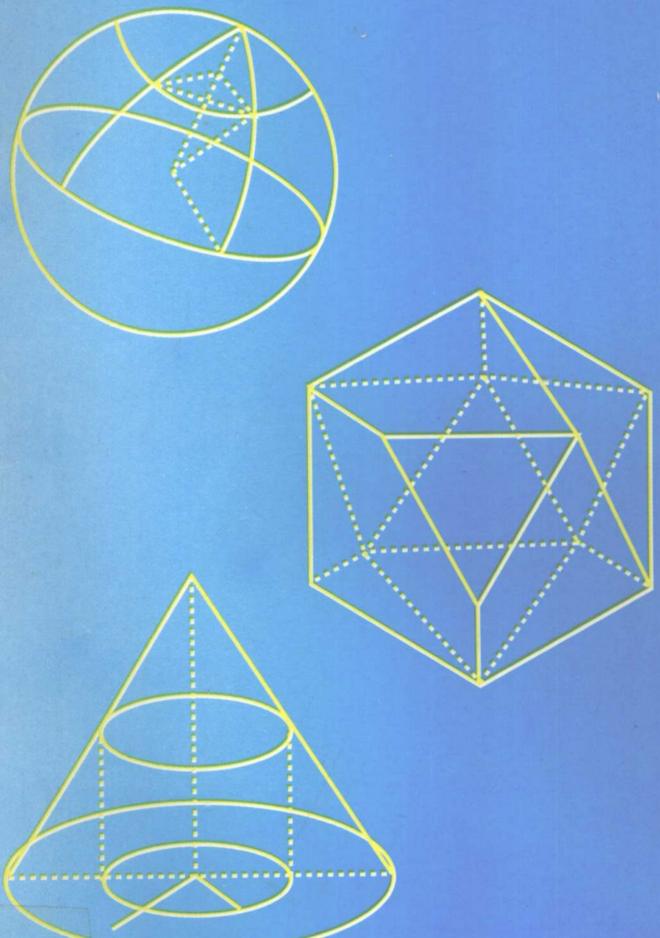
主编：邓继新
编著：尚　强

新编立体几何题典



北京科学技术出版社

新编立体几何题典

主编　邓继新

编著　尚　强

校对　朱德祥　吴雪庐

北京科学技术出版社

内 容 提 要

本书根据全国高中数学教学大纲和高中数学竞赛大纲编写，注重高考兼顾竞赛，注重基础问题，兼顾研究问题。本书共六章，前三章是基础，后三章是提高。

本书重视培养空间想象力，更重视对立体几何问题的观察、分析、综合、推理能力的培养，是一本极有价值的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

新编立体几何题典/尚强编著．－北京：北京科学技术出版社，1997.1

ISBN 7-5304-1942-0/Z·860

Ⅰ.新…　Ⅱ.尚…　Ⅲ.立体几何课-中学-习题　Ⅳ.G634.635

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 02026 号

G633.6-44/15

北京科学技术出版社出版
(北京西直门南大街 16 号)
邮政编码：100035

各地新华书店经销
三河市科教印刷厂印刷
*
850×1168 毫米　32 开本　14.75 印张　359 千字
1997 年 4 月第一版　1997 年 4 月第一次印刷
印数 1—5000 册

定价：18.00 元

序

任何一门学问都是由知识和技能组成的。在数学中，技能比仅仅掌握一些知识更重要。那么何为数学技能呢？数学技能就是解决问题的能力——不仅能解决一般问题，而且能解决需要某种程度的独立思考、判断力和想象力的问题。所以美国杰出的数学家和教育家G·波利亚说：中学数学教学的首要任务就是在于加强解题能力的训练。本书是以解题示例为主，对立体几何多方面问题有涉及。注重高考题亦兼顾竞赛题，注重基础问题亦兼顾研究问题。全书分六章，前三章是中学数学教学大纲规定的内容，后三章则是大纲以外的内容，目的是对一些学有余力的同学渗透一点现代数学思想和方法。

尚强同志撰写本书开始于1981年，几易其稿，期间笔者和吴雪庐教授、金德立副教授断断续续看了部分初稿并提供了一些材料。本书重视对几何问题的观察、空间想象、分析、综合、推理能力的培养，有一定的可读性。

学习立体几何：

第一，要注意与平面几何对比

立体几何相当一部分结论，是在平面几何知识的基础上经过类比和推广而得到的。例如，两点确定一直线，类推出三点确定一平面；从平面上点线关系，类推出空间两平面位置关系等等。掌握类推的一定规律和方法，形成正确的类推习惯，是培养逻辑思维能力的基本要求，对提高解题能力很有效。

立体几何中，很多问题是归结为平面几何问题来解决的。例如，异面直线距离与可归结为点到直线的距离，各种图形性质、定理的证明，也需要化为有关平面几何问题来解决。

第二，注意逻辑性

直观图上很多部分都不能反映立体图形的真实性质，而我们的证明往往是结合着观察直观图，因而在推理论证中应尽量严格，减少直观和默认的依据，注意逻辑性。

第三，正确使用立体图形

我们在一个平面上只能画出立体图形的直观图，直观图中的线段长短、角的大小、直线之间是否垂直与事实往往大相径庭，“长”的有时比“短”的要短的多，直观图只能帮助我们弄清条件的关系，起到示意作用。在看直观图时，要养成紧扣已知条件的习惯。若直观图准确，有些关系是符合事实的，如平行、中点等等。了解直观图的基本性质，对我们解题很有帮助。

第四，适当运用模型或实物

初学时可稍微多用些模型或实物，但要逐渐减少，达到不用或少用。不用实物或模型，努力想象，尽管多些时间，但对牢固树立空间观念和培养空间想象力很有帮助。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

本书动笔于 15 年前，期间得到著名数学家朱德祥教授无微不致的关怀，他老人家提供了材料并帮助修改初稿；吴雪庐教授仔细审阅了初稿；金德立副教授提供了部分材料。在此，特向三位老师致谢。

尚　强

1996 年 6 月 20 日于深圳

目　录

第一章　空间图形的基本性质

一、预备知识

二、直线和直线的位置关系

三、直线和平面的位置关系

四、平面和平面的位置关系

第二章 多 面 体

一、三面角与多面角

二、多面体

三、多面体的体积

第三章　旋　转　体

一、旋转面、旋转体的概念

二、旋转面的面积

三、旋转体的体积

第四章　立体几何的轨迹

第五章　空间几何变换

第六章　简单球面几何与球面三角

第一章　空间图形的基本性质

一、预备知识

1.1　空间图形的定义

平面几何的研究对象是在一个平面上的平面图形。而立体几何的研究对象是空间内立体图形，这种图形也叫做空间图形。因此立体几何也叫做空间几何。平面几何是立体几何的一部分。

什么是空间图形呢？在几何里对所有研究对象只能在给出它的定义之后才能讨论。因此在研究立体几何开始，必须首先给出空间图形的定义。

作为定义基础的不加定义的原始概念，叫做基本概念。

在立体几何里，作为基本概念常采用点、直线、平面，这三种基本概念也叫做基本对象。这些基本对象之间有某种关系，常叙述为“在……上”、“通过”、“相交”等等，这些关系不加以定义，看作基本概念，叫做基本关系。

一般数学概念“集合”，也就是任意个对象的总体，也是基本概念。有了上述一些基本概念就可给出空间图形的定义。

空间里具有某种基本关系的点、直线、平面或其部分的集合，叫做空间图形。

由于点、直线、平面都是不加以定义的，所以空间图形也是实际物体的一种非常抽象的形式，因而使立体几何的研究内容更为丰富。立体几何已成为在生产实践、科学试验中应用最为广泛的一种基础

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

理论学科。

1.2　平面的基本性质

研究空间图形的性质，同平面几何一样，也是依据几何公理作为基础的。研究空间图形的性质，又必须充分应用平面图形的性质。因此，在立体几何里首先要讨论关于平面基本性质的四条公理。

公理1　如果一条直线上的两点在一个平面上，那么这条直线上的所有点都在这个平面上。

公理2　如果两个平面相交于一点，那么它们交于通过这个点的一条直线。

公理3　通过不在同一直线上的三点，存在且只存在一个平面。

公理4　不在已知平面上，至少有一个点。

上面叙述的四条公理，是讨论空间图形性质的基础。公理1，是描述平面的基本性质，公理2是描述两平面相交的关系，公理3是确定一个平面的根据，公理4指出空间四点不一定在同一平面上。

除这些公理外，在立体几何里，对于空间任意平面上的几何图形，平面几何的公理、定义、定理仍然成立。这里着重指出：

空间的两条直线，如果在同一平面上，但不相交，现在仍然叫做平行线。

平行公理　通过直线外一点，只有一条直线和已知直线平行。

从以上的公理，可以得出下面推论：

推论1　通过直线和不在它上面的一点，存在唯一平面。

事实上，在直线l上取两点A、B，根据公理2，通过点A、B和不在直线l上的已知点M存在唯一平面，而根据公理1，已知直线l在这个平面上。

推论2　通过两条相交直线存在唯一平面。

事实上，在已知直线l_1，l_2上分别取点A、B，根据公理3，通过点A、B和两条直线的交点O存在唯一平面，而根据公理1，已知两

条直线都在这个平面上。

推论 3　通过两条平行线存在唯一平面。

事实上，根据平行线定义，两条平行线必在同一平面上。根据推论 1，通过第一直线和第二直线上的任意点 A 的平面是唯一的。

推论 4　在空间存在不在同一平面上的直线。

事实上，取平面 α 和它上面的直线 a，在平面 α 外取一点 B（公理 4），通过平面 α 上直线 a 外的任意点 A 和点 B 的直线 b，与直线 a 不能在同一平面上。因为，如果假定直线 a 和 b 在某个平面 β 上，则 β 必通过直线 a 和点 A，β 将与 α 重合，因而 B 在 α 上，这是不可能的。因此直线 a 和 b 不在同一平面上。

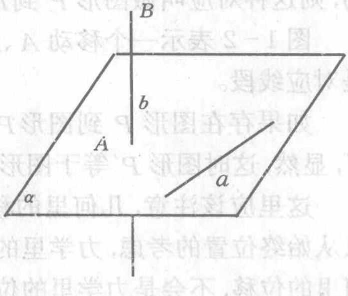


图　1－1

1.3　移动与不变量

"移动"是初等几何中的一个重要概念。任何刚体都可以在空间任意位移改变它的位置而大小和形状不变。在物理和力学里，把物体的这种位移作为随时间变化的进程来研究，也就是当物体从位置 P 移动位置 P'，同时要研究在每个时刻的所有中间位置，特别是要研究运动体的每个点所画的轨道，以及由这些轨道所确定的位置 P 和 P' 的点间的一一对应关系（图 1－2）。

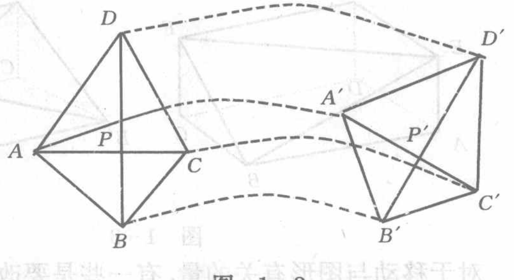


图　1－2

在几何里“移动”的概念是物体运动的抽象形式，由于在几何里不考虑时间，所以“移动”不能作为进程来研究，也就是只研究图形的两个位置。因此在力学里经不同轨道由位置 P 到位置 P' 的位移，在几何里看做是同一个移动，而且把它抽象地定义如下：

如果图形 P 到 P' 的点作成一一对应，并且对应线段总是相等的，则这种对应叫做图形 P 到 P' 的**移动**。

图 1－2 表示一个移动 A、A'；B、B'；…是对应点 AB、$A'B'$；…是对应线段。

如果存在图形 P 到图形 P' 的某个移动，则叫做图形 P 等于图 P'，显然，这时图形 P' 等于图形 P。

这里应该注意，几何里的移动概念，比力学里的更广泛些，如果只从始终位置的考虑，力学里的位移也就是几何里的位移。反之，几何里的位移，不会是力学里的位移。

例如，一个图形到它在平面镜中的映象的移动是就这样。因此，空间图形的相等可以分为两种，一种是普通相等图形，它的对应点摆列顺序相同，这种相等图形位移后可以重合在一起（图 1－2），一种是所谓镜象相等图形，对应点摆列顺序相反，镜象相等图形并不能重合在一起（图 1－3）。

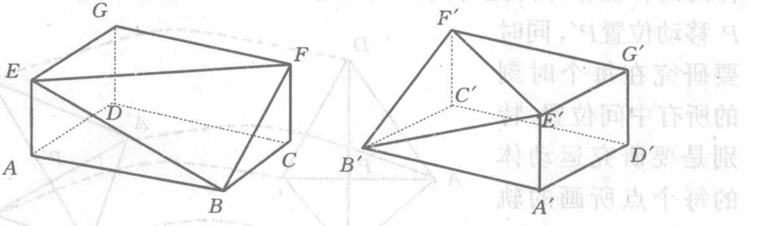


图 1－3

对于移动与图形有关的量，有一些是要改变的，也有一些是不变的，例如，表示车轮在固定的轨道上转动的图形 P 和 P'，我们可以看

做是图形 P 到 P' 的一个移动。对于这个移动与图形 P 有关的量，例如图 1－4 中线段 OO_1（P 对于定点的距离）角 O_1CA（轮辐对铅直线 CO_1 的转角）分别变为线段 OO_2，角 $O_2C'A'$ 大小有所改变，而线段 CA、CB（轮辐）变为线段 $C'A'$、$C'B'$，角 ACB 变为角 $A'C'B'$，大小就没有改变。

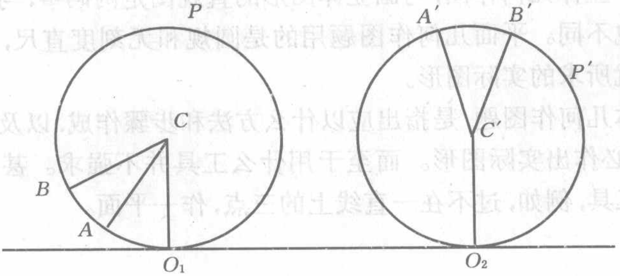


图 1－4

在移动下，图形的那些保持不变的量，叫做图形移动的不变量。

相等图形有相同的移动不变量，它们有相同的形状，只是在空间的位置不同。因此，研究相等图形必须研究它们的移动不变量，这些移动不变量也正是初等几何的主要研究内容，而改变量则是力学的研究对象。

如果我们把所有相等的图形都归为同一类，不相等的图形归为不同类，则同一类的图形有相同的不变量。例如，所有相等直角三角形的相同的不变量是三个边、三个角等。在图形的一些不变量里，可将其中几个看做是独立的，由它们可以决定所有其余的不变量，而它们并不能互相决定，也就是说，这几个独立的不变量可以确定整个图形。如在直角三角形的不变量中，两个直角边，或一个锐角与斜边，或一个锐角与直角边，都可以看作独立的不变量。它们能确定这个直角三角形。

可确定已知图形的某些独立的不变量，叫做图形的参数。

图形的参数必须满足两个条件：

1. 不能过少。过少就不能完全确定其余的不变量以及整个图形。

2. 不能过多。过多它们就可以互相表示，因而是多余的。以后对于任何图形，应明确它有几个怎样的参数。

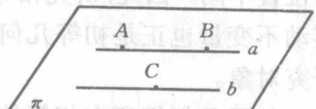
关于立体几何作图，与画立体图形的直观图是两码事，与平面几何作图也不同。平面几何作图题用的是圆规和无刻度直尺，作出的图形也就所求的实际图形。

立体几何作图题，是指出应以什么方法和步骤作成，以及根据的理由，不必作出实际图形。而至于用什么工具并不强求。甚至找不到什么工具，例如，过不在一直线上的三点，作一平面。

解题示例

1.1　**已知**：两直线 $a // b$。

求证：a、b 确定唯一平面 π。



题图 1-1

证明：由平行线的定义(共面而不相交的两直线称为平行线)知：a、b 在同一平面上。　(1)

∵直线 a 上至少有两个不相同的点 A、B，直线 b 上至少有一点 C，这三点必不共线。

∴A、B、C 三点决定唯一平面 π。　(2)

故从(1)、(2)可得：a、b 决定唯一平面 π。

1.2　**已知**：A、B、C、D 是不共面的四点。

求证：(1)四平面 ABC、BCD、DCA、DAB 不共点；

(2)六直线 AB、BC、CD、DA、AC、BD 不共面。

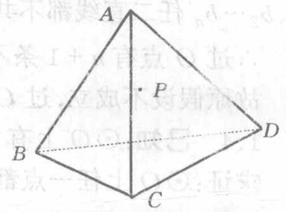
证明：(1)假定四平面 ABC、BCD、DCA、DAB 共点于 P，

则 P 必在平面 ACB、ACD 上，随之得 P 在 AC 上；

P 必在平面 BDA、BDC 上，随之得 P 在 BD 上。

∵A、B、C、D 是不共面的四点，

∴AC 与 BD 无交点。



题图 1-2

故在 AC 上又在 BD 上的 P 点不存在。即四平面 ABC、BCD、CDA、DAB 不共点。

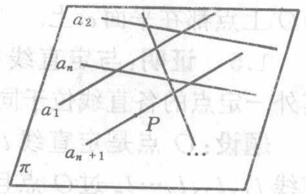
(2)∵若 AB、CD 两直线共面，则 A、B、C、D 必共面，∴AB、CD 两直线不共面。

故 AB、BC、CD、AC、DA、BD 六直线不能共面。

1.3 **已知**：一平面 π 及空间一点 O。

求证：(1)在平面 π 上有无穷多条不都共点的直线；

(2)通过 O 点有无穷多条不都共面的直线。



题图 1-3

证明：(1)假设在平面 π 上只有 n 条不都共点的直线 a_1、a_2、a_3、…、a_n。

在平面 π 上必有一点 P 不在 a_1、a_2、…、a_n 上。

∵过 P 可作一直线 A_{n+1} 使平行 a_1 且不重合于 a_1、a_2、…、a_n。

由此可知：

a_1、a_2、…、a_n、a_{n+1} 是平面 π 上不都共点的 $n+1$ 条直线。

故原假设不成立，随之得在平面 π 上有无穷多条不都共点的直线。

证明：(2)假设通过 O 点只有 n 条不都共面的直线 b_1、b_2…b_n，过 b_1、b_2…b_n 中的任二直线确定一平面，过此平面外一点 Q 与 O 连一直线 b_{n+1}，显然 b_{n+1} 直线不在所确定的任一平面上，即 b_{n+1} 与

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com