全国高职、高专教育高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

高等数学

（下册）

主　编　刘书田
副主编　胡显佑　高旅端
编著者　刘书田　侯明华

北京大学出版社

全国高职、高专教育高等数学系列教材

高 等 数 学

（下 册）

主　编　刘书田
副主编　胡显佑　高旅端
编著者　刘书田　侯明华

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/刘书田,侯明华编著. —北京:北京大学出版社,2002.1

全国高职高专教育高等数学系列教材

ISBN 7-301-05329-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①刘…　②侯…　Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 082711 号

书　　名:高等数学(下册)

著作责任者:刘书田　侯明华　编著

责 任 编 辑:刘　勇

标 准 书 号:ISBN 7-301-05329-0/O·0518

出　版　者:北京大学出版社

地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn

电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

印　刷　者:北京大学印刷厂

发　行　者:北京大学出版社

经　销　者:新华书店

850×1168　32 开本　8.5 印张　200 千字

2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷

印　　　数:0001—8000 册

定　　　价:12.00 元

前　言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要，我们依照教育部颁布的高等职业教育“高等数学”教学大纲，为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材．本套书分为教材三个分册：《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率统计》；配套辅导教材三个分册：《高等数学学习辅导》(上、下册)、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》，总共6分册．需要向任课老师和读者说明的是，《高等数学》(上、下册)是供经济类、管理类和工科类一年级学生两学期使用，上册约讲授64～68学时，下册约讲授32～36学时．书中加“*”号的内容，对非工科类学生可不讲授，仅对工科类学生讲授，这些内容任课教师也可酌情选用．《线性代数》讲授30～32学时，《概率统计》讲授36～40学时．以上建议仅供授课老师参考．

编写本套系列教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”．因此，我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求，在三个分册的主教材中分别系统介绍了“微积分”、“线性代数”、“概率统计”的基本理论、基本方法及其应用．本套系列教材具有以下特点：

1．教材的编写紧扣教学大纲，慎重选择教材内容．既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职班学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并

达到“学以致用”的目的.

2. 为使学生更好地掌握教材的内容，我们编写了配套的辅导教材，教材与辅导教材的章节内容同步，但侧重点不同. 辅导教材每章按照教学要求、内容提要与解题指导、自测题与参考解答三部分内容编写. 教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点；内容提要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提示，解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明，指出初学者易犯的错误，教会学生数学思维的方法，总结出解题规律；自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题，目的是检测学生在理解本章内容提要与解题指导的基础上，独立解题的能力. 教材与辅导教材相辅相成，同步使用，以达到培养学生的思维、逻辑推理能力，运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注意用语确切，行文严谨. 教材每节后配有适量习题，书后附有习题答案和解法提示. 辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答，便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版，得到了北京大学出版社的大力支持和帮助，同行专家和教授提出了许多宝贵的建议，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编 者

2001 年 5 月于北京

目　录

第六章 微分方程

为了深入研究几何、物理、经济等许多实际问题，常常需要寻求问题中有关变量之间的函数关系. 而这种函数关系往往不能直接得到，却只能根据这些学科中的某些基本原理，得到所求函数及其变化率之间的关系式，然后，再从这种关系式中解出所求函数. 这种关系式就是微分方程. 微分方程在自然科学、工程技术和经济学等领域中有着广泛的应用.

本章介绍微分方程的一些基本概念；讲述下列微分方程的解法：一阶微分方程中的常见类型、可降阶的二阶微分方程和二阶常系数线性微分方程. 最后讲述微分方程应用例题.

§6.1 微分方程的基本概念

我们通过例题来说明微分方程的一些基本概念.

例1 一条曲线通过点(1,2)，且在该曲线上任意一点 $P(x,y)$ 处的切线斜率都为 $3x^2$，求这条曲线的方程.

依题意，根据导数的几何意义，该问题是要求一个函数 $y=f(x)$，即曲线方程，使它满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2 \tag{6.1}$$

和已知条件：当 $x=1$ 时，$y=2$.

本例中，需要寻求的曲线方程，即函数 $y=f(x)$ 是未知的，称为**未知函数**. 关系式(6.1)是一个含有未知函数导数的方程，称为**微分方程**. 未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**. 我们只讨论常微分方程，以下简称为**微分方程**，也简称为**方程**. 由于微

分方程(6.1)式中只含有未知函数的一阶导数,所以称为**一阶微分方程**.

未知函数的导数与自变量之间的关系式,即微分方程(6.1)式已列出.下面就要设法从微分方程中求出未知函数 $y=f(x)$,这就是"**解微分方程**"的问题.

将已得到的微分方程(6.1)式两端积分,得

$$y = x^3 + C, \tag{6.2}$$

其中 C 是任意常数.(6.2)式是一族函数.

在我们的问题中,还有一个已知条件:当 $x=1$ 时,$y=2$.为了求得满足这个条件的函数,将 $x=1$,$y=2$ 代入(6.2)式中,有

$$2 = 1^3 + C, \quad 即 \quad C = 1.$$

由此,得到了我们要求的未知函数,即曲线方程为

$$y = x^3 + 1.$$

若将函数 $y=x^3+C$ 代入微分方程(6.1)式,即对 $y=x^3+C$ 求导数,得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2$,代入(6.1)式的左端,显然微分方程(6.1)式就成为恒等式:

$$3x^2 = 3x^2.$$

这种能使微分方程成为恒等式的函数,称为微分方程(6.1)式的**解**.函数 $y=x^3+C$ 中含有一个任意常数 C,当 C 取不同的值时,将得到不同的函数,而这些函数都满足微分方程(6.1)式.

对于**一阶微分方程**(6.1)式,若其解中含有**一个任意常数**,则这个解称为微分方程的**通解**.函数 $y=x^3+1$ 是当 C 取 1 的解,这个解称为微分方程(6.1)式的特解,即当通解中的任意常数 C 取某一特定值时的解,称为微分方程的**特解**.用来确定通解中的任意常数 C 取某一定值的条件,一般称为**初始条件**.容易想到,初始条件不同时,所确定的特解将不同.本例中的初始条件是:当 $x=1$ 时,$y=2$,或记作 $y|_{x=1}=2$.

例 2 一质量为 m 的物体受重力作用而下落,假设初始位置

和初始速度都为 0,试确定该物体下落的距离 S 与时间 t 的函数关系.

该物体只受重力作用而下落,重力加速度是 $g\ \mathrm{m/s^2}$. 按二阶导数的物理意义,若设下落距离 S 与时间 t 的函数关系为 $S=S(t)$,则有

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=g, \tag{6.3}$$

对上式两边积分,得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=gt+C_1. \tag{6.4}$$

按一阶导数的物理意义: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=v(t)$,其中 $v(t)=gt+C_1$ 应是物体运动的速度,其中 C_1 是任意常数.

对(6.4)式两边再积分,得

$$S=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{6.5}$$

其中 C_2 也是任意常数. 显然(6.5)式给出了下落距离 S 与所经历的时间 t 的函数关系.

依题意,初始位置和初始速度都为 0,即

$$v(0)=\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0, \tag{6.6}$$

$$S(0)=S|_{t=0}=0. \tag{6.7}$$

将(6.6)式代入(6.4)式,可得 $C_1=0$;再将(6.7)式代入(6.5)式,可得 $C_2=0$. 于是,所求的 S 与 t 的函数关系,即物体下落的运动方程为

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

在本例中,需要求出的下落距离 S 与所经历的时间 t 的函数关系 $S=S(t)$ 是未知函数;(6.3)式中含有未知函数的**二阶导数**,称为**二阶微分方程**;函数(6.5)式,即函数

$$S=S(t)=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$$

满足微分方程(6.3)式,它是该微分方程的解;对于(6.3)式这样的二阶微分方程,满足它的函数(6.5)式中含有**两个任意常数**,这是**通解**;而函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$,是当 C_1 和 C_2 都取 0 时的解,这是**特解**;而(6.6)式和(6.7)式是确定通解(6.5)中任意常数 C_1 和 C_2 的条件,这是**初始条件**.

分析了以上两个例题,一般有如下定义.

定义 6.1 联系自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的方程,称为**微分方程**.

这里须指出,微分方程中可以不显含自变量和未知函数,但必须显含未知函数的导数或微分. 正因为如此,简言之,含有未知函数的导数或微分的方程称为**微分方程**.

定义 6.2 微分方程中出现的未知函数导数的最高阶阶数,称为**微分方程的阶**.

例如

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}\cos x$ 是一阶微分方程;

$y''+8y'=8x$ 是二阶微分方程;

$y'''=\frac{\ln x}{x^2}$ 是三阶微分方程.

n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0,$$

其中 x 是自变量,y 是未知函数,最高阶导数是 n 阶 $y^{(n)}$.

二阶和二阶以上的微分方程称为**高阶微分方程**.

定义 6.3 若将一个函数及其导数代入微分方程中,使方程成为恒等式,则此函数称为**微分方程的解**.

含有任意常数的个数等于微分方程的阶数的解,称为微分方程的**通解**;给通解中的任意常数以特定值的解,称为微分方程的

特解.

微分方程的初始条件 用以确定通解中任意常数的条件称为**初始条件**.

一阶微分方程的初始条件是,当自变量取某个特定值时,给出未知函数的值:

当 $x=x_0$ 时, $y=y_0$ 或

$$y|_{x=x_0}=y_0;$$

二阶微分方程的初始条件是,当自变量取某个特定值时,给出未知函数及一阶导数的值:

当 $x=x_0$ 时, $y=y_0$, $y'=y_1$ 或

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y_1.$$

例如,容易验证:

函数 $y=Ce^x$, $y=e^x$ 都是一阶微分方程 $y'-y=0$ 的解. 显然,前者是通解,而后者是满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

例 3 验证函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$($C_1$,$C_2$ 是任意常数)是二阶微分方程

$$y''+y=\sin x$$

的通解;并求满足初始条件

$$y|_{x=0}=1,\quad y'|_{x=0}=\frac{5}{2}$$

的特解.

解 $$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x,$$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x,$$

$$y''=-C_1\cos x-C_2\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x,$$

将 y,y'' 代入原方程,有

$$y''+y=-C_1\cos x-C_2\sin x+\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$$

$$+C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x=\sin x,$$

即函数 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$ 是微分方程 $y''+y=\sin x$ 的解；由于该函数中含有任意常数的个数是2，恰等于微分方程的阶数，所以所给函数是通解.

按题设，将 $x=0$ 时，$y=1$，$y'=\frac{5}{2}$ 的条件代入 y 和 y' 的表达式中，得

$$\begin{cases}C_1\cos 0+C_2\sin 0-\frac{1}{2}0\cdot\cos 0=1,\\ -C_1\sin 0+C_2\cos 0-\frac{1}{2}\cos 0+\frac{1}{2}0\cdot\sin 0=\frac{5}{2},\end{cases}$$

或
$$\begin{cases}C_1=1,\\ C_2-\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\end{cases}$$

即 $C_1=1$，$C_2=3$. 于是所求特解为

$$y=\cos x+3\sin x-\frac{1}{2}x\cos x.$$

求微分方程满足某初始条件的解的问题，称为微分方程的**初值问题**. 例如，函数 $y=e^x$ 就是满足初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=y,\\ y|_{x=0}=1\end{cases}$$

的解.

习　题　6.1

1. 指出下列各微分方程的阶数：

(1) $x^3(y'')^3-2y'+y=0$；

(2) $y''-2yy'+y=x$；

(3) $(2x-y)dx+(x+y)dy=0$；

(4) $\dfrac{d^2r}{d\theta^2}+\omega r=\sin^2\theta$ （ω 为常数）.

2. 验证所给函数是已知微分方程的解，并说明是通解还是特解：

(1) $x^2+y^2=C\ (C>0)$，$y'=-\dfrac{x}{y}$；

(2) $y=\dfrac{\sin x}{x}$，$xy'+y=\cos x$；

(3) $y=Ce^{-2x}+\dfrac{1}{4}e^{2x}$，$y'+2y=e^{2x}$；

(4) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$，$y''-7y'+12y=0$.

3. 试验证：函数 $y=e^x\int_0^x e^{t^2}dt+Ce^x$ 是微分方程 $y'-y=e^{x+x^2}$ 的解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解.

4. 试验证：函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ 是微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-2y=0$$

的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=1$ 的特解.

5. 验证：函数 $y=\cos x+e^{-x}$ 是初值问题

$$\begin{cases} y'+y=\cos x-\sin x, \\ y|_{x=0}=2 \end{cases}$$

的解.

6. 试写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程及初始条件：

(1) 曲线过点(0，−2)，且曲线上每一点(x,y)处切线的斜率都比这点的纵坐标大 3；

(2) 曲线过点(0，2)，且曲线上任一点(x,y)处切线的斜率是这点纵坐标的 3 倍.

§6.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式是