毛纲源考研数学辅导系列

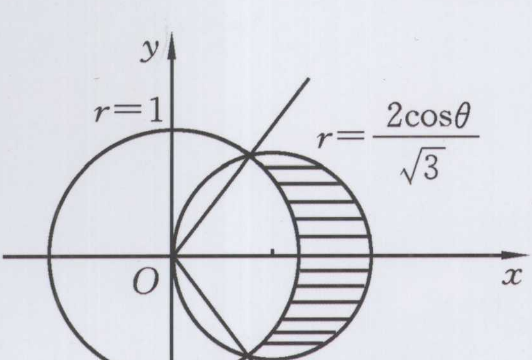
本书在手 考研无忧

考研数学（三）

客观题简化求解技巧分类归纳

（微积分）

毛纲源 编著



◇经典题型 紧扣大纲 帮你高效复习

◇方法新颖 技巧独特 助君考研成功

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

毛纲源考研数学辅导系列

考研数学(三)
客观题简化求解技巧分类归纳
(微积分)

毛纲源　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

考研数学(三)客观题简化求解技巧分类归纳(微积分)/毛纲源　编著.—武汉:华中科技大学出版社,2008 年 11 月

ISBN 978-7-5609-4947-5

Ⅰ.考…　Ⅱ.毛…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-解题　②微积分-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 170213 号

考研数学(三)客观题简化求解技巧分类归纳
(微积分)　　毛纲源　编著

责任编辑:王汉江　　封面设计:潘　群
责任校对:张　琳　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉佳年华科技有限公司
印　刷:湖北恒泰印务有限公司

开本:710mm×1000mm　1/16　印张:11.5　字数:228 000
版次:2008 年 11 月第 1 版　印次:2008 年 11 月第 1 次印刷　定价:24.80 元
ISBN 978-7-5609-4947-5/O·472

前　言

考研数学试题中的客观题(填空题和选择题)是考研数学试题的重要组成部分.它侧重考查考生对数学概念、数学定理(命题)的理解和掌握程度,并测试考生能否通过这些基本数学概念、数学定理(命题)进行简单推理.由于客观题的试题数量在试卷中所占比例较大(接近试题总题量的三分之二),且其总分超过整个试卷总分的三分之一,如何快速准确地做好客观题,是考生为取得好成绩渴望得到解决的问题,这也是本书出版的目的.

本书分为考研数学(三)中的微积分部分,按照考纲的知识块进行分类,分为若干个章节.每一章节(考纲知识块)又分为若干个小节(考点),结合历年来经济类考研数学的客观题及各个名校的有关试题对所考核的知识点(考点)的简化求解方法与技巧进行分类归纳与总结.为使这些简化求解方法与技巧和常规套路的求解方法进行比较,不少例题给出多种求解方法,其中"解一"一般为简化求解方法,为使考生掌握和应用这些简化求解方法.作者根据不同的知识点(考点)将其求解方法归纳整理成相应命题,便于考生应用,其中不少命题是作者教学经验的总结.这些命题可在理解的基础上当作重要结论来记忆和应用.这些命题的证明,不少渗透在相关题的解法上(常为"解二").它们是必须掌握的核心知识点.

这些分类简化求解方法与技巧不仅有助于快速准确地求解客观题,而且对证明题及计算题也能发挥重要作用.

为了把每个知识块复习好.本书以知识点(考点)为线索将同一知识点(考点)的填空题、选择题结合在一起进行讲解.这样做的目的是使读者熟练掌握有关客观题简化求解方法与技巧,从而帮助考生快速、准确地求解客观题.读者使用本书时,最好能自己先想再做,不要急于看解答,然后与书中求解方法比较."注意"中的一些题外话也值得读者细心揣摩.

真诚希望本书能陪伴读者度过难忘的备考学习时光,能够迅速提高应试能力,取得优异的考研成绩,圆考研成功梦,圆考研考入名校梦.这是作者最大的心愿.

本书也可供大专院校在校学生学习微积分、线性代数、概率论与数理统计时,阶段复习和期末复习使用.

编写本书时参阅了有关书籍,引用了一些例子,在此特向有关作者致谢.

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有错误和疏漏之处,恳请读者指正.

编　者

2008年10月

题 型 说 明

——客观题常用的解题方法与技巧

硕士研究生入学统一考试数学试题的题型有填空题、选择题和解答题(包括计算、应用和证明题)三种,其中填空题和选择题由于答案唯一,评分不受主观因素影响能较客观地反映考生水平,常称为客观题.

硕士研究生入学考试数学试题中的客观题(填空题、选择题)在研究生入学考试中占60分左右,约占总分的40%.从目前情况看,考生在客观题部分得分率较低,正是这部分得分率较低,总分就很难上去.其原因主要是两方面:一方面是考生做计算题时准确率低,基本概念和基本理论没有吃透,或计算能力较差;另一方面是考生对求解客观题的方法与技巧掌握得不熟练,不能运用自如.

填空题绝大部分是计算题,但这里的计算题不像一般的计算题,它只看结果不看过程.因而做填空题必须非常小心,因为一旦答案出错就是零分.若计算的准确率不高,填空题容易失分.填空题也有不少是概念题,主要考查考生对一些最基本的概念、性质、公式掌握和运用的熟练程度及快捷、准确的运算能力以及正确的判断能力和推理能力.为此,做填空题时要根据题目的特点充分利用多种方法和技巧简化计算,首先要充分利用本书所归纳总结出的有关命题的结论迅速、准确地写出答案.如果没有可直接利用的结论,那只好从题设条件出发通过分析、推理和计算推导出有关结果.

单项选择题(即四个选项中有且仅有一个选项是正确的,以下简称选择题)是研究生入学考试数学试卷的重要组成部分.选择题大部分考查基本概念和基本理论.如果基本概念和基本理论没有吃透,选择题部分也很容易失分.另一方面同一道题出成客观题后往往有更巧妙、更简单的方法求解.当然客观题用我们平时求解主观题的方法虽然也能求解,但在解题时间上有时相差几倍甚至几十倍.因此要提高客观题部分的得分率,一要提高做计算题的准确率,吃透基本概念和基本理论;二要掌握简化求解客观题的方法和技巧.

如何快速、准确地做好选择题为后面的计算、论证和求解应用题留下较充裕的时间,这是考生能否取得高分的关键.为此,首先要理解和熟悉本书各章节所介绍的命题的结论,然后充分利用这些结论判断四个选项中哪一个成立?如果没有现成的结论可用,则可采用下述各法确定选项.

法一 直选法.

即利用命题、定理、定义等直接判断或验证某选项正确,则其余选项必不正确(不必验证).

法二 排错法.

即验证其中三个选项不正确,则剩下的一个选项必正确(也不必验证).常用赋值法找出错误选项.这里的赋值法是指利用满足题设条件的"特殊值"通过推理或验证找出错误选项.

对于题干中"有……必有……";或"当……时,必有……";或"对任意……必有……"或题干中所给函数为抽象函数常用赋值法找出反例,找出错误选项,确定正确选项.

例1 设函数 $f(x)$处处可导,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

解 上例具有赋值法的明显特征"当……时,必有……"可采用反例排除.取 $f(x)=x$ 时,则 $f'(x)=1$,而

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty,\quad 但 \quad \lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty} 1=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty,\quad 但 \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty} 1=1.$$

可见(A)、(C)不正确. 再取 $f(x)=x^2$, 则 $f'(x)=2x$. 则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x=-\infty$, 但 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$. 可见(B)也不正确. 仅(D)入选.

法三 推演法.

它是指从题设条件出发运用有关概念、定理或命题经推理演算得出正确选项.

对于与基本概念或其性质有关的选择题,或题中的备选项为"数值"形式的项,或题干条件给出的是某种运算形式的项时,常用推演法确定正确选项.

例 2 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵的一个特征值,则矩阵 $(\boldsymbol{A}^2/3)^{-1}$ 有一个特征值等于(　　).

(A) 4/3　　(B) 3/4　　(C) 1/2　　(D) 1/4

解 备选项为"数值"形式的项,适合用推演法求解. 由于 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 为非零特征值, λ^2 为 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值, $1/\lambda^2$ 为 $(\boldsymbol{A}^2)^{-1}$ 的特征值,故 $(\boldsymbol{A}^2/3)^{-1}=3(\boldsymbol{A}^2)^{-1}$ 的一个特征值为 $3\times(1/4)=3/4$. 仅(B)入选.

法四 图示法.

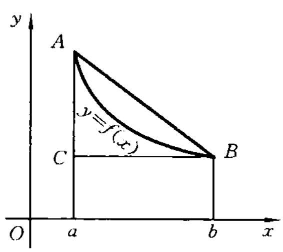
它是指根据题设条件作出有关问题的几何图形,然后借助几何图形的直观性得到正确选项或将四个选项的关系画出图形,看哪一种关系符合题设条件,从而确定正确选项.

对于有明显几何意义的题设条件如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性、渐近性等或题设给出图形面积、立体体积;或在概率论中给出两事件的关系或概率关系等均可试用图示法求解.

例 3 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$. 记 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $S_2=f(b)(b-a)$, $S_3=[(b-a)/2][f(a)+f(b)]$, 则(　　).

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$



解 由 $f'(x)<0, f''(x)>0$ 知 $f(x)$ 的图形在 $[a,b]$ 上单调减少凹向,作出其图形如左图所示. 连接弦 AB, 过点 B 作平行于 x 轴的直线与过点 A 的垂线交于 C. 显然,梯形 $ABba$ 的面积为 S_3, 矩形 $CBba$ 的面积为 S_2, 曲边梯形 $ABba$ 的面积为 S_1, 则

$$S_2<S_1<S_3. 仅(B)入选.$$

法五 代入法.

将备选项逐一代入题设条件,验证哪个选项正确.

该法适用于备选项为具体"数值"形式的项,且题干中又含有验证条件,且验证又比较简单.

例 4 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数是(　　).

(A) $1+\sin x$　　(B) $1-\sin x$　　(C) $1+\cos x$　　(D) $1-\cos x$

解 备选项为具体函数且含有合适的验证条件. 适合用代入法确定正确选项. 下面只需验证哪个函数的二阶导数为 $\sin x$. 因 $(1+\sin x)''=-\sin x$. 仅(B)入选.

当然在解选择题时,如果能用计算确定正确选项就不需一一验证或举反例排除其他选项. 一般需用计算才能确定正确选项的选择题,其计算量都不大、不难. 当然如果能用上述各法较简便地确定正确选项也无须通过计算去验证正确选项.

目　　录

1　函数、极限、连续 …………………………………………………… (1)

1.1　函数及其性质 …………………………………………………… (1)

1.2　极限的求法 ……………………………………………………… (8)

1.3　函数的连续性…………………………………………………… (22)

习题 1 ……………………………………………………………… (28)

2　一元函数微分学……………………………………………………… (31)

2.1　判别函数在某点的可导性……………………………………… (31)

2.2　计算导数………………………………………………………… (39)

2.3　计算高阶导数与微分…………………………………………… (43)

2.4　微分中值定理的综合应用……………………………………… (46)

2.5　讨论函数性质…………………………………………………… (50)

2.6　一元函数微分学的几何应用…………………………………… (60)

2.7　导数在经济分析中的应用……………………………………… (63)

习题 2 ……………………………………………………………… (66)

3　不定积分……………………………………………………………… (70)

3.1　原函数与不定积分……………………………………………… (70)

3.2　计算不定积分…………………………………………………… (73)

习题 3 ……………………………………………………………… (78)

4　定积分………………………………………………………………… (80)

4.1　利用定积分定义求积和式的极限……………………………… (80)

4.2　利用定积分性质计算定积分…………………………………… (81)

4.3　用换元法计算定积分…………………………………………… (88)

4.4　计算几类需分子区间积分的定积分…………………………… (90)

4.5　比较定积分的大小……………………………………………… (92)

4.6　求解与变限积分有关的问题…………………………………… (93)

4.7　反常积分敛散性的判别及其计算……………………………… (98)

4.8　定积分的应用 ………………………………………………… (101)

习题 4 …………………………………………………………… (106)

5　多元函数微分学及其应用 ……………………………………… (108)

5.1　二元函数的几个概念及其相互关系 ………………………… (108)

5.2　计算多元函数的偏导数和全微分 …………………………… (111)

5.3　求二元函数的极值和最值 …………………………………… (120)

习题 5 …………………………………………………………… (124)

6　二重积分 …………………………………………………………………………… (126)
6.1　交换积分次序或坐标系(转换二次积分) ……………………………… (126)
6.2　计算二重积分 …………………………………………………………… (130)
习题 6 ………………………………………………………………………………… (138)
7　无穷级数 …………………………………………………………………………… (140)
7.1　常数项级数敛散性的判别 ………………………………………………… (140)
7.2　幂级数 ……………………………………………………………………… (149)
习题 7 ………………………………………………………………………………… (157)
8　常微分方程和差分方程 ……………………………………………………… (160)
8.1　求解一阶线性微分方程 …………………………………………………… (160)
8.2　求解可降阶的高阶微分方程 ……………………………………………… (165)
8.3　求解二阶微分方程 ………………………………………………………… (166)
8.4　求解一阶常系数线性差分方程 …………………………………………… (170)
习题 8 ………………………………………………………………………………… (172)
习题答案或提示 ……………………………………………………………………… (175)

1　函数、极限、连续

1.1　函数及其性质

1.1.1　求复合函数的表达式

复合函数表达式的求解方法主要有两种.一是代入法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替.此法适用于初等函数的复合,也适用于分段函数的复合.特别当 $f(x)$,$g(x)$ 均为分段函数,且其分段点相同时,常可用代入法简化求解,得到 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 的表达式.

当 $f(x)$,$g(x)$ 均为分段函数,但其分段点不同时,仍可用代入法求解.求解时要抓住最外层函数定义域的各个区间段,结合中间变量的表示式及中间变量的定义域列出自变量所满足的对应不等式组.通过求解此联立不等式组即可求出相应的定义域.

此法适用于初等函数与分段函数的复合,或分段点不同的两分段函数的复合.

二是用图示法.确定正确选项.

例 1　设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ x^2+x, & x>0, \end{cases}$ ①则(　　).

(A) $f(-x)=\begin{cases} -x^2, & x\leqslant 0, \\ -(x^2+x), & x>0 \end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases} -(x^2+x), & x<0, \\ -x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0, \\ x^2-x, & x>0 \end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases} x^2-x, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$

解　用代入法求之.将式①中所有 x 都换为 $-x$,则

$$f(-x)=\begin{cases} (-x)^2, & -x\leqslant 0, \\ (-x)^2+(-x), & -x>0 \end{cases}=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0, \\ x^2-x, & x<0. \end{cases}$$

仅(D)入选.

例 2　设 $g(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leqslant 0, \\ x+2, & x>0, \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0, \\ -x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ 为(　　).

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x<0, \\ 2-x, & x\geqslant 0 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} 2-x^2, & x<0, \\ 2+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x<0, \\ 2-x, & x\geqslant 0 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} 2+x^2, & x<0, \\ 2+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

解　所给函数 $f(x)$,$g(x)$ 均为分段函数,且其分段点相同,只需用代入法即可简化求解.

当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$,则 $g[f(x)]=f(x)+2=x^2+2$;当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x\leqslant$

0,则$g[f(x)]=2-f(x)=2-(-x)=2+x$,故 $g[f(x)]=\begin{cases} x^2+2, & x<0, \\ 2+x, & x\geqslant 0. \end{cases}$仅(D)入选.

例 3 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & 0\leqslant x<4, \\ x, & 4<x\leqslant 6, \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x<2, \\ 2+x, & 2<x\leqslant 4, \end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$______.

解 用代入法求之. $f[g(x)]=\begin{cases} \sqrt{g(x)}, & 0\leqslant g(x)<4, \\ g(x), & 4<g(x)\leqslant 6. \end{cases}$

(1) 当 $g(x)=x^2$ 时,$f[g(x)]=\sqrt{x^2}$. 由$\begin{cases} 0\leqslant x^2<4, \\ 0\leqslant x<2 \end{cases}$推知 $0\leqslant x<2$,故 $f[g(x)]=x\ (0\leqslant x<2)$.

当 $g(x)=2+x$ 时,因$\begin{cases} 0\leqslant 2+x<4, \\ 2<x\leqslant 4 \end{cases}$无解,故 $f[g(x)]$无意义.

(2) 当 $g(x)=x^2$ 时,$f[g(x)]=g(x)=x^2$. 由于$\begin{cases} 4<x^2\leqslant 6, \\ 0\leqslant x<2 \end{cases}$无解,故 $f[g(x)]$无意义.

当 $g(x)=2+x$ 时,由$\begin{cases} 4<2+x\leqslant 6, \\ 2<x\leqslant 4 \end{cases}$解得 $2<x\leqslant 4$,则 $f[g(x)]=g(x)=2+x\ (2<x\leqslant 4)$,故

$$f[g(x)]=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<2, \\ 2+x, & 2<x\leqslant 4. \end{cases}$$

1.1.2 求反函数的表示式

其方法和步骤为:(1) 由原函数 $y=f(x)$,求出 x 的表达式 $x=f^{-1}(y)$;(2) 对换 x,y 的位置得到反函数 $y=f^{-1}(x)$;(3) $y=f(x)$的值域就是 $y=f^{-1}(x)$的定义域.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases} 1-2x^2, & x<-1, \\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2, \\ 12x-16, & x>2, \end{cases}$ 则 $f^{-1}(x)=$______.

解 当$-\infty<x<-1$ 时,由 $y=1-2x^2$ 得到 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-y}$,$-\infty<y<-1$;

当$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,由 $y=x^3$ 得到 $x=\sqrt[3]{y}$,$-1\leqslant y\leqslant 8$;

当 $2<x<+\infty$时,由 $y=12x-16$ 得到 $x=(y+16)/12$,$8<y<+\infty$;

故所求的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{1-x}/\sqrt{2}, & -\infty<x<-1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8, \\ (x+16)/12, & 8<x<+\infty. \end{cases}$$

1.1.3 判别函数的有界性

常利用下列诸命题判别之.

命题 1.1.1 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加(或单调减少),则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

命题 1.1.2 如果函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

命题 1.1.3 (1) 如果 $x_0\in(a,b)$，而 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则 $f(x)$在(a,b)内无界.

(2) 如果 $f(x)$在(a,b)内连续，且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，则 $f(x)$在(a,b)内有界.

(3) 如果在某一变化过程中变量 y 有极限，则变量 y 是有界变量.

命题 1.1.4 若在自变量的某变化过程中，函数表示式中含有"∞"因子而无"0"因子，则此函数必无界，但不一定为无穷大量.

命题 1.1.5 有界变量与无穷大量之积为无界变量，但不一定是无穷大量，而有界变量与无穷大量之和为无穷大量.

例 5 下列叙述正确的是(　　).

(A) 如果 $f(x)$在 x_0 的某邻域内无界，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$

(B) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $f(x)$在 x_0 的某邻域内无界

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$　　(D) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}(1/f(x))=\infty$

解一 由命题 1.1.3(1)知，仅(B)入选.

解二 由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$得到对于任意 $M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$. 由此可知 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内无界. 仅(B)入选.

例 6 当 $x\to0$ 时，变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是(　　).

(A) 无穷小　(B) 无穷大　(C) 有界的但不是无穷小　(D) 无界的但不是无穷大

解一 因$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，$\dfrac{1}{x^2}$为无穷大量，$\sin\dfrac{1}{x}$为有界变量，由命题 1.1.5 知$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$为无界变量但不是无穷大量. 仅(D)入选.

解二 在极限过程$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$(不存在)中 $\sin\dfrac{1}{x}$重复取值 0.1，因而变量$\dfrac{1}{x^2}$不可能为无穷小量，也不可能是无穷大量和有界变量，(A)、(B)、(C)不能入选. 仅(D)入选.

事实上，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}=(2n\pi)^2\sin(2n\pi)=0$，可见当 $x\to0$(即 $n\to\infty$)时，所给变量不是无穷大量. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}$，则

$$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to\infty\ (n\to\infty).$$

可见所给变量不是有界的，而是无界的. 因而仅(D)入选.

例 7[2003 年]* 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=$

---

* 例 7[2003 年]表示该例为 2003 年数学三的考题. 全书同.

∞,则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

解一 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 属"$1\cdot\infty$"型,由命题 1.1.4 知,b_nc_n 无界,其极限不存在.仅(D)入选.

解二 用排错法求之.因极限存在与数列前面有限项的大小无关,立即排除(A)、(B).而极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是"$0\cdot\infty$"型未定式,该极限可能存在,也可能不存在.下举反例说明选项(C)也不正确.

事实上取 $a_n=2/n,c_n=n/2\ (n=1,2,\cdots)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$.仅(D)入选.

例 8[2004 年] 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在区间(　　)内有界.

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

解 因
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2^-}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{(x-1)(x-2)}=+\infty.$$
由命题 1.1.3(1)知,$f(x)$在$(0,1)$,$(1,2)$,$(2,3)$上均无界.由于下述极限存在:
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin2}{4},\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=f(-1)=-\frac{\sin3}{18}.$$
又 $f(x)$在$(-1,0)$内连续,故由命题 1.1.3(2)知 $f(x)$在$(-1,0)$内有界.仅(A)入选.

1.1.4　判别函数的奇偶性

首先要注意,函数的奇偶性是相对于对称区间而言的.如果函数的定义域关于原点不对称,则该函数无奇偶性可言.

判别函数的奇偶性常用函数奇偶性定义及函数运算性质(下述诸命题)判别之.

命题 1.1.6 (1) 奇函数乘(除)偶函数=奇函数;(2) 奇函数乘(除)奇函数=偶函数;(3) 偶函数乘(除)偶函数=偶函数;(4) 奇函数加(减)奇函数=奇函数;(5) 偶函数加(减)偶函数=偶函数;(6) 不恒为零的偶(奇)函数加(减)不恒为零的奇(偶)函数为非奇非偶函数;(7) 偶(奇)函数乘以非奇非偶函数,一般不再是偶(奇)函数.

命题 1.1.7 设 $f(x)$为定义在$[-a,a]$(a 可以为无穷)上非常数的任意函数,则

(1) $f(x)+f(-x)$为偶函数;　　(2) $f(x)-f(-x)$[或 $f(-x)-f(x)$]为奇函数.

即自变量带相反符号且为非常数的两同名函数之和为偶函数,之差为奇函数.

命题 1.1.8 设 $f(x)$ 是连续的奇(偶)函数,则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶(奇)函数,即

连续奇(偶)函数的一个原函数为偶(奇)函数.

命题 1.1.9 (1) 若函数 $y=f(t),t=g(x)$的奇偶性不同,则其复合函数 $y=f[g(x)]$必为偶函数;若奇偶性相同,则其复合函数 $y=f[g(x)]$与外层函数 $f(x)$具有相同的奇偶性.

(2) f 不具有奇偶性时,一般 $f(g_0),g_0(f),g_e(f),f(f)$及 $f\cdot f=f^2$ 不具有奇偶性,但 $f(g_e)$为偶函数,其中 g_0 为奇函数,g_e 为偶函数.

命题 1.1.10 下述函数为常用的奇函数:(1) 函数 $f(x)=(a^{kx}\pm1)/(a^{kx}\mp1)$,其中 $a>0,a\neq1,k\neq0$;(2) 函数 $\ln(\sec x\pm\tan x)$;(3) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;(4) $\ln\dfrac{a+x}{a-x}$;(5) $\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ ($a>0$ 常数).

例 9 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数　　(C) 周期函数　　(D) 偶函数

解 显然$|x\sin x|$为偶函数,$e^{\cos x}$也为偶函数,由命题 1.1.6(3)知其乘积 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ $(-\infty<x<+\infty)$也为偶函数.仅(D)入选.

例 10 函数 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$,其中常数 $a>0$ 且 $a\neq1$,函数 $f(x)$为奇函数,则$F(x)$为(　　).

(A) 奇函数　(B) 偶函数　(C) 非奇非偶函数　(D) $F(x)$的奇偶性与 a 有关

解 因常数 $a\neq1$,且 $a>0$,由命题 1.1.10(1)知

$$\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\frac{1-a^x}{a^x+1}=\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{a^x-1}{a^x+1}$$

为奇函数,又 $f(x)$也为奇函数,再由命题 1.1.6(2)知 $F(x)$为偶函数.仅(B)入选.

例 11 设函数 $f(x)$连续,则在下列函数中,必为偶函数的是(　　).

(A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$　　(B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$

(C) $\int_0^x f(t^2)dt$　　(D) $\int_0^x f^2(t)dt$

解 由命题 1.1.8 知(A)中函数为偶函数.这是因为 $t[f(t)+f(-t)]$为奇函数;而(B)中函数为奇函数,因为 $t[f(t)-f(-t)]$为偶函数;(C)中函数也为奇函数,因为 $f(t^2)$为偶函数;而由命题 1.1.9(2)知 $f^2(t)$的奇偶性无法断定,因而(D)中函数不一定是偶函数.仅(A)入选.

例 12 $f(x)=\ln(\sec x-\tan x)$是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 奇函数　　(C) 非奇非偶函数　　(D) 偶函数

解一 由命题 1.1.10(2)知,仅(B)入选.

解二 $f(-x)=\ln[\sec(-x)-\tan(-x)]=\ln(\sec x+\tan x)$

$$=\ln\frac{(\sec x+\tan x)(\sec x-\tan x)}{\sec x-\tan x}=\ln\frac{\sec^2x-\tan^2x}{\sec x-\tan x}$$

$$=\ln\frac{1}{\sec x-\tan x}=-\ln(\sec x-\tan x)=-f(x),$$

即 $f(x)$为奇函数. 仅(B)入选.

1.1.5 奇偶函数常用性质的应用

命题 1.1.11 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则当且仅当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$为偶函数.

命题 1.1.12 若 $f(x)$为$(-a,a)$内的可导奇(偶)函数,则其导函数 $f'(x)$为$(-a,a)$ $(a>0)$内的偶(奇)函数.

命题 1.1.13 若函数 $f(x)$是偶函数,且 $f'(0)$存在,则 $f'(0)=0$;若函数 $f(x)$是奇函数,则 $f(0)=0$.

命题 1.1.14 (1) $y=f(x)$与 $y=-f(-x)$,$y=-f(x)$与 $y=f(-x)$的图形关于原点对称.

(2) $y=f(x)$与 $y=f(-x)$,$y=-f(-x)$与 $y=-f(x)$的图形关于 y 轴对称.

(3) $y=f(x)$与 $y=-f(x)$,$y=-f(-x)$与 $y=f(-x)$的图形关于 x 轴对称.

若已知上述四个函数中任意一个函数的极值、单调性、曲线的凹凸性、拐点等性态,利用上述命题可推得其他三个函数相应的性态.

命题 1.1.15 (1) 两函数的图形(例如两偶函数图形)关于 y 轴对称时,显然其拐点关于 y 轴对称,且在对称区间内正负性、凹凸性相同、极值性质相同(同为极大值或同为极小值),但单调性相反(三同一反).

(2) 两函数(例如两奇函数)的图形关于原点对称时,其拐点关于原点对称,且在对称区间内正、负性相反,凹凸性相反,极值性质相反(极大(小)值变为极小(大)值),但单调性相同(三反一同).

(3) 两函数图形关于 x 轴对称时,显然其拐点关于 x 轴也对称,且在同一区间上这两函数的单调性相反,正负性相反,极值性质相反(极大(小)值变为极小(大)值),且凹凸性相反.

例 13 设 $f(x)$为可导的奇函数,且 $f'(x_0)=a$,则 $f'(-x_0)=$______.

(A) a　　(B) $-a$　　(C) $|a|$　　(D) 0

解 $f(x)$为可导的奇函数,由命题 1.1.12 知,$f(x)$为可导的偶函数,故 $f'(-x_0)=f'(x_0)=a$. 仅(A)入选.

例 14 在$(-\infty,+\infty)$内设 $f(-x)=-f(x)$,$\varphi(-x)=\varphi(x)$,则 $\int_{-a}^{a} f[\varphi'(x)]\mathrm{d}x=$______,其中 $\varphi(x)$可导,$f(x)$连续.

解 因 $f(-x)=-f(x)$,故 $f(x)$为奇函数,又 $\varphi(-x)=\varphi(x)$,故 $\varphi(x)$为偶函数,由命题 1.1.12 知 $\varphi'(x)$为奇函数,则 $f[\varphi'(x)]$为奇函数(见命题 1.1.9),所以 $\int_{-a}^{a} f[\varphi'(x)]\mathrm{d}x = 0$.

例 15 设 $y=\mathrm{e}^{x^2}$,则 $y^{(101)}(0)$等于(　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

解 因 $y=\mathrm{e}^{x^2}$为偶函数,由命题 1.1.12 知,$y^{(101)}(x)$是奇函数,故 $y^{(101)}(0)=0$. 仅

(B)入选.

例 16 设函数在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$x_0\neq 0$ 是 $f(x)$的极大值点,则(　　).

(A) x_0 必是 $f(x)$的驻点　　(B) $-x_0$ 必是$-f(-x)$的极小值点

(C) $-x_0$ 必是$-f(x)$的极小值点　　(D) 对一切 x 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$

解 从几何上分析易知,仅(B)入选.这是因为函数 $f(x)$与$-f(-x)$的图形关于原点对称,而 $x_0\neq 0$ 是函数 $f(x)$的极大值点.由命题 1.1.15 知,显然$-x_0$ 必是$-f(-x)$的极小值点.

例 17 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$存在二阶导数,且 $f(x)=-f(-x)$.当 $x<0$ 时,有 $f'(x)<0,f''(x)>0$,则当 $x>0$ 时,有(　　).

(A) $f'(x)<0,f''(x)>0$　　(B) $f'(x)>0,f''(x)<0$

(C) $f'(x)>0,f''(x)>0$　　(D) $f'(x)<0,f''(x)<0$

解一 因 $y=f(x)$与 $y=-f(-x)$的图形关于原点对称,又 $x<0$ 时,有 $f'(x)<0,f''(x)>0$,根据命题 1.1.15(2)知,曲线在对称区间$(0,+\infty)$内单调性相同,凹向相反,故 $f'(x)<0,f''(x)<0$.仅(D)入选.

解二 由 $f(x)=-f(-x)$有 $f(-x)=-f(x)$,$f(x)$为奇函数.由命题 1.1.12 知,$f'(x)$为偶函数,$f''(x)$为奇函数.由于当 $x<0$ 时有 $f'(x)<0,f''(x)>0$.由命题 1.1.15(2)知 $x>0$ 时单调性相同,但凹向相反,故 $x>0$ 时 $f'(x)<0,f''(x)<0$.仅(D)入选.

1.1.6 判别函数的单调性

若 $f(x)$在区间 I 上没有可导条件,利用函数单调性定义判别.若 $f(x)$在区间 I 上可导,则用导数(见下述命题)判别.此外还利用奇偶函数的性质判别(见命题 1.1.14 和命题 1.1.15).

命题 1.1.16 若在(a,b)内有 $f'(x)>0$ (<0)则在(a,b)内 $f(x)$单调增加(减少).

例 18 $I(x)=\int_e^x \frac{1}{t}\ln t\mathrm{d}t$ 在$[e,e^2]$上的最大值为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2ln2　　(D) 3/2

解 仅(D)入选.$I'(x)=(\ln x)/x$,当 $x\in[e,e^2]$时,$I'(x)>0$,故 $I(x)$ 在$[e,e^2]$上是单调增加函数,所以 $I(x)$ 在$[e,e^2]$上的最大值为

$$I(e^2)=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}\ln t\mathrm{d}t=\int_e^{e^2}\ln t\mathrm{d}\ln t=\frac{1}{2}\ln^2 t\Big|_e^{e^2}=\frac{1}{2}[\ln^2 e^2-\ln^2 e]=\frac{3}{2}.$$

例 19 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且对任意 x_1,x_2,当 $x_1>x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则(　　).

(A) 对任意 x,$f'(x)>0$　　(B) 对任意 x,$f'(x)\leqslant 0$

(C) 函数 $f(-x)$单调增加　　(D) 函数$-f(-x)$单调增加

解一 由命题 1.1.14 知 $f(x)$与 $f(-x)$的图形关于 y 轴对称,而 $f(x)$与$-f(-x)$的图形关于原点对称.又 $f(x)$为单调增加函数,由命题 1.1.15(1)知,$f(-x)$单调减少;由命题 1.1.15(2)知,$-f(-x)$单调增加.仅(D)入选.

解二 利用$-f(-x)$单调增加的定义判别. 对任意x_1,x_2，当$x_1>x_2$时，有$-x_1<-x_2$，则$f(-x_1)<f(-x_2)$，即$-f(-x_1)>-f(x_2)$，由单调增加定义知，$-f(-x)$单调增加. 仅(D)入选.

1.1.7 判别函数的周期性

判别所给函数是否为周期函数，常用定义判别. 也常用到下述命题判别并求其周期.

命题 1.1.17 (1) 若$f(x)$是周期为T的函数，则$f(ax+b)$ $(a\neq 0)$也是周期函数，其周期为$T/|a|$.

(2) 若$f(x),g(x)$均是以T为周期的函数，则$f(x)\pm g(x)$是周期函数且其周期为T.

(3) 若$f(x),g(x)$分别是以$T_1,T_2(T_1\neq T_2)$为周期的周期函数，则$f(x)\pm g(x)$也是周期函数，其周期是以T_1,T_2的最小公倍数为周期.

(4) 若$f(x)$是以T为周期的可导函数，则其导函数$f'(x)$也是以T为周期的周期函数.

例 20 若存在$T>0$，使得$f(x+T)=-f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，则$f(x)$是(   ).

(A) 周期为T的函数 (B) 奇函数 (C) 周期为$2T$的函数 (D) 有界函数

解 因$f(x+2T)=f[(x+T)+T]=-f(x+T)=(-1)[-f(x)]=f(x)$，故$f(x)$是周期为$2T$的函数. 仅(C)入选.

例 21 若$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数，且其图形关于$x=2$对称，则$f(x)$一定是周期函数，其周期$T=$______.

解 因函数图形关于$x=2$对称，故$f(x)=f[2+(2-x)]=f(4-x)$. 又$f(x)$为偶函数，则$f(-x)=f(x)$. 因$f(x)=f(-x)=f[4-(-x)]=f(4+x)$，故$f(x)$为周期函数，且其周期为4.

例 22[1998 年] 设周期函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为4，又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的斜率为(   ).

(A) 1/2 (B) 0 (C) -1 (D) -2

解 由命题 1.1.17(4)知，因$f(x)$是周期为4的可导函数，故$f'(x)$也是周期为4的可导函数，故$f'(5)=f'(1)$，而

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=2\times(-1)=-2.$$

故在点$(5,f(5))$处的斜率为-2. 仅(D)入选.

1.2 极限的求法

1.2.1 求数列的极限

法一 利用极限运算法则求之.

使用前通常需先对数列作某些恒等变形或化简. 恒等变形的方法常用的有:分式的约分或通分,分解因式,分子、分母有理化,等价无穷小代换等.

例 1 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}=$______.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+2+3+\cdots+n}+\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n(n+1)/2}+\sqrt{n(n-1)/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列命题正确的是(　　).

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散　　(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小　　(D) 若 $1/x_n$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

解一 利用极限的四则运算判别之. 若 $1/x_n$ 为无穷小,由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$ 得到

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}[(1/x_n)\cdot x_ny_n]=\lim_{n\to\infty}(1/x_n)\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=0\times0=0,$$

即 y_n 为无穷小,仅(D)入选.

解二 用举反例排错法确定正确选项. 若取 $x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 排除(B). 若取 $x_n=0$,则 y_n 可为任意数列,排除(C). 若取 $y_n=0$,排除(A). 仅(D)入选.

法二 转化为函数极限求之.

一般若已知数列的通项表达式利用下述命题可转化为求函数极限.

命题 1.2.1 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$.

例 3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$($n$ 为自然数)$=$______.

解 因 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 是所求极限的相应的函数极限,而由命题 1.2.11 易求得

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3/3}{x^3}}=e^{1/3}.$$

由命题 1.2.1 知 $$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

法三 利用夹逼准则求之.

命题 1.2.2(夹逼准则) 设有正整数 N,当 $n>N$ 时,$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

为了使用该命题,应常握一些常用的数列的极限及下述常用的放缩技巧.

命题 1.2.3 (1) 若干个正数乘积中,大于 1 的因子略去则缩小,小于 1 的因子略去则放大;(2) 分子、分母同为正数,分母缩小,则此数放大,分母放大,则此数缩小;(3) n个正数之和可放大为(不超过)最大数乘以 n,可缩小为(不小于)最小数乘以 n;(4) n个正数之和也可放大为最大数乘以 n,缩小为最大数;(5) n 个正数之和也可放大为部分数中的最大数乘以部分数中的个数,再加上其余原来的数,缩小为最大数.