

S
Gaozhi Jiaoyu
全国高职、高专教育高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

高等数学

(下册)

主 编 刘书田
副主编 胡显佑 高旅端
编著者 刘书田 侯明华

北京大学出版社

第 1711 号

全国高职、高专教育高等数学系列教材

高等数学

(下 册)

主 编 刘书田

副主编 胡显佑 高旅端

编著者 刘书田 侯明华

北京大学出版社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/刘书田,侯明华编著. —北京:北京大学出版社,2002.1

全国高职高专教育高等数学系列教材

ISBN 7-301-05329-0

I. 高… II. ①刘… ②侯… III. 高等数学-高等学校:技术学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 082711 号

书 名: 高等数学(下册)

著作责任者: 刘书田 侯明华 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-05329-0/O · 0518

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 理科编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印刷者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850×1168 32 开本 8.5 印张 200 千字

2002 年 1 月第 1 版 2002 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 0001—8000 册

定 价: 12.00 元

前言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展,满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要,我们依照教育部颁布的高等职业教育“高等数学”教学大纲,为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材.本套书分为教材三个分册:《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率统计》;配套辅导教材三个分册:《高等数学学习辅导》(上、下册)、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》,总共6分册.需要向任课老师和读者说明的是,《高等数学》(上、下册)是供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用,上册约讲授64~68学时,下册约讲授32~36学时.书中加“*”号的内容,对非工科类学生可不讲授,仅对工科类学生讲授,这些内容任课教师也可酌情选用.《线性代数》讲授30~32学时,《概率统计》讲授36~40学时.以上建议仅供授课老师参考.

编写本套系列教材的宗旨是:以提高高等职业教育教学质量为指导思想,以培养高素质应用型人才为总目标,力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”.因此,我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求,在三个分册的主教材中分别系统介绍了“微积分”、“线性代数”、“概率统计”的基本理论、基本方法及其应用.本套系列教材具有以下特点:

1. 教材的编写紧扣教学大纲,慎重选择教材内容.既考虑到高等数学本学科的科学性,又能针对高职班学生的接受能力和理解程度,适当选取教材内容的深度和广度;既注重从实际问题引入基本概念,揭示概念的实质,又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义,以使教学内容形象、直观,便于学生理解和掌握,并

达到“学以致用”的目的。

2. 为使学生更好地掌握教材的内容,我们编写了配套的辅导教材,教材与辅导教材的章节内容同步,但侧重点不同。辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写。教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点;内容提要要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提示,解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明,指出初学者易犯的错误,教会学生数学思维的方法,总结出解题规律;自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题,目的是检测学生在理解本章内容提要与解题指导的基础上,独立解题的能力。教材与辅导教材相辅相成,同步使用,以达到培养学生的思维、逻辑推理能力,运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力。

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性,便于自学;注意用语确切,行文严谨,教材每节后配有适量习题,书后附有习题答案和解法提示。辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答,便于教师和学生使用。

本套系列教材的编写和出版,得到了北京大学出版社的大力支持和帮助,同行专家和教授提出了许多宝贵的建议,在此一并致谢!

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正。

编 者

2001年5月于北京

目 录

第六章 微分方程	(1)
§ 6.1 微分方程的基本概念	(1)
习题 6.1	(6)
§ 6.2 一阶微分方程	(7)
一、可分离变量的微分方程	(8)
二、齐次微分方程	(10)
三、一阶线性微分方程	(13)
习题 6.2	(17)
§ 6.3 可降阶的二阶微分方程	(19)
一、 $y''=f(x)$ 型微分方程	(19)
二、 $y''=f(x, y')$ 型微分方程	(20)
习题 6.3	(21)
§ 6.4 二阶常系数线性微分方程	(22)
一、二阶常系数线性齐次微分方程的解法	(22)
二、二阶常系数线性非齐次微分方程的解法	(26)
习题 6.4	(35)
§ 6.5 微分方程应用举例	(37)
一、几何应用问题	(37)
二、物理应用问题	(41)
三、经济应用问题	(46)
习题 6.5	(50)
第七章 向量代数与空间解析几何	(52)
§ 7.1 空间直角坐标系	(52)
一、空间直角坐标系	(52)
二、两点间的距离	(54)
习题 7.1	(55)

*§ 7.2	向量代数	(55)
	一、向量及其表示	(55)
	二、向量的加、减法	(56)
(1)	三、数与向量的乘积	(58)
(1)	四、向量的坐标表示法	(59)
(a)	五、向量的模与方向余弦的坐标表示式	(62)
(v)	六、两向量的数量积	(64)
(8)	七、两向量的向量积	(68)
(01)	习题 7.2	(72)
§ 7.3	空间曲面与曲线	(74)
(v1)	一、曲面与方程	(74)
(01)	二、柱面方程	(76)
(01)	三、旋转曲面	(78)
(05)	四、空间曲线	(79)
(12)	五、几个常见的二次曲面	(81)
(23)	六、曲线在坐标面上的投影	(84)
(22)	习题 7.3	(85)
*§ 7.4	平面及其方程	(86)
(22)	一、平面的点法式方程	(86)
(72)	二、平面的一般式方程	(88)
(72)	三、平面外一点到平面的距离	(91)
(11)	四、两平面间的夹角	(92)
(01)	习题 7.4	(93)
*§ 7.5	空间直线的方程	(95)
(22)	一、直线的一般式方程	(95)
(22)	二、直线的点向式方程	(95)
(22)	三、直线的参数方程	(97)
(12)	四、两直线的夹角	(98)
(22)	五、直线与平面的夹角	(99)

习题 7.5	(101)
第八章 多元函数微积分	(103)
§ 8.1 多元函数的基本概念	(103)
一、平面区域	(103)
二、多元函数概念	(105)
三、二元函数的极限与连续性	(108)
习题 8.1	(110)
§ 8.2 偏导数与全微分	(111)
一、偏导数	(112)
二、高阶偏导数	(117)
三、全微分	(119)
习题 8.2	(122)
§ 8.3 复合函数与隐函数的微分法	(123)
一、复合函数的微分法	(124)
二、隐函数的微分法	(130)
习题 8.3	(132)
§ 8.4 多元函数的极值	(134)
一、多元函数的极值	(134)
二、条件极值	(140)
习题 8.4	(143)
§ 8.5 多元函数微分法在几何上的应用	(145)
一、空间曲线的切线与法平面	(145)
二、曲面的切平面与法线	(148)
习题 8.5	(150)
§ 8.6 二重积分概念及其性质	(151)
一、两个实例	(152)
二、二重积分概念	(155)
三、二重积分的性质	(156)
习题 8.6	(157)

§ 8.7	二重积分的计算与应用	(158)
一、	在直角坐标系下计算二重积分	(158)
二、	在极坐标系下计算二重积分	(167)
三、	二重积分应用举例	(172)
习题 8.7		(181)
第九章	无穷级数	(185)
§ 9.1	无穷级数概念及其性质	(185)
一、	无穷级数概念	(185)
二、	无穷级数的基本性质	(190)
习题 9.1		(192)
§ 9.2	正项级数	(194)
一、	收敛的基本定理	(195)
二、	正项级数的收敛判别法	(196)
习题 9.2		(200)
§ 9.3	任意项级数	(201)
一、	交错级数	(201)
二、	绝对收敛与条件收敛	(203)
习题 9.3		(205)
§ 9.4	幂级数	(205)
一、	函数项级数概念	(205)
二、	幂级数	(207)
习题 9.4		(213)
§ 9.5	函数的幂级数展开	(214)
一、	泰勒级数	(214)
二、	泰勒公式	(217)
三、	函数的幂级数展开式	(218)
习题 9.5		(223)
§ 9.6	傅里叶级数	(224)
一、	三角函数系的正交性	(224)

二、以 2π 为周期的函数的傅里叶级数	(225)
三、奇函数与偶函数的傅里叶级数	(229)
四、以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数	(233)
习题 9.6	(235)
习题参考答案与提示	(237)

第六章 微分方程

为了深入研究几何、物理、经济等许多实际问题,常常需要寻求问题中有关变量之间的函数关系.而这种函数关系往往不能直接得到,却只能根据这些学科中的某些基本原理,得到所求函数及其变化率之间的关系式,然后,再从这种关系式中解出所求函数.这种关系式就是微分方程.微分方程在自然科学、工程技术和经济学等领域中有着广泛的应用.

本章介绍微分方程的一些基本概念;讲述下列微分方程的解法:一阶微分方程中的常见类型、可降阶的二阶微分方程和二阶常系数线性微分方程.最后讲述微分方程应用例题.

§ 6.1 微分方程的基本概念

我们通过例题来说明微分方程的一些基本概念.

例 1 一条曲线通过点 $(1, 2)$, 且在该曲线上任意一点 $P(x, y)$ 处的切线斜率都为 $3x^2$, 求这条曲线的方程.

依题意,根据导数的几何意义,该问题是要求一个函数 $y = f(x)$, 即曲线方程,使它满足关系式

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad (6.1)$$

和已知条件:当 $x=1$ 时, $y=2$.

本例中,需要寻求的曲线方程,即函数 $y=f(x)$ 是未知的,称为**未知函数**.关系式(6.1)是一个含有未知函数导数的方程,称为**微分方程**.未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**.我们只讨论常微分方程,以下简称为**微分方程**,也简称为**方程**.由于微

分方程(6.1)式中只含有未知函数的一阶导数,所以称为一阶微分方程.

未知函数的导数与自变量之间的关系式,即微分方程(6.1)式已列出.下面就要设法从微分方程中求出未知函数 $y=f(x)$,这就是“解微分方程”的问题.

将已得到的微分方程(6.1)式两端积分,得

$$y = x^3 + C, \quad (6.2)$$

其中 C 是任意常数.(6.2)式是一族函数.

在我们的问题中,还有一个已知条件:当 $x=1$ 时, $y=2$. 为了求得满足这个条件的函数,将 $x=1, y=2$ 代入(6.2)式中,有

$$2 = 1^3 + C, \quad \text{即} \quad C = 1.$$

由此,得到了我们要求的未知函数,即曲线方程为

$$y = x^3 + 1.$$

若将函数 $y=x^3+C$ 代入微分方程(6.1)式,即对 $y=x^3+C$ 求导数,得 $\frac{dy}{dx}=3x^2$,代入(6.1)式的左端,显然微分方程(6.1)式就成为恒等式:

$$3x^2 = 3x^2.$$

这种能使微分方程成为恒等式的函数,称为微分方程(6.1)式的解.函数 $y=x^3+C$ 中含有一个任意常数 C ,当 C 取不同的值时,将得到不同的函数,而这些函数都满足微分方程(6.1)式.

对于一阶微分方程(6.1)式,若其解中含有一个任意常数,则这个解称为微分方程的通解.函数 $y=x^3+1$ 是当 C 取 1 的解,这个解称为微分方程(6.1)式的特解,即当通解中的任意常数 C 取某一特定值时的解,称为微分方程的特解.用来确定通解中的任意常数 C 取某一定值的条件,一般称为初始条件.容易想到,初始条件不同时,所确定的特解将不同.本例中的初始条件是:当 $x=1$ 时, $y=2$,或记作 $y|_{x=1}=2$.

例 2 一质量为 m 的物体受重力作用而下落,假设初始位置

和初始速度都为 0, 试确定该物体下落的距离 S 与时间 t 的函数关系.

该物体只受重力作用而下落, 重力加速度是 $g \text{ m/s}^2$. 按二阶导数的物理意义, 若设下落距离 S 与时间 t 的函数关系为 $S = S(t)$, 则有

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = g, \quad (6.3)$$

对上式两边积分, 得

$$\frac{dS}{dt} = gt + C_1. \quad (6.4)$$

按一阶导数的物理意义: $\frac{dS}{dt} = v(t)$, 其中 $v(t) = gt + C_1$ 应是物体运动的速度, 其中 C_1 是任意常数.

对 (6.4) 式两边再积分, 得

$$S = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad (6.5)$$

其中 C_2 也是任意常数. 显然 (6.5) 式给出了下落距离 S 与所经历的时间 t 的函数关系.

依题意, 初始位置和初始速度都为 0, 即

$$v(0) = \left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (6.6)$$

$$S(0) = S|_{t=0} = 0. \quad (6.7)$$

将 (6.6) 式代入 (6.4) 式, 可得 $C_1 = 0$; 再将 (6.7) 式代入 (6.5) 式, 可得 $C_2 = 0$. 于是, 所求的 S 与 t 的函数关系, 即物体下落的运动方程为

$$S = \frac{1}{2}gt^2.$$

在本例中, 要求出的下落距离 S 与所经历的时间 t 的函数关系 $S = S(t)$ 是未知函数; (6.3) 式中含有未知函数的二阶导数, 称为二阶微分方程; 函数 (6.5) 式, 即函数

$$S = S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

满足微分方程(6.3)式,它是该微分方程的解;对于(6.3)式这样的二阶微分方程,满足它的函数(6.5)式中含有**两个任意常数**,这是**通解**;而函数 $S = \frac{1}{2}gt^2$, 是当 C_1 和 C_2 都取 0 时的解,这是**特解**;而(6.6)式和(6.7)式是确定通解(6.5)中任意常数 C_1 和 C_2 的条件,这是**初始条件**.

分析了以上两个例题,一般有如下定义.

定义 6.1 联系自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的方程,称为**微分方程**.

这里须指出,微分方程中可以不显含自变量和未知函数,但必须显含未知函数的导数或微分.正因为如此,简言之,含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**.

定义 6.2 微分方程中出现的未知函数导数的最高阶阶数,称为**微分方程的阶**.

例如

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}\cos x \text{ 是一阶微分方程;}$$

$$y'' + 8y' = 8x \text{ 是二阶微分方程;}$$

$$y''' = \frac{\ln x}{x^2} \text{ 是三阶微分方程.}$$

n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

其中 x 是自变量, y 是未知函数, 最高阶导数是 n 阶 $y^{(n)}$.

二阶和二阶以上的微分方程称为**高阶微分方程**.

定义 6.3 若将一个函数及其导数代入微分方程中,使方程成为恒等式,则此函数称为**微分方程的解**.

含有任意常数的个数等于微分方程的阶数的解,称为微分方程的**通解**;给通解中的任意常数以特定值的解,称为微分方程的

特解.

微分方程的初始条件 用以确定通解中任意常数的条件称为初始条件.

一阶微分方程的初始条件是,当自变量取某个特定值时,给出未知函数的值:

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时, } y=y_0 \text{ 或 } y|_{x=x_0}=y_0;$$

二阶微分方程的初始条件是,当自变量取某个特定值时,给出未知函数及一阶导数的值:

$$\text{当 } x=x_0 \text{ 时, } y=y_0, y'=y_1 \text{ 或 } y|_{x=x_0}=y_0, y'|_{x=x_0}=y_1.$$

例如,容易验证:

函数 $y=Ce^x, y=e^x$ 都是一阶微分方程 $y'-y=0$ 的解. 显然,前者是通解,而后者是满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

例 3 验证函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ (C_1, C_2 是任意常数)是二阶微分方程

$y''+y=\sin x$
的通解;并求满足初始条件

$$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\frac{5}{2}$$

的特解.

$$\text{解 } y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x,$$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x,$$

$$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x,$$

将 y, y'' 代入原方程,有

$$y''+y=-C_1\cos x-C_2\sin x+\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$

$$+ C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x = \sin x,$$

即函数 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$ 是微分方程 $y'' + y = \sin x$ 的解; 由于该函数中含有任意常数的个数是 2, 恰等于微分方程的阶数, 所以所给函数是通解.

按题设, 将 $x=0$ 时, $y=1, y'=\frac{5}{2}$ 的条件代入 y 和 y' 的表达式中, 得

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 - \frac{1}{2} 0 \cdot \cos 0 = 1, \\ -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 - \frac{1}{2} \cos 0 + \frac{1}{2} 0 \cdot \sin 0 = \frac{5}{2}, \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \end{cases}$$

即 $C_1=1, C_2=3$. 于是所求特解为

$$y = \cos x + 3 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

求微分方程满足某初始条件的解的问题, 称为微分方程的初值问题. 例如, 函数 $y=e^x$ 就是满足初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y, \\ y|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

的解.

习 题 6.1

1. 指出下列各微分方程的阶数:

(1) $x^3(y'')^3 - 2y' + y = 0$;

(2) $y'' - 2yy' + y = x$;

(3) $(2x-y)dx + (x+y)dy = 0$;

$$(4) \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \omega r = \sin^2 \theta \quad (\omega \text{ 为常数}).$$

2. 验证所给函数是已知微分方程的解,并说明是通解还是特解:

$$(1) x^2 + y^2 = C \quad (C > 0), \quad y' = -\frac{x}{y};$$

$$(2) y = \frac{\sin x}{x}, \quad xy' + y = \cos x;$$

$$(3) y = Ce^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}, \quad y' + 2y = e^{2x};$$

$$(4) y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}, \quad y'' - 7y' + 12y = 0.$$

3. 试验证: 函数 $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x$ 是微分方程 $y' - y = e^{x+x^2}$ 的解,并求满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

4. 试验证: 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ 是微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

的通解,并求满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

5. 验证: 函数 $y = \cos x + e^{-x}$ 是初值问题

$$\begin{cases} y' + y = \cos x - \sin x, \\ y|_{x=0} = 2 \end{cases}$$

的解.

6. 试写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程及初始条件:

(1) 曲线过点 $(0, -2)$, 且曲线上每一点 (x, y) 处切线的斜率都比这点的纵坐标大 3;

(2) 曲线过点 $(0, 2)$, 且曲线上任一点 (x, y) 处切线的斜率是这点纵坐标的 3 倍.

§ 6.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式是