跟红军的兵力是成正比的：

$$\frac{dm}{dt} \propto n$$

同样，红军的牺牲速度也和白军的兵力成比例

$$\frac{dn}{dt} \propto m$$

比例常数如果分别取 $K_1$，$K_2$ 表示之，就有

$$\left.\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -K_1 n \qquad (K_1 > 0) \\ \frac{dn}{dt} &= -K_2 m \qquad (K_2 > 0) \end{aligned}\right\} \quad (1\cdot5)$$

其中，$K_1$，$K_2$ 前面的负号的含意表示兵力减少，并且 $K_1$，$K_2$ 是按两军的装备的好坏而定的。K值大表示拥有的武器优越，一般用E表示 $\frac{K_1}{K_2}$，称之为 交换比。即

$$E = \frac{K_1}{K_2} \qquad (1\cdot6)$$

要解上面导出的微分方程组，先把（1·5）式的第1式除以第2式，得到