Birth and Death Processes

Birth and Death Processes

Hou Zhenting

生灭过程

BIRTH AND DEATH PROCESSES

BIRTH AND DEATH PROCESSES

Hou Zhenting

侯振挺等 / 著

湖南科学技术出版社

Birth and Death Processes

Birth and Death Processes

Hou Zhenting

生灭过程

BIRTH AND DEATH PROCESSES

BIRTH AND DEATH PROCESSES

Hou Zhenting

侯振挺 刘再明 张汉君 李俊平 邹捷中 袁成桂 / 著

湖南科学技术出版社

生灭过程

著　　者：侯振挺等

责任编辑：胡海清

出版发行：湖南科学技术出版社

社　　址：长沙市展览馆路 66 号

　　　　　http://www.hnstp.com

邮购联系：本社直销科　0731－4441720

印　　刷：湖南省新华印刷二厂

　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）

厂　　址：邵阳市双坡岭

邮　　编：422001

经　　销：湖南省新华书店

出版日期：2000 年 5 月第 1 版第 1 次

开　　本：850mm×1168mm　1/32

印　　张：15.125

插　　页：6

字　　数：400000

印　　数：1～560

书　　号：ISBN 7－5357－2718－2/O·176

定　　价：50.00 元

序
PREFACE

在马尔可夫过程中，生灭过程无疑是其中极为重要的一类。这不仅因为生灭过程模型有很强的应用背景，直观明确，强烈地吸引着应用工作者的兴趣，而且在理论研究中，由于其模型精炼，往往是一般的马尔可夫过程研究的切入点：一种研究方法或一类研究课题的提出往往是先以生灭过程为对象，再逐步向更一般的马尔可夫过程推进。例如，王梓坤院士首创的“极限过渡法”，首先就是从生灭过程切入，构造了全部生灭过程，侯振挺、郭青峰继而将之推广至齐次可列马尔可夫过程；侯振挺发表的论文《生灭过程的 0^{+} - 系统》就是首先从生灭过程角度肯定了 D.G.Kendall 的对马尔可夫过程的著名猜想；最近，陈木法教授对第一特征值问题的研究取得了第一流成果，也是如此。

我国对于生灭过程的研究一直处于国际前沿。1958 年，王梓坤发表论文《生灭过程的分类》，成功地构造了全稳定保守的全部 Q 过程，继而杨向群教授构造了全稳定的全部 Q 过程。至此，对于全稳定状态的生灭过程的构造论已彻底完成，接下去就是含瞬时态生灭过程的研究。

含瞬时态生灭过程的研究，由于其样本轨道的复杂性，则须创造一种新方法和新技巧。1987 年，陈安岳博士创造了“禁止概率法”，用于含瞬时 Q 过程的研究，十分有效。唐令琪、费志凌等用

此方法研究生灭过程，使得含瞬时态生灭过程的研究有了突破性的进展。1993年，刘再明、侯振挺的论文《含瞬时态生灭 Q－矩阵问题》最终完成了含瞬时态生灭过程的定性理论。此外，我们还完成了含有限个瞬时态生灭过程的全部构造。近些年，陈木法及张汉君对生灭过程的随机单调性、转移函数的各种收敛性以及第一特征值问题的研究取得了重大成果。本书就是这些成果的总结。

本书由侯振挺和邹捷中主持编写，并制定了书的框架结构和写作大纲。全书分为五篇，共17章。其中，邹捷中撰写第1章～第4章和第16章，刘再明撰写第5章～第10章，张汉君撰写第11章和第12章，李俊平撰写第13章～第15章，袁成桂撰写第17章。

在我们的研究和本书的写作过程中，得到了王寿仁、梁之舜、王梓坤、严士健、苗邦均、陈希孺、马志明、严加安、胡迪鹤、吴荣、戴永隆、刘文、陈木法、吴今培、李致中、肖果能、刘国欣、罗交晚、于贵穴、黄炳燚、方小斌、胡达轩、言军等同志的支持和帮助。长沙铁道学院党委和行政领导自始至终关注着本书的出版，湖南科学技术出版社及胡海清编审为此书的出版倾注了大量的精力，在此，一并致谢。

由于作者才疏学浅，书中不当之处在所难免，唯望各位专家和读者不吝指正。

侯振挺

1999年10月

目 录
CONTENTS

绪论

BIRTH AND DEATH PROCESSES

马尔可夫过程是一类重要的随机过程，它的原始模型马尔可夫链，由俄国数学家 A.A.马尔可夫于 1907 年提出.粗略说来，所谓马尔可夫性可以用下述直观语言来刻画：在已知系统目前的状态(现在)的条件下，它未来的演变(将来)不依赖于它以往的演变(过去)，简言之，在已知“现在”的条件下，“将来”与“过去”无关，具有这种特性的随机过程称为马尔可夫过程.

我们可以给出马尔可夫过程的严格数学定义.设 $\mathbf{E}$ 为可列集(例如 $\mathbf{E}=\{0,1,2,\cdots\}$). $X=(x_t,t\geqslant 0)$ 为取值于 $\mathbf{E}$ 的随机过程.如果 X 具有马尔可夫性：

对任意 $n\geqslant 2$，任意 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和任意使 $P(X_{t_1}=i_1, X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})>0$ 的 $i_1,i_2,\cdots i_{n-1}\in\mathbf{E}$ 有

$$P(X_{t_n}=i_n, \mid X_{t_1}=i_2,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_{n-1}})=$$

$$P(X_{t_n}=i_n\mid X_{t_{n-1}})=i_{n-1}. \tag{1}$$

上式的直观解释是在已知“现在”$(X_{t_{n-1}}=i_{n-1})$的条件下，“将来”$(X_{t_n}=i_n)$与“过去”$(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_{n-2}}=i_{n-2})$无关.

因此，如 $P(X_t=i)>0$，可定义

$$P_{ij}(s,t)=p(x_t=j\mid x_s=i),\quad i,j\in\mathbf{E},\ s\leqslant t.$$

称 $P_{ij}(s,t)$ 为过程于 s 时处于状态 i 的条件下于 t 时转移至 j 的转

移概率,一般说来,四元函数 $P_{ij}(s,t)$ 依赖于 i,j,s,t.如果对一切 $i,j,P_{ij}(s,t)$ 只依赖于差 $t-s$,也即

$$P_{ij}(s,t) = P_{ij}(0,t-s), \qquad s \leqslant t.$$

则称其对应的马尔可夫过程为齐次马尔可夫过程,记为 $P_{ij}(t) = P_{ij}(0,t), t \geqslant 0$,则有

$$\begin{cases} P_{ij}(t) \geqslant 0, \\ \sum\limits_{j\in \mathbf{E}} P_{ij}(t) \leqslant 1, \\ P_{ij}(s+t) = \sum\limits_{k\in \mathbf{E}} P_{ik}(s)P_{kj}(t). \end{cases} \tag{2}$$

由于$(P_{ij}(t))$完全刻画了齐次马尔可夫过程 X.因此,以后我们经常称满足条件(2)的实函数族$(P_{ij}(t), i,j \in \mathbf{E}, t \geqslant 0)$为一个马尔可夫过程.

如果还有

$$\lim_{t\downarrow 0} P_{ij}(t) = P_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & \text{如 } i = j; \\ 0, & \text{如 } i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

则称 $P_{ij}(t)$ 为一个标准马尔可夫过程.

对于标准马尔可夫过程,其转移概率具有较好的解析性质,例如

$$q_{ij} \triangleq P'_{ij}(0) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{P_{ij}(t) - P_{ij}(0)}{t} \tag{4}$$

存在,且满足下列 Doob – Kolmogorov 条件:

$$\text{(DK)} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant q_{ij} < \infty, & i \neq j; \\ \sum\limits_{j\neq i} q_{ij} \leqslant -q_{ii} \triangleq q_i \leqslant \infty. \end{cases} \tag{5}$$

称矩阵 $Q = (q_{ij})$ 为标准马尔可夫过程 $P(t) = P_{ij}(t)$ 的密度矩阵,习惯也称为 Q – 矩阵,而把具有密度矩阵 Q 的标准马尔可夫过程 P 称为一个 Q 过程,以示 P 和 Q 有关系(4).

在(5)中,如果 $q_i < \infty$,称状态 i 为稳定的,否则称为瞬时的.如果 $q_i = \sum\limits_{j\neq i} q_{ij}$,称状态 i 为保守的,否则称为非保守的.

设 $\mathbf{E}$ 为非负整数集 Z_+ 或整数集 Z,考虑 $\mathbf{E}$ 上满足如下条件的矩阵 $Q = (q_{ij})$

(i) $q_{ij} = 0, \mid i - j \mid > 1 \quad 0 < q_{ij} < \infty, \mid i - j \mid = 1;$ (6)

(ii) $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant q_i \leqslant \infty;$ (7)

(iii) 若 $q_i < \infty$,则 $q_i = q_{i,i-1} + q_{i,i+1}$. (8)

(若 $\mathbf{E} = \mathrm{Z}_+$,允许 $q_0 > q_{01}$)

我们称这种满足以上条件的矩阵为生灭拟 Q - 矩阵,进一步,若 Q 还是 Q - 矩阵,即存在马氏过程 $P(t)$,使(4)成立,则称 Q 为生灭 Q - 矩阵,相应的 Q 过程 $P(t)$ 称为生灭过程,当不致混淆 Q 时,也直接称 $P(t)$ 为生灭过程.

于是,当 $\mathbf{E} = \mathrm{Z}_+$ 时,生灭拟 Q - 矩阵有下列形式:

$$Q = \begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & & & \\ a_1 & -c_1 & b_1 & & \\ & a_2 & -c_2 & b_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $\quad a_i > 0, b_i > 0, 0 < c_i \leqslant \infty$.

$c_0 \geqslant b_0, c_i \geqslant a_i + b_i, i \geqslant 1$.

若 $c_i < \infty$,则 $c_i = a_i + b_i, \quad i \geqslant 0$.

我们称以上矩阵为单边生灭拟 Q - 矩阵,相应的生灭 Q 过程称为单边生灭过程.当 $\mathbf{E} = Z$ 时,生灭拟 Q - 矩阵有下列形式

$$Q = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & a_{-1} & -c_{-1} & b_{-1} & & & \\ & & a_0 & -c_0 & b_0 & & \\ & & & a_1 & -c_1 & b_1 & \\ & & & & a_2 & -c_2 & b_2 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中 $\quad a_i > 0, b_i > 0, 0 < c_i \leqslant \infty$.

若 $\quad c_i < \infty$,

则 $$c_i = a_i + b_i.$$

称该 Q - 矩阵为双边生灭拟 Q - 矩阵,相应的生灭 Q 过程称为双边生灭过程.

生灭过程在 Q 过程理论与应用中占有极其重要的地位.首先,生灭过程模型描述了系统内部相邻状态依次转移的消长状态,在生物学、物理学、控制论等学科中有着良好的应用,而且生灭过程作为一类特殊的随机过程,在理论上有着十分重要的启发意义.例如,生灭过程可以看作扩散过程的某种离散模型.因此,国内外概率论学者对生灭过程均给予了极大的关注,为之做了大量的研究工作.例如,王梓坤院士为我国马尔可夫过程研究的先行者,他和杨向群教授对马尔可夫过程,特别是生灭过程理论的研究,成果卓著.他们在国际上率先对全稳定态生灭过程理论的诸多方向如构造理论、状态分类、极限理论、积分型泛函等完成了系统全面而深入的研究,得到了丰富而深刻的完整结果.

研究生灭过程理论,首要者就是其构造问题,一般 Q 过程的构造问题首先由 Kolmogorov 于 1931 年提出.构造问题的具体提法是:给定一个满足 DK 条件的拟 Q - 矩阵,是否存在 Q 过程 $P(t)$,满足(4),即存在性问题,如果存在 Q 过程,是否唯一?即唯一性问题.最后,如果 Q 过程不唯一,如何构造全部 Q 过程.人们一般将存在性问题和唯一性问题,称为 Q - 矩阵问题或 Q 过程的定性理论.关于一般 Q 过程的构造论的结果和历史发展状况,可见侯振挺等专著[1].

就生灭过程而言,王梓坤院士早在 50 年代末即开展了对全稳定全保守生灭过程的研究,并用他独创的概率方法(极限过渡法)构造了全部全稳定全保守的单边生灭过程.随后杨向群教授在全稳定的情况下,使用分析方法构造了全部单边(0 状态不必保守)生灭过程和双边生灭过程,关于以上结果及相关论题的系统叙述和精辟分析已包含于王梓坤[2] 和杨向群[1] 等专著中.至于含瞬时态的生灭过程,由于其复杂性,结果甚少.1976 年 D.Williams 解决了一般的全瞬时态 Q 过程的定性理论问题,从而对全瞬时生灭

过程定性理论给出完整的答案,但对于既含瞬时态又含稳定态即混合态的生灭过程的定性理论却毫无进展.直到陈安岳创造性地提出禁止概率方法,为研究混合态 Q 过程的构造问题提供了一套系统的新方法,这才使得彻底解决生灭过程的定性理论成为可能.利用该方法我们彻底解决了生灭过程的定性理论和有限个瞬时态生灭过程的全部构造问题.

在王梓坤院士等人对生灭过程研究的基础上,侯振挺教授及其学生们潜心研究生灭过程多年,积累了丰富的成果,本书即是对这些成果的一个总结.本书的前4章是关于马尔可夫过程的基础理论,以后各章包括了生灭过程的定性理论,含有限个瞬时态生灭过程的全部构造,随机单调性,转移函数的收敛性,生灭过程的第一特征值,Kendall猜想等内容.最后,为了应用的需要,我们还引入及初步讨论了半马氏生灭过程.